说明

1. 本答案为参考答案，如有谬误或有更好的做法，欢迎同学们指出.
2. 记号使用均以课上的为准，有些约定俗成的条件自动跳过(例如U表示$\mathbb{R}^n$中的开集)，如有例外会额外说明.
3. 【$x.y$】表示教材中第x章的第y题，【附】为老师添加的题目，其他出处的题目均会特殊标明.

2019春-微分方程II助教吴天

第1次作业 (上交日期：2019年3月25日)

1.【5.1】若$k \in \mathbb{N}$，$0<\gamma \leqslant 1$，证明：$C^{k,\gamma}(\overline{U})$是Banach空间.

【证明】(1)首先验证$\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}$是范数：

a. (正定性)显然有$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} \geqslant 0$，且$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}=0 \Rightarrow \|u\|_{C(\overline{U})}=0 \Rightarrow u \equiv 0$.

b. (齐次性)$\|\lambda u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}=|\lambda|\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}$，显然.

c. (三角不等式)设$u,v \in C^{k,\gamma}(\overline{U})$，由于$\|\cdot\|_{C(\overline{U})}$是范数：

$$\|D^\alpha(u+v)\|_{C(\overline{U})} \leqslant \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})}+\|D^\alpha v\|_{C(\overline{U})}.$$

又由于$[D^\alpha(u+v)]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}=\sup\limits_{\substack{x,y\in\overline{U}\\ x\neq y}} \dfrac{|D^\alpha(u+v)(x)-D^\alpha(u+v)(y)|}{|x-y|^\gamma}$

$$\leqslant \sup_{\substack{x,y\in\overline{U}\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}+\sup_{\substack{x,y\in\overline{U}\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha v(x)-D^\alpha v(y)|}{|x-y|^\gamma}=[D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}+[D^\alpha v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}.$$

则$\|u+v\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} \leqslant \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}+\|v\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}$.

(2)由三角不等式容易验证$C^{k,\gamma}(\overline{U})$是线性空间.

(3)验证$\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}$的完备性：设$\{u_n\}$是$C^{k,\gamma}(\overline{U})$中的Cauchy列，则

$$\|u_m-u_n\|_{C^k(\overline{U})} \to 0 \text{ 且 } \sum_{|\alpha|=k}[\mathrm{D}^\alpha u_m-\mathrm{D}^\alpha u_n]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \to 0\ (m,n\to\infty).$$

因此由$\|\cdot\|_{C^k(\overline{U})}$的完备性：$\exists u \in C^k(\overline{U})$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{C^k(\overline{U})}=0$.

因此$\forall|\alpha|=k$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathrm{D}^\alpha u_n-\mathrm{D}^\alpha u\|_{C(\overline{U})}=0 \ \Rightarrow\ \mathrm{D}^\alpha u_n$在$\overline{U}$上一致收敛于$\mathrm{D}^\alpha u$.

那么$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\substack{x,y\in\overline{U}\\ x\neq y}}\dfrac{|\mathrm{D}^\alpha u_n(x)-\mathrm{D}^\alpha u(x)-\mathrm{D}^\alpha u_n(y)+\mathrm{D}^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}=0$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}=0$，从而存在充分大的$N$，使得

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} \leqslant \|u_N\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}+1<+\infty \ \Rightarrow\ u \in \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}. \quad \square$$

2.【5.2】若$0<\beta<\gamma\leqslant 1$，证明插值不等式$\|u\|_{C^{0,\gamma}(U)} \leqslant \|u\|_{C^{0,\beta}(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}\|u\|_{C^{0,1}(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$.

【证明】$\|u\|_{C^{0,\beta}(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}\|u\|_{C^{0,1}(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}=\Big(\|u\|_{C(U)}+\sup\limits_{\substack{x\neq y\\ x,y\in U}}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta}\Big)^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}\Big(\|u\|_{C(U)}+\sup\limits_{\substack{x\neq y\\ x,y\in U}}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\Big)^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$

$$\geqslant \|u\|_{C(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}\|u\|_{C(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}+\sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in U}}\frac{|u(x)-u(y)|^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}}{|x-y|^{\frac{\beta-\beta\gamma}{1-\beta}}}\sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in U}}\frac{|u(x)-u(y)|^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}}{|x-y|^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}} \geqslant \|u\|_{C^{0,\gamma}(U)}. \quad \square$$

3.【5.3】U表示开矩形$\{x\in\mathbb{R}^2:|x_1|<1,\ |x_2|<1\}$，定义：

$$u(x)=\begin{cases}1-x_1, & x_1>0,\ |x_2|<x_1\\ 1+x_1, & x_1<0,\ |x_2|<-x_1\\ 1-x_2, & x_2>0,\ |x_1|<x_2\\ 1+x_2, & x_1>0,\ |x_1|<-x_2\end{cases},$$

对于$1\leqslant p\leqslant\infty$，$u$是否属于$W^{1,p}(U)$?

【解】直接用定义即可验证$\mathrm{D}u(x)=\begin{cases}(-1,0), & x_1>0,\ |x_2|<x_1\\ (1,0), & x_1<0,\ |x_2|<-x_1\\ (0,-1), & x_2>0,\ |x_1|<x_2\\ (0,1), & x_1>0,\ |x_1|<-x_2\end{cases}$，此处略.

注意到，$\forall 1\leqslant p\leqslant+\infty$，$\|u\|_p\leqslant\|2\|_p$，故$u\in L^p(U)$.

同理，$\|\mathrm{D}u\|_p\leqslant\|1\|_p$，故$\mathrm{D}u\in L^p(U)$，从而$u\in W^{1,p}(U)$.

4.【5.5】设U,V是开集，$V\Subset U$，证明：存在光滑函数ζ，满足在V中$\zeta\equiv1$，在∂U附近$\zeta\equiv0$.

【证明】取开集W，使得$V\Subset W\Subset U$.

考察$\phi(x)=(\chi_W)^{\varepsilon}(x)$，其中 $\varepsilon<\dfrac{1}{2}\min\{\mathrm{dist}(\partial U,\partial W),\mathrm{dist}(\partial W,\partial V)\}$. 则对任意$x\in V$：

$$\phi(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_W(y)\eta_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y=\int_{B_\varepsilon(0)}\eta_\varepsilon(y)\chi_W(x-y)\mathrm{d}y\xlongequal{\varepsilon<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(\partial V,\partial W)}\int_{B_\varepsilon(0)}\eta_\varepsilon(y)\mathrm{d}y=1.$$

再考察任意$x\in U_{\frac{\varepsilon}{4}}=\left\{y\in U:\mathrm{dist}(y,\partial U)<\dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$：

$$\phi(x)=\int_{B_\varepsilon(0)}\eta_\varepsilon(y)\chi_W(x-y)\mathrm{d}y\xlongequal{\varepsilon<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(\partial V,\partial W)}\int_{B_\varepsilon(0)}\eta_\varepsilon(y)\cdot0\ \mathrm{d}y=0.\quad\square$$

5.【5.6】设U有界，且$U\Subset\bigcup\limits_{i=1}^N V_i$. 证明：存在$C^\infty$函数$\zeta_i\ (i=1,\cdots,N)$使得

$$\begin{cases}0\leqslant\zeta_i\leqslant1, & \mathrm{spt}\,\zeta_i\subset V_i\ (i=1,\cdots,N)\\ \sum\limits_{i=1}^N\zeta_i=1, & x\in U\end{cases}$$

$\{\zeta_i\}_{i=1}^N$叫做单位分解.

【证明】$\forall x\in\overline{U}$，$\exists B_x$为以x为中心的球，使得对某个$1\leqslant i\leqslant N$，$\overline{B}_x\subset V_i$. 故$\overline{U}\subset\bigcup\limits_{x\in\overline{U}}B_x$.

由$\overline{U}$的紧性，存在$x_1,\cdots,x_m$，使得$\overline{U}\subset\bigcup\limits_{j=1}^m B_{x_j}$. 置$U_i=\bigcup\limits_{\{j:B_{x_j}\subset V_i\}}B_{x_j}$，则$\overline{U}\subset\bigcup\limits_{i=1}^N U_i$.

由【5.5】知：$\exists\varphi_i\in C_0^\infty(V_i)$，$0\leqslant\varphi_i\leqslant1$，$\mathrm{spt}\,\varphi_i\subset V_i$，$\varphi_i(x)\equiv1\ (x\in\overline{U})$.

置$\zeta_i=\varphi_i\prod\limits_{k=1}^{i-1}(1-\varphi_k)$，则$\{\zeta_i\}_{i=1}^N$即为满足所证条件的单位分解. $\square$

【注】若置$\zeta_i=\dfrac{\varphi_i}{\sum\limits_{k=1}^N\varphi_k}$，则在靠近$\bigcup\limits_{i=1}^N\overline{V}_i$的边界分母为0，我们需要零延拓来保证光滑性.

6.【5.9】对于$u\in C_0^\infty(U)$，使用分部积分法证明插值不等式：$\|\mathrm{D}u\|_{L^2}\leqslant C\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{D}^2u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$. 若$U$有界，$\partial U$光滑，

再对$u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$证明该不等式.

【证明】 $\|\mathrm{D}u\|_{L^2(U)}^2=\sum\limits_{i=1}^n\int_U(\partial_i u)^2\mathrm{d}x\xlongequal{u\in C_0^\infty(U)}-\sum\limits_{i=1}^n\int_U u\partial_{ii}u\mathrm{d}x$

$$\leqslant\int_U|u||\Delta u|\mathrm{d}x\leqslant C\int_U|u||\mathrm{D}^2u|\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|_{L^2(U)}\|\mathrm{D}^2u\|_{L^2(U)}.$$

对于$u\in H^2(U)\bigcap H_0^1(U)$，取$\{v_k\}_{k=1}^\infty\subset C_0^\infty(U)$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}\|v_k-u\|_{H^1(U)}=0$.

