复变函数·历年真题集

说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学复变函数(A/B)、复分析考试题.

2. 按照复变函数(A)、复变函数(B)、复分析进行排序，其次为时间先后.

3. 本附录的主要作用是供同学们考试之前模拟使用，越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.

4. 没有参考答案，希望读者自行思考，同时熟悉题目类型. 建议助教在考前习题课讲解对应的考试题.

5. 正值科大60周年校庆，亦为少年班成立40周年之际，谨以此真题集锦，献礼科大，也便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程.

6. 感谢杨光灿烂同学提供往年题目！感谢王昌煜助教录入题目！再次祝愿科大数学教育越办越好！

2018-2019秋季学期复变函数(A)助教

15级 少年班学院 理科试验1班 吴天

2018年12月 于合肥

欢迎拜访我的主页：http://home.ustc.edu.cn/~wt1997

再版说明

1. 本版增添了2019、2020年的复变函数试题，供同学们参考.

2. 感谢吴天助教曾经在复变函数课程中给予我的帮助！希望能有更多的同学未来也能担任助教，帮助更多学弟学妹（划掉）!

3. 感谢17级李明哲助教和18级刘炜昊助教提供和录入题目!

4. （话说有一点参考答案了来着）

2020-2021秋季学期复变函数(A)助教

17级 少年班学院 少年班 杨光灿烂

2020年10月 于合肥

试卷投稿、纠错、意见反馈欢迎联系我: sunny020303@163.com

最后修改日期: 2020 年 12 月 15 日

欢迎访问课程主页: 2020秋复变函数A 001505.00

2005-2006学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (20分=5分+5分+10分)计算.

   (1) 设$f(z)=\oint_{|t|=3}\dfrac{2t^2+5t+1}{t-z}\mathrm{d}t$, 计算$f'(2+\mathrm{i})$.

   (2) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^5+1}$.

   (3) $\oint_{\gamma}\dfrac{e^{\pi+z}}{z(1-z)^2}\mathrm{d}z$, 其中$\gamma$为不经过0, 1的简单闭曲线.

2. (8分)已知$A>1$, 试求Laurant级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}A^{-n}(z-1)^n$的收敛区域.

3. (8分)求$\dfrac{1}{1+z}$在$z_0=\mathrm{i}$处的Taylor展开式及其收敛半径.

4. (8分)试将$f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$在$4<|z-3|<+\infty$展成Laurant级数.

5. (8分)试求方程$4z^4+2z+9=0$在圆环$1<|z|<\dfrac{3}{2}$内根的个数. (附: 如果把$2z$改成2^z呢?)

6. (20分=10分×2) 用留数定理计算实积分.

   (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\sin ax\mathrm{d}x\ (a>0)$.　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}\ (a>1)$.

7. (10分)用拉氏变换解微分积分方程$\begin{cases}y'(t)-\mathrm{e}^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8. (10分)求一保形变换$w=f(z)$将圆盘区域$|z|<1$映为角形域$\dfrac{\pi}{3}<\arg w<\dfrac{2}{3}\pi$

9. (6分)若函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在复平面$\mathbb{C}$上解析, 且$u+v=2x^2-4xy+x-y-2y^2$. 试求$f(z)$.

10. (7分)设$f(z)$是一个整函数, 并且假定存在着一个正整数n, 以及两个正数R及M, 使得当$|z|\geqslant R$时, $|f(z)|\leqslant M|z|^n$, 试证: $f(z)$是个至多n次多项式或一常数.

2006-2007学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (10分)求$\dfrac{1}{z}$和$\dfrac{1}{z^2}$在$z=-1$处的Tayler展式, 并指出收敛半径.

2. (10分)设在$0<r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2<1$内有$f(z)=\displaystyle\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_2}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}-\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_1}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}$,
求$f(z)$在$r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2$内的解析表达式及其Laurant展开式.

3. (10分)计算$I=\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-1|^2}$

4. (10分)试求方程$z^6-3z^4+z^3-az=0$在圆环$1<|z|<2$内按重数计算的根个数, 其中$0<|a|<1$.

5. (20分=10分×2)用留数定理计算实积分(任选两题).
   (1)$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$
   (2)$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$ $(0<b<a)$
   (3)$\displaystyle\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)d\theta$ (a是实数且$a\neq 0$)

6. (10分)用拉氏变换解积分方程$y(t)-\mathrm{e}^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)(\tau-t)d\tau$.