类似地，再取$\{w_k\}_{k=1}^\infty\subset C^\infty(U)$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}\|w_k-u\|_{H^2(U)}=0$. 则

$$\int_U\mathrm{D}v_k\cdot\mathrm{D}w_k\mathrm{d}x\xlongequal{v_k\in C_0^\infty(U)}-\sum_{i=1}^n\int_U v_k\partial_{ii}w_k\mathrm{d}x=-\sum_{i=1}^n\int_U v_k\Delta w_k\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\|v_k\|_{L^2(U)}\|\mathrm{D}^2w_k\|_{L^2(U)}\to C\|u\|_{L^2(U)}\|\mathrm{D}^2u\|_{L^2(U)}\ (k\to\infty).$$

又注意到 $\left|\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x-\int_U\mathrm{D}v_k\cdot\mathrm{D}w_k\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_U\mathrm{D}u\cdot(\mathrm{D}u-\mathrm{D}w_k)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_U\mathrm{D}w_k\cdot(\mathrm{D}u-\mathrm{D}v_k)\mathrm{d}x\right|$

$$\leqslant\|\mathrm{D}u\|_{L^2(U)}^{\frac12}\|\mathrm{D}u-\mathrm{D}w_k\|_{L^2(U)}^{\frac12}+\|\mathrm{D}w_k\|_{L^2(U)}^{\frac12}\|\mathrm{D}u-\mathrm{D}v_k\|_{L^2(U)}^{\frac12}.$$

由于$\{\mathrm{D}w_k\}$为$L^2(U)$中的Cauchy列，故$\|\mathrm{D}w_k\|_{L^2(U)}$有界，从而$\lim\limits_{k\to\infty}\int_U\mathrm{D}v_k\cdot\mathrm{D}w_k\mathrm{d}x=\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$.

$\therefore\|\mathrm{D}u\|_{L^2(U)}\leqslant C\|u\|_{L^2(U)}^{\frac12}|\mathrm{D}^2u\|_{L^2(U)}^{\frac12}$. □

【注】 本题及下题多次使用了$|\Delta u|\leqslant C|\mathrm{D}^2u|$，实际上，它的证明是平凡的：

$$|\Delta u|\leqslant n\cdot\frac1n\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\right|\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}\right)^2}=\sqrt{n}|\mathrm{D}^2u|.$$

假定$u\in C_0^\infty(U)$，如果我们单独考察$\|\Delta u\|_2$与$\|\mathrm{D}^2u\|_2$，会得到更佳的估计：

$$\|\Delta u\|_2^2=\sum_{i,j=1}^n\int_U\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2u}{\partial x_j^2}\mathrm{d}x=-\sum_{i,j=1}^n\int_U\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^3u}{\partial x_i\partial x_j^2}\mathrm{d}x=\sum_{i,j=1}^n\int_U\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_ix_j}\right)^2\mathrm{d}x=\|\mathrm{D}^2u\|_2^2.$$

事实上，对于$u\in H_0^2(U)$，可以通过紧支光滑逼近的办法得到同样的结论，证明留作练习. 有了这个结论，我们可以将本题前半部分加强：$\|\mathrm{D}u\|_2^2\leqslant\int_U|u||\Delta u|\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_2\|\Delta u\|_2=\|u\|_2\|\mathrm{D}^2u\|_2$.

7.【5.10】(1)对$2\leqslant p<\infty$和$u\in C_0^\infty(U)$，使用分部积分法证明：$\|\mathrm{D}u\|_{L^p}\leqslant C\|u\|_{L^p}^{\frac12}\|\mathrm{D}^2u\|_{L^p}^{\frac12}$.

(2)对$1\leqslant p<\infty$和$u\in C_0^\infty(U)$，证明$\|\mathrm{D}u\|_{L^{2p}}\leqslant C\|u\|_{L^\infty}^{\frac12}\|\mathrm{D}^2u\|_{L^p}^{\frac12}$.

【证明】 (1) $\|\mathrm{D}u\|_p^p=\sum\limits_{i=1}^n\int_U|\partial_iu|^2|\mathrm{D}u|^{p-2}\mathrm{d}x=-\sum\limits_{i=1}^n\int_U u\partial_i(\partial_iu|\mathrm{D}u|^{p-2})\mathrm{d}x$

$$=-\int_U u\Delta u|\mathrm{D}u|^{p-2}\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n\int_U u\partial_iu\partial_i(|\mathrm{D}u|^{p-2})\mathrm{d}x$$

其中 $-\int_U u\Delta u|\mathrm{D}u|^{p-2}\mathrm{d}x\leqslant C\int_U|u||\mathrm{D}^2u||\mathrm{D}u|^{p-2}\mathrm{d}x\overset{\text{Hölder}}{\leqslant}C\|u\|_p\|\mathrm{D}^2u\|_p\|\mathrm{D}u\|_p^{p-2}$.

且 $-\sum\limits_{i=1}^n\int_U u\partial_iu\partial_i(|\mathrm{D}u|^{p-2})\mathrm{d}x=-\sum\limits_{i=1}^n\int_U u\partial_iu(p-2)\sum\limits_{j=1}^n\partial_{ij}u\partial_ju|\mathrm{D}u|^{p-4}\mathrm{d}x$

$$=-(p-2)\sum_{i=1}^n\int_U u|\mathrm{D}u|^{p-4}\sum_{j=1}^n\partial_iu\partial_ju\partial_{ij}u\mathrm{d}x\leqslant C\int_U|u||\mathrm{D}u|^{p-4}|(\mathrm{D}u)^T\mathrm{D}^2u(\mathrm{D}u)|\mathrm{d}x$$

$\leqslant C\int_U|u||\mathrm{D}u|^{p-2}|\mathrm{D}^2u|\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|_p\|\mathrm{D}^2u\|_p\|\mathrm{D}u\|_p^{p-2}$.

因此，$\|\mathrm{D}u\|_p^p\leqslant C\|u\|_p\|\mathrm{D}^2u\|_p\|\mathrm{D}u\|_p^{p-2}\Rightarrow\|\mathrm{D}u\|_p\leqslant C\|u\|_p^{1/2}\|\mathrm{D}^2u\|_p^{1/2}$.

(2)由(1)的证明过程可得：

$$\|\mathrm{D}u\|_{2p}^{2p}\leqslant C\int_U|u||\mathrm{D}^2u||\mathrm{D}u|^{2p-2}\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|_\infty\|\mathrm{D}^2u\|_p\|\mathrm{D}u\|_{2p}^{2p-2}.$$

因此，$\|\mathrm{D}u\|_{2p} \leqslant C\|u\|_{\infty}^{1/2}\|\mathrm{D}^2u\|_p^{1/2}$. $\square$

8.【5.11】设U连通，$u \in W^{1,p}(U)$满足$\mathrm{D}u = 0$在U上几乎处处成立，证明：u在U上几乎处处为常值.

【证明】$\forall V \Subset U$，取$0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(V, \partial U)$，则$V \Subset U_\varepsilon$，$u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$.

注意到$\mathrm{D}(u^\varepsilon) = \eta_\varepsilon * \mathrm{D}u = 0$ a.e. $x \in U$，由U连通，$\exists c_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$，使得$u^\varepsilon(x) \equiv c_\varepsilon$ $(\forall x \in U_\varepsilon)$.

由磨光性质：$u^\varepsilon \to u$ a.e. $x \in U$，因此设$c_\varepsilon \to c$ a.e. $x \in U_\varepsilon$，则：

$$u = \lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} c_\varepsilon = c \text{ a.e.} x \in U_\varepsilon.$$

由于$\varepsilon > 0$的任意性，知：$u = c$ a.e. $x \in U$. $\square$

【注】此题另证：$\forall V \Subset U$，取$\varepsilon > 0$充分小，使$u^\varepsilon \in C^\infty(V)$，故$\exists c_\varepsilon \in \mathbb{R}$，使得$u^\varepsilon \equiv c_\varepsilon$ $(\forall x \in V)$.

注意到$c_\varepsilon m(V)^{\frac{1}{p}} = \|u^\varepsilon\|p, V \leqslant \|\eta^\varepsilon\|_{1,\mathbb{R}^n}\|u\|_{p,U} < +\infty$，则$\{c_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$有界，因此可取$\{c_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{c_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$为收敛子列. 设$\lim\limits_{k\to\infty} c_{\varepsilon_k} = c \in \mathbb{R}$. 由控制收敛定理：

$$\|u - c\|_{p,V} \leqslant \|u - u^{\varepsilon_k}\|_{p,V} + \|u^{\varepsilon_k} - c\|_{p,V} \to 0 \ (k \to \infty).$$

因此在V上几乎处处有$u = c$. 由V的任意性，$u = c$ a.e. U. $\square$

9.【附】设$1 \leqslant p < \infty$，证明$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$在$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$中稠密.

【证明】$\forall u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$，考察$u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\forall |\alpha| \leqslant k$，由$\mathrm{D}^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$的绝对连续性：

$$\forall \lambda > 0，\exists \delta > 0，当0 < \varepsilon < \delta时，\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}^\alpha u(x-y) - \mathrm{D}^\alpha u(x)|\mathrm{d}x < \lambda \ (\forall y \in B_\varepsilon(0)).$$

$$\begin{aligned}\therefore \|\mathrm{D}^\alpha u^\varepsilon - \mathrm{D}^\alpha u\|_{p,\mathbb{R}^n}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)\big(\mathrm{D}^\alpha u(x-y) - \mathrm{D}^\alpha u(x)\big)\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Young}}{\leqslant} \int_{B_1(0)} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y)|\mathrm{D}^\alpha u(x - \varepsilon y) - \mathrm{D}^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x < \lambda \to 0 \ (\lambda \to 0).\end{aligned}$$

因此$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\mathrm{D}^\alpha u^\varepsilon - \mathrm{D}^\alpha u\|_{p,\mathbb{R}^n} = 0$，进而$\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\|u^\varepsilon - u\|_{k,p,\mathbb{R}^n} = 0$.

取截断函数$\zeta \in C_0^\infty(B_2(0))$，$0 \leqslant \zeta \leqslant 1$，$\zeta \equiv 1$ $(\forall x \in B_1(0))$. 记$u_j^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)\zeta\Big(\dfrac{x}{j}\Big) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$\forall |\alpha| \leqslant k$，$\mathrm{D}^\alpha u_j^\varepsilon(x) = \zeta\Big(\dfrac{x}{j}\Big)\mathrm{D}^\alpha u^\varepsilon + \sum\limits_{\beta \leqslant \alpha, |\beta|>0} \dbinom{\alpha}{\beta} j^{-|\beta|}(\mathrm{D}^\beta\zeta)\Big(\dfrac{x}{j}\Big)\mathrm{D}^{\alpha-\beta}u^\varepsilon(x)$.

$$\therefore \left\|D^\alpha u_j^\varepsilon - D^\alpha u^\varepsilon\right\|_{p,\mathbb{R}^n}^p \leqslant \int_{|x|>j} |D^\alpha u^\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x + \frac{C}{j}\|u^\varepsilon\|_{k,p,\mathbb{R}^n}^p \to 0 \ (j \to \infty).$$

因此，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists j(\varepsilon) > 0$，使得$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} j(\varepsilon) = +\infty$，且$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|u_{j(\varepsilon)}^\varepsilon - u\|_{k,p,\mathbb{R}^n} = 0$. $\square$

第2次作业 (上交日期：2019年4月8日)

1.【5.4】设$u \in W^{1,p}(0,1)$，$1 \leqslant p < +\infty$.

(1)证明：u几乎处处等于一个绝对连续函数，且几乎处处存在的$u' \in L^p(0,1)$.

(2)证明：若$1 < p < \infty$，则$|u(x) - u(y)| \leqslant |x-y|^{-\frac{1}{p}}\left(\displaystyle\int_0^1 |u'|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ a.e. $x, y \in [0,1]$.

【证明】(1)取$\widetilde{u}(x) = \displaystyle\int_0^x u'(t)\mathrm{d}t$，其中$u'$是$u$的弱导数. 则$\widetilde{u} \in \mathrm{AC}[0,1]$.

$\because \dfrac{d}{\mathrm{d}x}\widetilde{u}(x) = u'(x)$ a.e. $x \in (0,1)$ $\quad\therefore (\widetilde{u} - u)' = 0$ a.e. $x \in (0,1)$.

由【5.11】：$u = \widetilde{u} + c$ a.e. $x \in (0,1)$，因此u几乎处处可导，导数即为u'.

由于$u \in W^{1,p}(0,1)$，故$u' \in L^p(0,1)$.

(2) $|u(x) - u(y)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \chi_{[x,y]}(t)|u'(t)|\mathrm{d}t \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |u'|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$. $\square$

2.【5.7】设U是有界的，存在一个光滑的向量场α，使得$\alpha\cdot\nu\geqslant 1\ (\forall x\in\partial U)$，其中$\nu$是$\partial U$的单位外法向量场. 设$1\leqslant p\leqslant+\infty$，试应用Gauss-Green公式于$\int_{\partial U}|u|^p\alpha\cdot\nu\mathrm{d}S$，来导出迹不等式的新证明：$\forall u\in C^1(\overline{U})$，$\int_{\partial U}|u|^p\mathrm{d}S\leqslant C\int_U(|Du|^p+|u|^p)\mathrm{d}x.$

【证明】由于α是紧集∂U上的光滑向量场，故α与$\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}$在$\partial U$上有界，从而

$$\int_{\partial U}|u|^p\mathrm{d}S\leqslant\int_{\partial U}|u|^p\alpha\cdot\nu\mathrm{d}S\xlongequal{\text{Gauss-Green}}\sum_{i=1}^n\int_U\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}|u|^p\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\int_U p|u|^{p-1}|u|_{x_i}\alpha_i\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_U|u|^p\mathrm{d}x+C\int_U|u|^{p-1}|\mathrm{D}u|\mathrm{d}x\overset{\text{Young}}{\leqslant}C\int_U(|\mathrm{D}u|^p+|u|^p)\mathrm{d}x.$$ □

3.【5.8】设U是有界的，∂U是C^1的. 证明：不存在有界线性算子$T:L^p(U)\to L^p(\partial U)$，使得

$$Tu=u\big|_{\partial U}\ (\forall u\in C(\overline{U})\cap L^p(U)).$$

【证明】假设存在这样的算子T. $\forall u\in L^p(U)$，$\exists\{u_n\}_{n=1}^\infty\in C_0(U)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{L^p(U)}=0$.

由T有界：$\lim\limits_{n\to\infty}\|Tu_n-Tu\|_{L^p(\partial U)}=0$. $Tu_n\equiv 0\Rightarrow Tu=0$ a.e. ∂U，与$\forall u\in L^p(U)$矛盾！ □

【注】下面给出一个构造性的证明：假设存在这样的算子T.

取$u_m(x)=\max\{0,1-m\,\mathrm{dist}(x,\partial U)\}\in L^p(U)\cap C(\overline{U})\ \therefore Tu_m\equiv 1$. 显然，对几乎处处$x\in\overline{U}$，$u_m\to 0$，故$\lim\limits_{m\to\infty}\|u_m\|_{L^p(U)}=0$. 因此$\|T\|\geqslant\limsup\limits_{m\to\infty}\dfrac{\|Tu_m\|_{L^p(\partial U)}}{\|u_m\|_{L^p(U)}}=+\infty$，矛盾！ □

4.【5.14】验证：若$n>1$，无界函数$u(x)=\log\log\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)\in W^{1,n}(B_1(0))$.

【证明】$\mathrm{D}u(x)=-\dfrac{x}{|x|^2(1+|x|)\log\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)}$.

$$\therefore\int_{B_1(0)}|u|^n\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}\mathrm{d}r\int_{\partial B_r(0)}\left(\log\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right)^n\mathrm{d}S-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}^1\mathrm{d}r\int_{\partial B_r(0)}\left(\log\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right)^n\mathrm{d}S$$

$$\leqslant\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}\omega r^{n-1}\log^n\frac{1}{r}\mathrm{d}r-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}^1\omega_n\log^n\log 2\ \mathrm{d}r<+\infty\ (n\geqslant 2).$$

其中$\omega r^{n-1}\log^n\dfrac{1}{r}=o(-\log r)\ (r\to 0)$，而$\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}-\log r\mathrm{d}r$可积，故$u\in L^n(B_1(0))$.

$$\int_{B_1(0)}|Du|^n\mathrm{d}x=\omega_n\int_0^1\frac{1}{r(1+r)^n\log^n\left(1+\dfrac{1}{r}\right)}\mathrm{d}r\leqslant\frac{\omega_n}{(\log 2)^{n-2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r\log^2(1+\frac{1}{r})}$$

$\therefore\dfrac{1}{r\log^2(1+\dfrac{1}{r})}\sim\dfrac{1}{r\log^2 r}\ (r\to 0)$，而$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}r}{r\log^2 r}$可积，故$u\in W^{1,n}(B_1(0))$. □

5.【5.17】(链式法则)设$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是$C^1$的，$F'$有界，$U$有界，且$u\in W^{1,p}(U)$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$. 试证明：$v:=F(u)\in W^{1,p}(U)$，且$\mathrm{D}_iv=F'(u)\mathrm{D}_iu$，其中$i=1,\cdots,n$.

【证明】(1)由于U有界，$|F(0)|\in L^p(U)$，故$|F(u)|\leqslant\|F'\|_\infty|u|+|F(0)|\in L^p(U)$.

此外，$|F'(u)\mathrm{D}_iu|\leqslant\|F'\|_\infty|\mathrm{D}_iu|\in L^p(U)$，故只需证明$\mathrm{D}_i\big(F(u)\big)=F'(u)\mathrm{D}_iu$.

(2)①当$1\leqslant p<+\infty$时，$\forall\phi\in C_0^\infty(U)$，取$\varepsilon>0$充分小，使$\mathrm{spt}\,\phi\subset V\Subset U$，其中$V=U_\varepsilon$，则

$$\int_V F(u^\varepsilon)\partial_i\phi\mathrm{d}x=-\int_V F'(u^\varepsilon)\partial_iu^\varepsilon\cdot\phi\mathrm{d}x\ \cdots\ (\bigstar)$$

考虑$\int_V |F(u^\varepsilon)-F(u)|\cdot|\partial_i\phi|\mathrm{d}x \leqslant \|F^{'}\|_{L^\infty(V)}\|u^\varepsilon-u\|_{L^p(V)}\|\partial_i\phi\|_{L^{p'}(V)} \to 0\ (\varepsilon\to 0)$.

又有：$\left|\int_V F'(u^\varepsilon)\partial_i u^\varepsilon\cdot\phi\mathrm{d}x - \int_V F'(u)\partial_i u\cdot\phi\mathrm{d}x\right|$

$$\leqslant \int_V |F'(u^\varepsilon)-F'(u)|\cdot|\partial_i u|\cdot|\phi|\mathrm{d}x + \int_V |F'(u^\varepsilon)|\cdot|\partial_i u-\partial_i u^\varepsilon|\cdot|\phi|\mathrm{d}x := I_1+I_2.$$

其中$I_2 \leqslant ||F^{'}||_{L^\infty(V)}||\partial_i u-\partial_i u^\varepsilon||_{L^p(V)}||\phi||_{L^{p'}(V)} \to 0\ (\varepsilon\to 0)$.

$\because u^\varepsilon \to u$ a.e. $x\in V$，F'连续 $\therefore F'(u^\varepsilon)\to F'(u)$ a.e. $x\in V$.

又$|F'(u^\varepsilon)-F^{'}(u)|\cdot|\partial_i u|\cdot|\phi| \leqslant 2||F^{'}||_{L^\infty(V)}|\partial_i u|\cdot|\phi| \in L^1(V)$.

$\therefore$由控制收敛定理，$I_1\to 0\ (\varepsilon\to 0)$. 综上，在(★)式两边令$\varepsilon\to 0$，结论得证.

②当$p=+\infty$时，u在U上几乎处处可微，因此结论自然成立. □

【注】(1)事实上，结论对于$m(U)<+\infty$均成立. 如果$m(U)=+\infty$，当$F(0)=0$时结论依旧成立.

(2)由于题中所给条件为U有界，因此也可以取$\lim\limits_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{W^{k,p}(U)}=0$进行全局估计.

6.【5.18】设 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, U有界，证明：

(1)若 $u\in W^{1,p}(U)$，则 $|u|\in W^{1,p}(U)$；

(2)若 $u\in W^{1,p}(U)$，则$u^+,u^-\in W^{1,p}(U)$，且

$$\mathrm{D}u^+=\begin{cases}\mathrm{D}u, & \text{a.e. } \{u>0\}\\ 0, & \text{a.e. } \{u\leqslant 0\}\end{cases}，\ \mathrm{D}u^-=\begin{cases}0, & \text{a.e. } \{u\geqslant 0\}\\ -\mathrm{D}u, & \text{a.e. } \{u<0\}\end{cases}；$$

(3)若 $u\in W^{1,p}(U)$，则$\mathrm{D}u=0$ a.e. $\{u=0\}$.