7. (10分)
   (1)问$w=\dfrac{z+1}{z-1}$将有割痕$(-\infty,-1]$的单位圆外域映成了什么？
   (2)求保形变换$w=f(z)$将有割痕$(0,1]$的右半平面$\mathrm{Re}z>0$映为带形域$-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi$, $\mathrm{Re}(z)>0$.

8. (10分)设解析函数$f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$, 其中$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 试证明: $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}$.

9. (5分)假设$f(z)=\sqrt[3]{(z-1)^2(z+1)}$在$(-1,1)$的上边沿为正, 试求$f(\mathrm{i})$和$f(-\mathrm{i})$.

10. (5分)设$f(z)$在扩充平面上除去非本性奇点$z=z_0$外是单叶解析的, 则$f(z)$必是分式线性变换.

2007-2008学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (25分=5分×5)简答题.

(1)试在复平面上画出满足$|z|<1-\mathrm{Re}z$的点集的图形.

(2)设$f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$, 问: 复变函数$f(z)$在何处满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程.

(3)求下列值: (a) Ln i; (b) i^{i}.

(4)求下列函数$f(z)$的奇点(不包含∞)且指出其类型.如果是极点, 给出它的阶数:

(a)$f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}$

(b)$f(z)=\dfrac{1}{z^3(\mathrm{e}^{z^3}-1)}$

(5)设D是一个以正三角形为边界的有界区域, 而G为一个以椭圆为边界的有界区域, 问: 是否存在单叶解析函数$w=f(z)$将D映满G. (回答“存在”或“不存在”, 并且简要地给出理由.)

2. (10分)求一个解析函数$f(z)$, 使其实部为$u(x,y)=y^3-3x^2y$, 且满足$f(\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$.

3. (10分)设$0<a<b$, 求函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$在域$D:a<|z|<b$内的罗朗(Laurant)展开.

4. (25分=5分×5)计算题.

(1)$\displaystyle\int_{|z+3\mathrm{i}|=1}\frac{\cos z}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z$

(2)$\displaystyle\int_{|z+\mathrm{i}|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{1+z^2}\mathrm{d}z$

(3)$\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{3}}\sin\frac{1004}{z}\mathrm{d}z$

(4)$\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{z^{2007}}{z^{2008}-1}\mathrm{d}z$

(5)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x,\ \ (m>0,a>0)$

5. (10分)利用拉氏变换解微分方程: $\begin{cases}y''(t)+2y'(t)-3y(t)=\mathrm{e}^{-t},\\ y(0)=0;\ y'(0)=1.\end{cases}$

6. (7分)求一保形变换$w=f(z)$, 将半带域$D:-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Re}z<\dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{Im}z>0$映射为上半平面 $\mathrm{Im}w>0$.

7. (7分)求方程 $kz^4=\sin z$ $(k>2)$在圆$|z|<1$内根的个数.

8. (6分)设$f(z)$是在有界域D上解析的非常值函数, 并且在有界闭域$D+C$上连续, 其中C为D的边界. 如果存在实数a使得$|f(z)|=a$, $\forall z\in C$, 证明: 在D内至少存在一个点z_0使得$f(z_0)=0$.

2008-2009学年第一学期复变函数(A)期末试题

1. (24分=4分+8分+6分+6分)填空题.

(1)若幂函数$\sqrt{z}$取$\sqrt{1}=1$的分支, 则$\mathrm{Res}\left[\dfrac{z^2}{1-\sqrt{z}},1\right]=$ ____________.

(2)设$\sqrt[3]{z(1-z)^2}$在去掉线段[0,1]的区域内的某一单值分支为$f(z)$. 若f在$\dfrac{1}{2}$的上边沿的值是$\dfrac{1}{2}$, 则$f(2)=$ ____________, $f'(2)=$ ____________.

(3)设$f(z)=\displaystyle\oint_{|t|=3}\frac{t^2+t+1}{t-z}\mathrm{d}t$, 则$f'(2+\mathrm{i})=$ ____________.

(4)$\displaystyle\oint_{|z|=1.5}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z-2)^2}=$ ____________.