【证明】事实上，只需证明(2)，(1)(3)是(2)的显然推论.

置$F_\varepsilon(z)=(\sqrt{z^2+\varepsilon^2}-\varepsilon)\chi_{\{z\geqslant 0\}}$，则$u^+=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(u)$. 注意到$F_\varepsilon'\in L^\infty(\mathbb{R})\bigcap C(\mathbb{R})$.

$\therefore$由17题：$\int_U F_\varepsilon(U)\partial_i\phi\mathrm{d}x=-\int_U F_\varepsilon'(u)\partial_i u\cdot\phi\mathrm{d}x$. 由控制收敛定理：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_U F_\varepsilon(u)\partial_i\phi\mathrm{d}x=\int_U F(u)\partial_i\phi\mathrm{d}x.$$

右侧同理：$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_U F_\varepsilon'(u)\partial_i u\cdot\phi\mathrm{d}x=\int_U F'(u)\partial_i u\cdot\phi\mathrm{d}x$，因此$\mathrm{D}u^+=\mathrm{D}u\cdot\chi_{\{u>0\}}$.

同理可证$\mathrm{D}u^-=-\mathrm{D}u\cdot\chi_{\{u<0\}}$. □

7.【5.19】设ϕ是一个光滑有界递增函数，使得ϕ'有界，且当$|z|\leqslant 1$时，$\phi(z)=z$.

置$u^\varepsilon(x):=\varepsilon\phi(\frac{u}{\varepsilon})$，证明：在$H^1(U)$中，$u^\varepsilon\rightharpoonup 0$，进而有

$$\int_U \mathrm{D}u^\varepsilon\cdot\mathrm{D}u\mathrm{d}x=\int_U\phi'(\frac{u}{\varepsilon})|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x\to 0.$$

并由此证明：$u\in H^1(U)$时，在$\{x:u(x)=0\}$上$\mathrm{D}u=0$几乎处处成立.

【证明】 $\forall\varphi\in C_0^\infty(U)$，$\int_U u^\varepsilon\varphi\mathrm{d}x=\varepsilon\int_U\phi(\frac{u}{\varepsilon})\varphi\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\|\phi\|_\infty\|\varphi\|_1\to 0\ (\varepsilon\to 0)$，且$C_0^\infty(U)$在$L^2(U)$中稠密.

又注意到$\phi(0)=0$，结合ϕ'有界：$\|u^\varepsilon\|_2^2=\varepsilon^2\int_U\left|\phi(\frac{u}{\varepsilon})\right|^2\mathrm{d}x\leqslant\|\phi'\|_\infty\|u\|_2^2<+\infty$.

因而u^ε在$L^2(U)$上一致有界，由Banach-Steinhaus定理：在$L^2(U)$中$u^\varepsilon\rightharpoonup 0$.

由于在$L^2(U)$中，$u^\varepsilon\rightharpoonup 0$，$\mathrm{D}_i\varphi\in L^2(U)=\left(L^2(U)\right)^*$，故$\int_U u^\varepsilon\cdot\mathrm{D}_i\varphi\mathrm{d}x\to 0\ (\varepsilon\to 0)$，因此

$$\int_U\mathrm{D}_i u^\varepsilon\cdot\varphi\mathrm{d}x=-\int_U u^\varepsilon\cdot\mathrm{D}_i\varphi\mathrm{d}x\to 0\ (\varepsilon\to 0),\ \forall i=1,\cdots,n.$$

而$\|\mathrm{D}_i u^\varepsilon\|_2^2 = \int_U \left|\phi'(\frac{u}{\varepsilon})\cdot \mathrm{D}_i u\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant \|\phi'\|_\infty^2 \|\mathrm{D}_i u\|_2^2 < +\infty$，所以在$L^2(U)$中$\mathrm{D}_i u^\varepsilon \rightharpoonup 0\ (\varepsilon\to 0)$.

$\therefore$在$H^1(U)$中，$u^\varepsilon \rightharpoonup 0\ (\varepsilon\to 0)$. 由于$\mathrm{D}_i u\in L^2(U)$，在$L^2(U)$中$\mathrm{D}_i u^\varepsilon \rightharpoonup 0\ (\varepsilon\to 0)$，故

$$\int_U \phi'(\frac{u}{\varepsilon})|\mathrm{D}u|^2 \mathrm{d}x = \int_U \mathrm{D}u^\varepsilon\cdot \mathrm{D}u \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_U \mathrm{D}_i u^\varepsilon \mathrm{D}_i u \to 0\ (\varepsilon\to 0).$$

$\therefore$当$u=0$时，由上式可得$\mathrm{D}u = 0$ a.e. $\{x : u(x)=0\}$. □

第3次作业 (上交日期：2019年4月29日)

1.【5.12】请举例说明若$\forall 0<|h|<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(V,\partial U)$，$\|\mathrm{D}^h u\|_{L(V)}\leqslant C$，不一定有$u\in W^{1,1}(V)$.

【解】置$V=(0,1)$，$U=(-0.1,1.1)$，$u=\chi_{(0,\frac{1}{2})}$，则当$0<|h|<0.05$时，$\|\mathrm{D}^h u\|_{L^1(V)}=1$.

如果$u\in W^{1,1}(V)$，则$\mathrm{D}u(x)=0$ a.e. $x\in(0,1)$，从而$\forall\phi\in C_0^\infty(V)$，

$$0=\int_V u\mathrm{D}\phi \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \phi'(x)\mathrm{d}x = \phi(\frac{1}{2})，矛盾！$$

2.【5.13】请举例说明对于开集$U\subset\mathbb{R}^n$和$u\in W^{1,\infty}(U)$，u不是U上的Lipschitz函数.

【解】置$U=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):x\geqslant 0\}$，$u=x^2\chi_{\{(x,y)\in U:x,y>0\}}$，则$u$在$U$上连续可微.

注意到$\mathrm{D}u=(2x,0)\chi_{\{(x,y)\in U:x,y>0\}}$，故$u\in W^{1,\infty}(U)$. 但是考察$\forall\delta>0$：

$$\mathrm{Lip}(u)\geqslant \limsup_{\delta\to 0^+}\frac{u(\frac{1}{2},\delta)-u(\frac{1}{2},-\delta)}{2\delta} = \limsup_{\delta\to 0^+}\frac{1}{8\delta}=+\infty，故u不是\text{Lipschitz}函数.$$

【注】这里举的是连通集U的例子，如果允许U不连通，那么例子更容易举出：比如$U=B_1(0)\backslash([-1,1]\times\{0\})$，$u$在两个连通分支取不同常数即可.

3. 【5.15】设$U=B_1(0)$，$u\in H^1(U)$. 证明：当$m(\{x\in U:u(x)=0\})=\alpha>0$时，存在只依赖于$n$和$\alpha$的常数$C$，使得$\int_U u^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_U |\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$.

【证明】由Poincarè不等式：$\exists C_1(n)>0$，使得$\int_U |u-(u)_U|^2\mathrm{d}x\leqslant C_1\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$.

记$E=\{x\in U:u(x)=0\}$，则$\int_U|u|^2\mathrm{d}x=\int_U|u-(u)_U|^2\mathrm{d}x+m(U)(u)_U^2$

$$\leqslant C_1\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{m(U)}\left(\int_{U\backslash E}|u|\mathrm{d}x\right)^2 \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} C_1\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x+\frac{m(U\backslash E)}{m(U)}\int_U|u|^2\mathrm{d}x$$

$\therefore \exists C(n,\alpha)=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}C_1(n)}{\alpha\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$，使得$\int_U|u|^2\mathrm{d}x\leqslant C(n,\alpha)\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$. □

4.【5.20】使用Fourier变换方法证明：若$s>\frac{n}{2}$，$u\in H^s(\mathbb{R}^n)$，则$u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leqslant C(s,n)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

【证明】记$\mathcal{F}_s(x)=1+|x|^s$. 首先证明引理：Schwarz空间$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$在$H^s(\mathbb{R}^n)$中稠，其中

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n):\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,\ \|x^\alpha \mathrm{D}^\beta f(x)\|_\infty<+\infty\}.$$

由$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$在$L^2(\mathbb{R}^n)$中稠，故$\forall u\in H^s(\mathbb{R}^n)$，$\exists\{v_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，使得$\lim_{m\to\infty}\|v_m-\hat{u}\mathcal{F}_s\|_2=0$.

取$u_m=(v_m\mathcal{F}_s^{-1})^\vee$，则$\|u_m-u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}=\|v_m-\hat{u}\mathcal{F}_s\|_2\to 0\ (m\to\infty)$，引理得证.

回到本题. 取$\{u_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，使得$\|u_m-u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\to 0\ (m\to\infty)$. 因此$\forall x\in\mathbb{R}^n$，

$$|u_m(x)|=|(\hat{u}_m)^\vee(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}_m(y)|\mathrm{d}y\overset{\text{Hölder}}{\leqslant}\|\hat{u}_m\mathcal{F}_s\|_2\|\mathcal{F}_s^{-1}\|_2=\|u_m\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|\mathcal{F}_s^{-1}\|_2.$$

由于$s>\dfrac{n}{2}$，故$C(n,s):=\|\mathcal{F}_s^{-1}\|_2<+\infty$，进而$\|u_m\|_\infty\leqslant C(n,s)\|u_m\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

由于$\|\hat{u}_m\mathcal{F}_s-\hat{u}\mathcal{F}_s\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\to 0\ (m\to\infty)$，故存在$\{u_{m_k}\}\subset\{u_m\}$，使得$u_{m_k}\to u$ a.e. $\mathbb{R}^n$.

$\therefore \|u\|_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\|u_{m_k}\|_\infty\leqslant\limsup\limits_{m\to\infty}\|u_m\|_\infty\leqslant\lim\limits_{m\to\infty}C(n,s)\|u_m\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}=C(n,s)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. □

【注】本题通过Schwarz函数逼近的方法得到估计，一是因为$H^s(\mathbb{R}^n)$中的函数无法保证$(\hat{u}_m)^{\vee}(x)=u(x)$几乎处处成立，二是虽然$\hat{u}\in L^2(\mathbb{R}^n)$，但$L^2(\mathbb{R}^n)$中的函数无法直接使用Fourier变换的定义，还需要用$L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$函数逼近. 事实上，$L^2(\mathbb{R}^n)$中的函数即可满足$(\hat{u}_m)^{\vee}(x)=u(x)$，并且Fourier变换$\mathcal{F}$是$L^2(\mathbb{R}^n)$上的等距变换. 以上内容详情请参考调和分析有关资料.

5.【5.21】证明：若$u,v\in H^s(\mathbb{R}^n)$，$s>\dfrac{n}{2}$，则$uv\in H^s(\mathbb{R}^n)$，且$\|uv\|_{H^s}\leqslant C(n,s)\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}$.

【证明】$\|uv\|_{H^s}=\|\widehat{uv}\mathcal{F}_s\|_2=\|\hat{u}*\hat{v}\mathcal{F}_s\|_2=\left\|\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(y)\hat{v}(x-y)\mathcal{F}_s(x)\mathrm{d}y\right\|_{L_x^2}$.

下证引理：存在$C(s)$，使得$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$，$\mathcal{F}_s(x)\leqslant C(s)(\mathcal{F}_s(y)+\mathcal{F}_s(x-y))$.

①当$|x|\leqslant 2|y|$时，$\mathcal{F}_s(x)\leqslant 1+2^s|y|^s\leqslant 2^s\mathcal{F}_s(y)\leqslant C(s)(\mathcal{F}_s(y)+\mathcal{F}_s(x-y))$；

②当$|x|>2|y|$时，$3|x|^2-8|x||y|+4|y|^2>0$，故$|x|<2|x-y|$，从而$\mathcal{F}_s(x)<2^s\mathcal{F}_s(x-y)$.

回到本题. 应用引理，有：$\|uv\|_{H^s}\leqslant\|(\hat{u}\mathcal{F}_s)*\hat{v}\|_2+\|\hat{u}*(\hat{v}\mathcal{F}_s)\|_2\overset{\text{Young}}{\leqslant}\|u\|_{H^s}\|\hat{v}\|_1+\|\hat{u}\|_1\|v\|_{H^s}$.

由于$s>\dfrac{n}{2}$，故$C(n,s):=\|\mathcal{F}_s^{-1}\|_2<+\infty$，从而由Hölder不等式知结论得证. □

【注】如果Banach空间X上具有代数运算“$\cdot$”，使得$\exists C>0$，$\forall x,y\in X$，$\|xy\|\leqslant C\|x\|\|y\|$，那么我们总可以通过将范数的定义伸缩一个适当的倍数，使$C=1$，进而$(X,\|\cdot\|,\cdot)$成为了一个代数(Banach代数). 由本题知，$H^s(\mathbb{R}^n)$便是如此.

6.【6.1】考察$(\bigstar):-\Delta u+cu=0$和散度形式$(\bigstar\bigstar):-\operatorname{div}(a\mathrm{D}v)=0$，其中$a>0$.

(1)证明：如果u和$w>0$是$(\bigstar)$的解，则$v:=\dfrac{u}{w}$是在$a=w^2$情况下$(\bigstar\bigstar)$的解；

(2)反过来，证明：如果v是$(\bigstar\bigstar)$的解，则存在函数c，使得$u:=va^{\frac{1}{2}}$是$(\bigstar)$的解.

【证明】(1)$\operatorname{div}(a\mathrm{D}v)=\operatorname{div}(w\mathrm{D}u-u\mathrm{D}w)=w\Delta u-u\Delta w=cwu-cuw=0$.

(2)$\Delta u=\operatorname{div}(a^{\frac{1}{2}}\mathrm{D}v+\dfrac{1}{2}va^{-\frac{1}{2}}\mathrm{D}a)=\dfrac{1}{a}\left(\sqrt{a}\operatorname{div}(a\mathrm{D}v+\dfrac{1}{2}v\mathrm{D}a)-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(a\mathrm{D}v+\dfrac{1}{2}v\mathrm{D}a)\cdot\mathrm{D}a\right)$

$$\xlongequal{\operatorname{div}(a\mathrm{D}v)=0}\frac{v}{2a}(\sqrt{a}\Delta a-\mathrm{D}a\cdot\mathrm{D}\sqrt{a})=\frac{v\operatorname{div}(a^{-\frac{1}{2}}\mathrm{D}a)}{2}=v\Delta\sqrt{a}\text{，因此取}c=\frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\text{即可.}$$ □

7.【6.2】设$Lu=-\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_{x_i})_{x_j}+cu$. 证明：存在$\mu>0$，使得当$\forall x\in U$，$c(x)\geqslant-\mu$时，双线性型$B[\cdot,\cdot]$满足Lax-Milgram定理的条件.

【证明】①$B[u,v]=\displaystyle\int_U\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}u_{x_i}v_{x_j}+cuv\right)\mathrm{d}x\leqslant\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\|a^{ij}\|_\infty,\|c\|_\infty)\|u\|_{H^1(U)}\|v\|_{H^1(U)}$.

②$B[u,u]=\displaystyle\int_U\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}+cu^2\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_U(\theta|\mathrm{D}u|^2-\mu|u|^2)\mathrm{d}x$.

$\because u\in H_0^1(U)$，故由Poincarè不等式：$\exists C>0$，$\displaystyle\int_U|u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$. 取$\mu=\dfrac{\theta}{2C}$，则

$$B[u,u]\geqslant\frac{\theta}{2}\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{\theta}{4}\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x+\frac{\theta}{4C}\int_U|u|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{\theta}{4}\min\{1,\frac{1}{C}\}\|u\|_{H^1(U)}^2.$$ □

8.【6.3】称$u\in H_0^2(U)$是双调和方程$(\bigstar):\begin{cases}\Delta^2u(x)=f & \text{in } U\\ u(x)=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x)=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$的弱解，若

$$\int_U\Delta u\Delta v\mathrm{d}x=\int_U fv\mathrm{d}x\ (\forall v\in H_0^2(U)).$$

给定$f\in L^2(U)$，证明：双调和方程(★)存在唯一弱解.

【证明】定义$B[u,v]=\int_U \Delta u\Delta v\mathrm{d}x$，它是$H_0^2(U)$上的双线性型. 只需验证满足Lax-Milgram定理：

①$B[u,v]\leqslant\|\Delta u\|_2\|\Delta v\|_2\leqslant\|u\|_{H^2}\|v\|_{H^2}$.

②由第一次作业6注：$B[u,u]=\|\Delta u\|_2^2=\|\mathrm{D}^2u\|_2^2$. 考察Poincarè不等式：$\exists C>0$，使得

$$\int_U|\mathrm{D}(\mathrm{D}_iu)|^2\mathrm{d}x\geqslant C\int_U|\mathrm{D}_iu|^2\mathrm{d}x\ (\forall i=1,\cdots,n).$$

$\therefore$对i求和，得：$\int_U|\mathrm{D}^2u|^2\mathrm{d}x\geqslant C\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$. 同样地，$\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x\geqslant C\int_U|u|^2\mathrm{d}x$，因此

$$B[u,u]\geqslant\frac{1}{3}\|\mathrm{D}^2u\|_2^2+\frac{C}{3}\|\mathrm{D}u\|_2^2+\frac{C^2}{3}\|u\|_2^2\geqslant\frac{\min\{1,C^2\}}{3}\|u\|_{H^2}^2.\quad\square$$

9.【6.4】设U是连通集，称$u\in H^1(U)$是Neumann问题(★)$:\begin{cases}-\Delta u(x)=f & x\in U\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x)=0 & x\in\partial U\end{cases}$的弱解，若

$$\int_U\mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v\mathrm{d}x=\int_U fv\mathrm{d}x\ (\forall v\in H^1(U)).$$

设$f\in L^2(U)$，证明：(★)存在弱解当且仅当$\int_U f\mathrm{d}x=0$.

【证明】①(充分性)取$v=1$即可.

②(必要性)定义$H=\left\{u\in H^1(U):\int_U u\mathrm{d}x=0\right\}$. 置$T\in(H^1(U))^*$，使$Tu=\int_U u\mathrm{d}x$.

则$H=T^{-1}(\{0\})$，从而H是$H^1(U)$的闭子空间，故H是Hilbert空间. 取$B[u,v]=\int_U\mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v\mathrm{d}x$.

容易验证，$B[u,v]$是H上的双线性型，且$\forall u\in H$，$(u)_U=0$，故由Poincarè不等式：

$$\exists C>0，使得\|u\|_{L^2(U)}^2=\int_U|u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x=CB[u,u].$$

由于左侧是范数的平方，因此$B[\cdot,\cdot]$具有正定性，故$B[\cdot,\cdot]$为H上的内积.

$\therefore$对于$f\in L^2\subset H^*$，$\exists u\in H$，使得$\forall v\in H$，$B[u,v]=(f,v)$. 此时，$\forall v\in H^1(U)$，

$$B[u,v]=B[u,v-(v)_U]\xlongequal{v-(v)_U\in H}(f,v-(v)_U)\xlongequal{f\in H}(f,v).\quad\square$$

10.【附1】设$1\leqslant p<\infty$，$u\in W_0^{1,p}(V_0)$，$V_0\Subset\mathbb{R}^n$，$V=\{x:\mathrm{dist}(x,V_0)<1\}$. 求证：对任意的$0<\varepsilon<1$，$\int_V|u^\varepsilon(x)-u(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_V|\mathrm{D}u|\mathrm{d}x$.

【证明】由于$V_0\Subset\mathbb{R}^n$，故V_0有界，从而取$\{u_m\}\subset C_0^\infty(V_0)$，使得$\lim\limits_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{W^{1,p}(V_0)}=0$.

注意到$\forall y\in B_1(0)$，$t\in(0,1)$，$x\in V_0$，则$x-\varepsilon ty\in V$，因此有：

$$\int_V|u_m^\varepsilon(x)-u_m(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{V_0}\int_{B_1(0)}\eta(y)|u_m(x-\varepsilon y)-u_m(x)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\varepsilon\int_{V_0}\mathrm{d}x\int_{B_1(0)}\mathrm{d}y\int_0^1\eta(y)|\mathrm{D}u_m(x-\varepsilon ty)|\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\int_V\mathrm{d}x\int_{B_1(0)}\mathrm{d}y\int_0^1\eta(y)|\mathrm{D}u_m(x)|\mathrm{d}t=\varepsilon\int_V|\mathrm{D}u_m|\mathrm{d}x.$$

由于V有界，故$\forall u\in L^p(V)$，$\|u\|_{1,V}\leqslant C(p,V)\|u\|_{p,V}$，从而

$$\int_V|u_m^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(x)-u_m(x)+u(x)|\mathrm{d}x\leqslant\|(u_m-u)^\varepsilon\|_{1,V}+\|u_m-u\|_{1,V}\leqslant2\|u_m-u\|_{1,V}\to0\ (m\to\infty).$$

此外，$\|\mathrm{D}u_m-\mathrm{D}u\|_{1,V}\leqslant C(p,V)\|\mathrm{D}u_m-\mathrm{D}u\|_{p,V}\to0\ (m\to\infty)$，因此结论得证. $\square$

【注】(1)在估计中，我们要用到类似于使用了中值定理的放缩，是需要u具有强导数的，因此这才是我们使用u的光滑逼近$\{u_m\}$的作用.

(2)当$u\in W_0^{k,p}(U)$的时候，我们可以通过零延拓的方式，看作$u\in W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$，这时，我们可以把$u$的光滑逼近看作$\mathbb{R}^n$上的光滑函数，且在$U$的外部恒为0. 如果只是$u\in W^{k,p}(U)$的情形下，我们作的零延拓是无法保证继续落在$W^{k,p}(U)$中，因此$u$的光滑逼近也只能局限在$U$上，无法确保外部为0(外部可能无法定义). 特别地，这也

是u^ε为什么一般只能定义在U_ε上的原因.

11.【附2】$U = B_1(0)\cap\{x_n > 0\}$，$V = B_{\frac{1}{2}}(0)\cap\{x_n > 0\}$，$u\in W^{1,p}(U)$. 求证：$\forall 0 < |h| << 1$，$\displaystyle\int_V |\mathrm{D}_i^h u|^p\mathrm{d}x \leqslant \int_U |\mathrm{D}_i u|^p\mathrm{d}x\ (i=1,\cdots,n-1)$.

【证明】取$\{u_m\}\subset C^\infty(U)$，使得$\lim\limits_{m\to\infty}\|u_m-u\|_{W1,p(U)}=0$. 由$x\in V$，$|t|<1$，有$x+the_i\in U$，故

$$\int_V |\mathrm{D}_i^h u_m|^p\mathrm{d}x = \int_V \left|\frac{u_m(x+he_i)-u_m(x)}{h}\right|^p\mathrm{d}x \leqslant \int_V \mathrm{d}x\int_0^1 |\mathrm{D}_i u_m(x+the_i)|^p\mathrm{d}t \leqslant \int_U |\mathrm{D}_i u_m|^p\mathrm{d}x.$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_U |\mathrm{D}_i u_m|^p\mathrm{d}x = \int_U |\mathrm{D}_i u|^p\mathrm{d}x$显然成立，下证$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_V |\mathrm{D}_i^h u_m|^p\mathrm{d}x = \int_V |\mathrm{D}_i^h u|^p\mathrm{d}x$即可：

$$\begin{aligned}\int_V |\mathrm{D}_i^h u_m - \mathrm{D}_i^h u|^p\mathrm{d}x &\leqslant C(h,p)\left(\int_V |u_m(x+he_i)-u(x+he_i)|^p\mathrm{d}x + \int_V |u_m(x)-u(x)|^p\mathrm{d}x\right)\\ &\leqslant C(h,p)\|u_m-u\|_{p,U}^p \to 0\ (m\to\infty). \quad\square\end{aligned}$$

第4次作业 (上交日期：2019年5月27日)

1.【6.5】解释如何定义$u\in H^1(U)$为Robin边界条件的Poisson方程

$$\begin{cases}-\Delta u = f & \text{in } U\\ u+\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$

的弱解，并讨论给定$f\in L^2(U)$的弱解存在唯一性.

【证明】先考察一切函数具有充分好的光滑性的情况下：

$$\int_U -\Delta u v\mathrm{d}x = \int_U \mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v\mathrm{d}x - \int_U v\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S = \int_U \mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v\mathrm{d}x + \int_U uv\mathrm{d}S.$$

因此，定义$u\in H^1(U)$是弱解，如果$\forall v\in H^1(U)$，有$B[u,v]=(f,v)$，其中

$$B[u,v]=\int_U \mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v\mathrm{d}x+\int_U TuTv\mathrm{d}x,\ (f,v)=\int_U fv\mathrm{d}x.$$

①由迹定理，$|B[u,v]|\leqslant\|\mathrm{D}u\|_2\|\mathrm{D}v\|_2+\|Tu\|_2\|Tv\|_2\leqslant C\|u\|_{H^1(U)}\|v\|_{H^1(U)}$显然成立.

②假设$\forall k\in\mathrm{N}^*$，$\exists\{u_k\}_{k=1}^\infty$，$\|u_k\|=1$，且

$$B[u_k,u_k]=\int_U |\mathrm{D}u_k|^2\mathrm{d}x+\int_{\partial U}|Tu_k|^2\mathrm{d}x<\frac{1}{k}\cdots(\bigstar).$$

由Rellich-Kondrachov紧性定理：$H^1(U)\subset\subset L^2(U)$，故存在$\{u_k\}$的子列(不妨仍记作$\{u_k\}$)收敛于$u\in L^2(U)$.

由($\bigstar$)知：$\|\mathrm{D}u_k\|_2\to 0\ (k\to\infty)$. 因此，$\forall\phi\in C_0^\infty(U)$，

$$\int_U u\mathrm{D}\phi\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_U u_k\mathrm{D}\phi\mathrm{d}x=-\lim_{k\to\infty}\int_U \mathrm{D}u_k\phi\mathrm{d}x=0$$

则$\mathrm{D}u=0$，故$u=c$. 同样由($\bigstar$)，有：$\|Tu_k\|_2\to 0\ (k\to\infty)$，进而$c=0$.

$\therefore \|u_k\|_{H^1(U)}\to 0\ (k\to\infty)$，而这与$\|u_k\|_{H^1(U)}=1$矛盾！ $\square$

2.【6.6】设U是连通集，$\partial U=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，其中$\Gamma_1,\Gamma_2$是不交闭集. 请定义Dirichlet-Neumann混合边界的Possion方程的弱解，并讨论弱解的存在唯一性：

$$\begin{cases}-\Delta u = f & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \Gamma_1\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 & \text{on } \Gamma_2\end{cases}.$$

【证明】记$W=\{u\in H^1(U): Tu=0,\ x\in\Gamma_1\}$，定义$u\in W$为弱解，如果$\forall v\in W$，

$$B[u,v]=\int_U \mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v\mathrm{d}x=\int_U fv\mathrm{d}x=(f,v).$$

它的弱解存在性与零边值Dirichlet问题的讨论完全一样，此处省略. □

3.【6.7】设$u\in H^1(\mathbb{R}^n)$具有紧支集，且是半线性方程$-\Delta u+c(u)=f$的弱解，其中$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$，$c\in C^\infty(\mathbb{R})$为凸函数，且$c'\geqslant 0$. 证明：$u\in H^2(\mathbb{R}^n)$.

【证明】由弱解定义，$\forall v\in H_0^1(\mathbb{R}^n)$，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\big(\mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v+c(u)v\big)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}fv\mathrm{d}x$.

取$0<|h|<<1$，$v=-\mathrm{D}_k^{-h}\mathrm{D}_k^h u\in H^1(\mathbb{R}^n)$，则弱解等式左侧为$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{D}\mathrm{D}_k^h u|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{D}_k^h c(u)\mathrm{D}_k^h u\mathrm{d}x$.

由Lagrange中值定理：$\exists\xi\in\mathbb{R}^n$，$\mathrm{D}_k^h c(u)=c'(\xi)\mathrm{D}_k^h u$. 把它代入到左侧，有：

$$-\int_{\mathbb{R}^n}f\mathrm{D}_k^{-h}\mathrm{D}_k^h u\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{D}\mathrm{D}_k^h u|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}c'(\xi)|\mathrm{D}_k^h u|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{D}\mathrm{D}_k^h u|^2\mathrm{d}x.$$

利用均值不等式：$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|\mathrm{D}\mathrm{D}_k^h u|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\varepsilon\|\mathrm{D}_k^{-h}\mathrm{D}_k^h u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\varepsilon C\|\mathrm{D}\mathrm{D}_k^h u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$.

取$\varepsilon=\dfrac{1}{2C}$，则$\|\mathrm{D}\mathrm{D}_k^h u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$，进而$\mathrm{D}^2u\in L^2(\mathbb{R}^n)$，$u\in H^2(\mathbb{R}^n)$. □

4.【6.8】设u是U上的一致椭圆方程$Lu=-\displaystyle\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{ij}=0$，系数的导数有界. 置$v:=|\mathrm{D}u|^2+\lambda u^2$，证明：$\lambda$充分大时，$Lv\leqslant 0$，进而$\|\mathrm{D}u\|_{L^\infty(U)}\leqslant C(\|\mathrm{D}u\|_{L^\infty(\partial U)}+\|u\|_{L^\infty(\partial U)})$.

【证明】$Lv=-2\displaystyle\sum_{i,j}a^{ij}(\mathrm{D}_{ij}\mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}u+\mathrm{D}_i\mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}_j\mathrm{D}u+\lambda u_{ij}u+\lambda u_iu_j)\leqslant-2\theta|\mathrm{D}^2u|^2-2\lambda\theta|\mathrm{D}u|^2-2\sum_{i,j,k}a^{ij}u_{ijk}u_k$.

注意到$0=(\displaystyle\sum_{i,j}a^{ij}u_{ij})'_k=\sum_{i,j}a^{ij}_k u_{ij}+\sum_{i,j}a^{ij}u_{ijk}$，以及$a^{ij}$的导数有界，因此

$$Lv\leqslant-2\theta|\mathrm{D}^2u|^2-2\lambda\theta|\mathrm{D}u|^2+2\sum_{i,j,k}a^{ij}_k u_{ij}u_k\leqslant-2\theta|\mathrm{D}^2u|^2-2\lambda\theta|\mathrm{D}u|^2+\frac{C}{2\varepsilon}\sum_{i,j}|u_{ij}|^2+\frac{C\varepsilon}{2}\sum_k|u_k|^2.$$

取$\varepsilon=\dfrac{C}{4\theta}$，则在$\lambda$充分大的时候，$Lv\leqslant\left(\dfrac{C^2}{8\theta}-2\lambda\theta\right)|\mathrm{D}u|^2\leqslant 0$. □

5.【6.9】设u是$\begin{cases}Lu=-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{ij}=f & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$，其中$f$有界. 固定$x^0\in\partial U$，$w\in C^2(\overline{U})$为$x^0$处的闸函数，如果$Lw\geqslant 1$ in U，$w(x^0)=0$，$w\geqslant 0$ on ∂U. 证明：若w是x^0处的闸函数，则存在常数C，使得

$$|\mathrm{D}u(x^0)|\leqslant C\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}(x^0)\right|.$$

【证明】由弱极大值原理：$\min\limits_{\overline{U}}w=\min\limits_{\partial U}w=0=w(x^0)$. 置

$$v_1=u+\|f\|_\infty w,\ v_2=u-\|f\|_\infty w.$$

$Lv_1=Lu+\|f\|_\infty Lw\geqslant\|f\|_\infty+f\geqslant 0$，同理$Lv_2\leqslant 0$. 再由弱极大值原理：

$$\min_{\overline{U}}v_1=\min_{\partial U}v_1=\min_{\partial U}(u+\|f\|_\infty w)=\|f\|_\infty w(x^0)=v_1(x^0).$$

由于v光滑，故$\dfrac{\partial v_1}{\partial\nu}(x^0)\leqslant 0$，因此$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x^0)\leqslant-\|f\|_\infty\dfrac{\partial w}{\partial\nu}(x^0)$.

同理，$\dfrac{\partial v_2}{\partial\nu}(x^0)\geqslant 0$推出$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x^0)\geqslant\|f\|_\infty\dfrac{\partial w}{\partial\nu}(x^0)$.

又因为$u=0$ on ∂U，则$\mathrm{D}u$与ν平行，故$|\mathrm{D}u(x^0)|=\left|\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x^0)\right|\leqslant\|f\|_\infty\left|\dfrac{\partial w}{\partial\nu}(x^0)\right|$. □

6.【6.10】设U连通，使用(1)能量方法；(2)最大值原理来证明如下Neumann问题的光滑解必为常数：

$$\begin{cases}-\Delta u=0 & \text{in } U\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 & \text{on } \partial U\end{cases}.$$

【证明】(1)能量泛函：$I[u]=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$显然在$u$为常数时极小化；

(2)如果边界上的x^0处取极大值，则由Hopf引理：$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x^0)>0$，进而与0-Neumann边界矛盾. 所以极大值在

内部取得，因此由强极大值原理，u为常数. $\square$

7.【6.11】设$u\in H^1(U)$是$-\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_i)_j=0$的有界弱解，$\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是凸光滑函数，置$w=\phi(u)$. 证明：$w$是方程的弱下解，i.e. $\forall v\in H_0^1(U)$，$v\geqslant 0$，有$B[w,v]\leqslant 0$.

【证明】对于$\forall v\in H_0^1(U)$，$v\geqslant 0$，$B[\phi(u),v]=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\int_U a^{ij}\phi'(u)u_iv_j\mathrm{d}x$.

由于$u\in H^1(U)$，$v\in H_0^1(U)$，$\phi\in C^\infty(U)$，故$\phi'(u)v\in H_0^1(U)$，从而

$$\begin{aligned}B[w,v]&=\sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{ij}u_i(\phi'(u)v)_j\mathrm{d}x-\sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{ij}\phi''(u)u_iu_jv\mathrm{d}x=-\sum_{i,j=1}^{n}\int_U a^{ij}\phi''(u)u_iu_jv\mathrm{d}x\\&\leqslant-\theta\sum_{i,j=1}^{n}\int_U\phi''(u)|\mathrm{D}u|^2v\mathrm{d}x\leqslant 0.\quad\square\end{aligned}$$

8.【附1】设H是Hilbert空间，$K:H\to H$紧，则$\dim N(I-K)=\dim N(I-K^*)$.

【证明】参见教材725页. $\square$

9.【附2】证明Hopf引理：设$u\in C^2(U)\cap C^1(\overline{U})$，且在$U$上$c\equiv 0$，$Lu\leqslant 0$. 除此之外，还存在$x^0\in\partial U$，使得$\forall x\in U$，$u(x^0)>u(x)$，且存在开球$B\subset U$，使得$x^0\in\partial U$，则

(1)$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x^0)>0$，其中$\nu$为$B$在$x^0$处的外法向导数；

(2)若在U上$c\geqslant 0$，$u(x^0)\geqslant 0$，则(1)依旧成立.

【证明】参见教材347页. $\square$

第5次作业 (上交日期：2019年6月10日)

1.【6.12】称一致椭圆算子$Lu=-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a^{ij}u_{ij}+\sum\limits_{i=1}^{n}b^iu_i+cu$满足弱极大值原理，如果$\forall u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$，

$$\begin{cases}Lu\leqslant 0 & \text{in } U\\ u\leqslant 0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$

推出$u\leqslant 0$ in U. 设存在$v\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$，使得$Lv\geqslant 0$ in U且$v>0$ on $\overline{U}$，证明：L满足弱极大值原理.

【证明】设$\forall u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$，$Lu\leqslant 0$ in U，$u\leqslant 0$ on ∂U，$w=\dfrac{u}{v}\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$. 假定$u>0$，考察

$$\sum_{i,j=1}^{n}-a^{ij}(v^2w_i)_j=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(u_iv-uv_i)_j=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(u_{ij}v-uv_{ij})\leqslant-\sum_{i=1}^{n}b^iv^2w_i.$$

因此，椭圆算子$Mw:=-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a^{ij}w_{ij}+\sum\limits_{i=1}^{n}(b^i-\dfrac{2}{v}\sum\limits_{j=1}^{n}a^{ij}v_j)w_i$，则$Mw\leqslant 0$.

$\therefore$由$c\equiv 0$的弱极大值原理：$\max\limits_{\overline{U}}w=\max\limits_{\partial U}w=\max\limits_{\partial U}\dfrac{u}{v}\leqslant 0$，又$v>0$，故$u\leqslant 0$ in U，矛盾！ $\square$

2.【6.13】(Courant极大值原理)设$L=-\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_i)_j$，其中$(a^{ij})$是对称的. 设算子$L$满足零边值条件，具有特征值$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots$. 证明：$\lambda_k=\max\limits_{S\in\Sigma_{k-1}}\min\limits_{\substack{u\in S^\perp\\ \|u\|_{L^2(U)=1}}}B[u,u]$，其中$\Sigma_{k-1}$表示所有$H_0^1(U)$的$(k-1)$维子空间.

【证明】考察紧算子$L^{-1}:L^2(U)\to L^2(U)$. 由Hilbert-Schmidt定理，可取$\{e_i\}_{i=1}^\infty$为关于λ_i^{-1}的特征向量，并为$L^2(U)$的一组标准正交基，因此$B[u,u]=(Lu,u)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i(u,e_i)^2$. 记$E_{k-1}$为$L^2(U)$的所有$(k-1)$维子空间.

显然，$\forall S\in E_{k-1}$，$\exists\mu_j$，s.t. $\sum\limits_{j=1}^{k}\mu_j^2=1$且$\sum\limits_{j=1}^{k}\mu_je_j\perp S$，此时有

$$\min_{\substack{u\in S^\perp\\ \|u\|_{L^2(U)=1}}} B[u,u]\leqslant B\left[\sum_{j=1}^{k}\mu_je_j,\sum_{j=1}^{k}\mu_je_j\right]=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\mu_j^2\leqslant\lambda_k.$$

$\therefore \lambda_k\geqslant \max\limits_{S\in E_{k-1}}\min\limits_{\substack{u\in S^\perp\\ \|u\|_{L^2(U)=1}}} B[u,u]\geqslant \max\limits_{S\in\Sigma_{k-1}}\min\limits_{\substack{u\in S^\perp\\ \|u\|_{L^2(U)=1}}} B[u,u]$.

反过来，取$S=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_{k-1}\}$，则$\forall u\in S^\perp$，设$u=\sum\limits_{i=k}^{\infty}a_ie_i$，$\|u\|_{L^2(U)}=1$，有

$$B[u,u]=\sum_{i=k}^{\infty}\lambda_i(u,e_i)^2=\sum_{i=k}^{\infty}\lambda_ia_i^2\geqslant\lambda_k\sum_{i=k}^{\infty}a_i^2=\lambda_k.$$

$\therefore \max\limits_{S\in\Sigma_{k-1}}\min\limits_{\substack{u\in S^\perp\\ \|u\|_{L^2(U)=1}}} B[u,u]\geqslant\lambda_k$，因而$\max\limits_{S\in\Sigma_{k-1}}\min\limits_{\substack{u\in S^\perp\\ \|u\|_{L^2(U)=1}}} B[u,u]=\lambda_k$. □

3.【6.15】考察一族光滑有界区域$U(\tau)\subset\mathbb{R}^n$，它们关于参数$\tau\in\mathbb{R}$是光滑的. 随着$\tau$的变化，$\partial U(\tau)$上的每一个点的变化速度为$\mathbf{v}$. 考察$\|w\|_{L^2(U(\tau))}=1$的特征值问题：

$$\begin{cases}-\Delta w=\lambda w & \text{in } U(\tau)\\ w=0 & \text{on } \partial U(\tau)\end{cases}$$

假设λ和w是τ和x的光滑函数，证明Hadamard变分公式：$\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=-\displaystyle\int_{\partial U(\tau)}\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|^2\mathbf{v}\cdot\nu\mathrm{d}S$.

【证明】$\lambda=\lambda\displaystyle\int_{U(\tau)}w^2\mathrm{d}x=-\int_{U(\tau)}w\Delta w\mathrm{d}x=\int_{U(\tau)}|\mathrm{D}w|^2\mathrm{d}x$.

$\therefore\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=\displaystyle\int_{\partial U(\tau)}|\mathrm{D}w|^2\mathbf{v}\cdot\nu\mathrm{d}S+\int_{U(\tau)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|\mathrm{D}w|^2\mathrm{d}x$. 先考察它的第二项：

$$\begin{aligned}&\int_{U(\tau)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|\mathrm{D}w|^2\mathrm{d}x=2\int_{U(\tau)}\mathrm{D}w\cdot\mathrm{D}w_\tau\mathrm{d}x=-2\int_{U(\tau)}w(\Delta w)_\tau\mathrm{d}x=2\int_{U(\tau)}w(\lambda w)_\tau\mathrm{d}x\\ =&2\lambda\int_{U(\tau)}ww_\tau\mathrm{d}x+2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\int_{U(\tau)}w^2\mathrm{d}x=\lambda\int_{U(\tau)}(w^2)_\tau\mathrm{d}x+2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\\ =&\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\int_{U(\tau)}w^2\mathrm{d}x\right)-\lambda\int_{\partial U(\tau)}w^2\mathbf{v}\cdot\nu\mathrm{d}S+2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}.\end{aligned}$$

注意到$w=0$ on $\partial U(\tau)$，故$|\mathrm{D}w|=\left|\dfrac{\partial w}{\partial\nu}\right|$，因此$\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=-\displaystyle\int_{\partial U(\tau)}\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|^2\mathbf{v}\cdot\nu\mathrm{d}S$. □

4.【7.1】证明下列Neumann边界的热方程至多具有唯一光滑解：

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=f & \text{in } U_T\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\}\end{cases}.$$

【证明】设u_1,u_2均为其光滑解，置$v=u_1-u_2$，则v满足方程：$\begin{cases}v_t-\Delta v=0 & \text{in } U_T\\ \dfrac{\partial v}{\partial\nu}=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ v=0 & \text{on } U\times\{t=0\}\end{cases}$.

$\therefore\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_U|v|^2\mathrm{d}x=\int_U vv_t\mathrm{d}x=\int_U v\Delta v\mathrm{d}x=\int_{\partial U}v\frac{\partial v}{\partial\nu}\mathrm{d}S-\int_U|\mathrm{D}v|^2\mathrm{d}x\leqslant0$.

$\therefore\forall t\geqslant0$，$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_U|v|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_U|v(x,0)|^2\mathrm{d}x=0$，即$v\equiv0$. □

5.【7.2】设u是方程$\begin{cases} u_t-\Delta u=0 & \text{in } U\times(0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0 & \text{on } \partial U\times[0,\infty) \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$的光滑解，证明指数衰减估计：

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(U)}\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}\ (t\geqslant 0)$$

其中$\lambda_1>0$是U上的零边值条件下算子$-\Delta$的主特征值.

【证明】类似上一道题，$\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2(U)}^2=-\displaystyle\int_U|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$. 对于$-\Delta$，$B[u,v]=\displaystyle\int_U \mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}v\mathrm{d}x$，因此

$$\lambda_1=\min_{\substack{v\in H_0^1(U)\\ \|v\|_{L^2(U)=1}}}B[v,v]=\min_{\substack{v\in H_0^1(U)\\ v\neq 0}}\frac{\|\mathrm{D}v\|_2^2}{\|v\|_2^2}\leqslant\frac{\|\mathrm{D}u\|_2^2}{\|u\|_2^2}.$$

$\therefore \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2(U)}^2\leqslant-\lambda_1\|u\|_{L^2(U)}^2$，i.e. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{2\lambda_1 t}\|u\|_{L^2(U)}^2)\leqslant 0$，因此$\mathrm{e}^{2\lambda_1 t}\|u\|_{L^2(U)}^2\leqslant\|g\|_{L^2(U)}^2$. □

6.【7.3】设u是方程$\begin{cases} u_t+Lu=0 & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$ 的光滑解，其中L是二阶一致椭圆算子，v是对偶问题

$$\begin{cases} v_t-L^*v=0 & \text{in } U_T \\ v=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ v=h & \text{on } U\times\{t=T\} \end{cases}$$

的光滑解. 证明：$\displaystyle\int_U g(x)v(x,0)\mathrm{d}x=\int_U u(x,T)h(x)\mathrm{d}x$.

【证明】取$(u,v)=(u,v)_{L^2(U)}$. 由于$(u_t,v)=(-Lu,v)=-(u,L^*v)=-(u,v_t)$，故$\dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}t}=0$，因此

$$(u(x,0),v(x,0))=(u(x,T),v(x,T))\text{，i.e. }\int_U g(x)v(x,0)\mathrm{d}x=\int_U u(x,T)h(x)\mathrm{d}x.\quad\square$$

7.【7.4】(Possion方程的Galerkin方法)设$f\in L^2(U)$，对于$k=1,\cdots,m$，$u_m=\displaystyle\sum_{k=1}^m d_m^k w_k$满足

$$\int_U \mathrm{D}u_m\cdot\mathrm{D}w_k\mathrm{d}x=\int_U fw_k\mathrm{d}x\cdots(\bigstar).$$

证明：存在$\{u_m\}_{m=1}^\infty$的子列，在$H_0^1(U)$中弱收敛到$\begin{cases} -\Delta u=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$的弱解.

【证明】在$(\bigstar)$式两边同时乘以d_m^k，并对k求和：$\displaystyle\int_U|\mathrm{D}u_m|^2\mathrm{d}x=\int_U fu_m\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_{L^2(U)}\|u_m\|_{L^2(U)}$.

由Poincarè不等式：$C\|u_m\|_{H^1(U)}^2\leqslant\|\mathrm{D}u_m\|_{L^2(U)}^2\leqslant\|f\|_{L^2(U)}\|u_m\|_{H^1(U)}$，因此，$\|u_m\|_{H^1(U)}\leqslant C\|f\|_{L^2(U)}$.

$\therefore\{u_m\}$在$H_0^1(U)$中有界，故存在子列，不妨仍记为$\{u_m\}$，使得

$$u_m\rightharpoonup u \text{ in } L^2(U)\ \text{且}\ \mathrm{D}u_m\rightharpoonup v \text{ in } L^2(U).$$

显然，在$\displaystyle\int_U|\mathrm{D}u_m|^2\mathrm{d}x=\int_U fu_m\mathrm{d}x$两侧令$m\to\infty$，可知$u$为方程的弱解. $\forall\phi\in C_0^\infty(U)\subset H_0^1(U)$，

$$\int_U\mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}\phi\mathrm{d}x=-\int_U u\Delta\phi\mathrm{d}x=-\lim_{m\to\infty}\int_U u_m\Delta\phi\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\int_U\mathrm{D}u_m\cdot\mathrm{D}\phi\mathrm{d}x=\int_U v\cdot\mathrm{D}\phi\mathrm{d}x$$

$\therefore v=\mathrm{D}u$，因此，存在$\{u_m\}$的子列在$H_0^1(U)$中弱收敛到该方程的弱解. □

8.【7.6】设H是Hilbert空间，$\mathbf{u}_k\rightharpoonup\mathbf{u}$ in $L^2(0,T;H)$. 又设$\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}_k(t)\|\leqslant C$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$，证明：

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(t)\|\leqslant C.$$

【证明】$\forall 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant T$，$v \in H$，$\int_a^b (v, \mathbf{u}_k(t))\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b C\|v\|\mathrm{d}x$，i.e. $\frac{1}{b-a}\int_a^b (v, \mathbf{u}_k(t))\mathrm{d}t \leqslant C\|v\|$.

由Lebesgue微分定理：$(v, \mathbf{u}_k(t)) \leqslant C\|v\|$ a.e. $t \in [0, T]$. 取$v = \mathbf{u}(t)$，则$(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_k(t)) \leqslant C\|\mathbf{u}(t)\|$.

又因为$\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u}$ in $L^2(0, T; H)$，故令$k \to \infty$：$(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \leqslant C\|\mathbf{u}(t)\|$，i.e. $\|\mathbf{u}(t)\| \leqslant C$ a.e. $t \in [0, T]$. □

第6次作业 (不上交)

1.【7.7】设u是方程$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = 0 & \text{in } U \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0, \infty) \\ u = g & \text{on } U \times \{t = 0\} \end{cases}$的光滑解，函数$c \geqslant \gamma > 0$. 证明指数衰减估计：

$$|u(x, t)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\gamma t} \ \ ((x, t) \in U_T).$$

【证明】置$v(x, t) = \mathrm{e}^{\gamma t}u(x, t)$，则$v_t - \Delta v + (c - \gamma)v = 0$. 由弱极值原理：

$$|v(x, t)| \leqslant \max_{\overline{U}_\infty} |v(x, t)| = \max_{\Gamma_\infty} |v(x, t)| = \|g\|_\infty.$$

$\therefore |v(x, t)| \leqslant \|g\|_\infty$，i.e. $|u(x, t)| \leqslant \|g\|_\infty \mathrm{e}^{-\gamma t}$. □

2.【7.8】假设u是7.7中方程的光滑解，$g \geqslant 0$，c有界(但不一定非负). 证明：$u \geqslant 0$.

【证明】取$\lambda > 0$，使得$c \geqslant -\lambda$. 置$v(x, t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}u(x, t)$，则$v_t - \Delta v + (c + \lambda)v = 0$.

由弱极值原理：$v(x, t) \geqslant \min_{\Gamma_\infty} |v(x, t)| = \min_{U} g(x) \geqslant 0$，i.e. $u \geqslant 0$. □

3.【7.10】设$d \geqslant 0$为常数. 证明：如下边界条件的电报方程至多存在一个光滑解：

$$\begin{cases} u_{tt} + du_t - u_{xx} = f & \text{in } (0, 1) \times (0, T) \\ u = 0 & \text{on } (\{0\} \times [0, T]) \cup (\{1\} \times [0, T]) \\ u = g, u_t = h & \text{on } (0, 1) \times \{t = 0\} \end{cases}.$$

【证明】假设v_1, v_2均为光滑解，则$v = v_1 - v_2$满足：$\begin{cases} u_{tt} + du_t - u_{xx} = 0 & \text{in } (0, 1) \times (0, T) \\ u = 0 & \text{on } (\{0\} \times [0, T]) \cup (\{1\} \times [0, T]) \\ u = 0, u_t = 0 & \text{on } (0, 1) \times \{t = 0\} \end{cases}.$

考察能量：$E(t) = \frac{1}{2}\|v_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v_x\|_2^2$，则

$$E'(t) = \int_0^1 (v_t v_{tt} + v_x v_{xt})\mathrm{d}x = \int_0^1 v_t(v_{tt} - v_{xx})\mathrm{d}x = -d\|v_t\|_2^2 \leqslant 0.$$

$\therefore E(t) \leqslant E(0) = 0$，因此$E(t) = 0$，进而$v \equiv 0$. □