2. (8分)设u和v是解析函数$f(z)$的实部和虚部, 且$u+v=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2+3xy$, 其中$z=x+y\mathrm{i}$, $f(0)=0$. 试求$f(z)$.

3. (8分)试将$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$展开成Laurent级数, 其中$|a|<|b|$, a,b都是复数. 圆环域为

(1) $0<|a|<|z|<|b|$; (2) $|z|>|b|$.

4. (8分)设$f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-3)^2z^2(z+1)^3}$, 试指出它的不解析点的类型.

5. (8分)试求方程$2z^6-3z^3+2=0$在各个象限内根的个数.

6. (20分=10分×2)计算积分.

(1)$\displaystyle\oint_{0<|z|=r\neq 1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z-1}$.

(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\mathrm{d}x\ (a>0,\ b>0)$.

7. (8分)用拉普拉斯变换解方程.

$$\begin{cases} y'(t)-\mathrm{e}^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

8. (8分)求一分式线性变换$w=f(z)$将圆盘区域$|z-2\mathrm{i}|<2$映为圆盘区域$|w-2|<1$, 且满足条件$f(\mathrm{i})=2$, $\arg f'(\mathrm{i})=0$.

9. (8分)设$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$是不可约有理真分式函数, $a_k(k=1,\cdots,m)$是$Q(z)$的全部零点, 且其阶数为n_k. 试证明$f(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$, 其中$A_{ks}$为复常数.

2019-2020学年第一学期复变函数(A)期末试题

1.(39分)填空题(本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1)设$z=\dfrac{1+i}{1-i}$, 那么$z^{2019}+z^{2020}=$________________.

(2)$1^{\sqrt{3}}=$________________.

(3)若函数$f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+axy-x^2)$是复平面上的解析函数, 那么实常数$a=$________________.

(4)设$f(z)=\dfrac{\sin(z-5)}{z^3(z-5)^2}+e^{\frac{1}{z-i}}$, 给出$f(z)$的全体奇点（不包括$\infty$）, 并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）:____.

(5)$\operatorname{Res}\left(\dfrac{1-\cos z}{z^5},0\right)=$________________ ; $Res\left(z^2e^{\frac{1}{z-i}},i\right)=$________________.

(6)设函数$f(z)$在$|z|<2$内解析, 并且$f(0)=1, f'(0)=2$, 那么$\int_{|z|=1}(z+1)^2\dfrac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=$___.

(7)设函数$f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z}$在0处的泰勒（Taylor）展开式为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 那么幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径$R=$________________.

(8)设函数$f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$, 那么$f(z)$在区域$0<|z-1|<+\infty$内的罗朗（Laurent）展开式为________________.

(9)设$z_0\in\mathbb{C}$, 函数$|e^z|$在闭圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le 1\}$上的最大值为________________.

(10)设$u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, 那么在右半平面$\{z\in\mathbb{C}:Re(z)>0\}$解析并以$u(x,y)$为它的实部的函数为$f(z)=$________________.

(11)对函数$f(t)$, 记$F(p)=L[f(t)]$为它的Laplace变换, 并且记$f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

a)设$f(t)$满足$\begin{cases}f''(t)-2f'(t)+f(t)=t-\sin t\\ f(0)=f'(0)=0\end{cases}$, 那么$F(p)=$________________ .

b)$L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2-p)(p-2)}\right]=$______________ .

2.(30分)计算题(本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1)求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^n$的和函数, 并且计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$.

(2)计算积分$\int_{|z|=3}\dfrac{z+\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z$.

(3)计算积分$\int_C\dfrac{z\cos^2\frac{1}{z}}{1-z}\mathrm{d}z$,其中$C:|z-\frac{1}{2}|+|z+\frac{1}{2}|=3$.

(4)计算积分$\int_0^{2\pi}\left|\dfrac{1}{(2-e^{i\theta})^4}\right|\mathrm{d}\theta$.

(5)计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2+4)(x-1)}\mathrm{d}x$.

3.(31分)综合题

(1)(5分)设$f(z)$为定义在上半平面内的解析函数, 则$g(z)=\overline{f(\bar{z})}$为定义在下半平面上的复变函数, 请问: $g(z)$在下半平面上是否为解析函数？给出你的答案, 如果“是”, 给出证明;“否”, 举个反例.

(2)(5分)设$f(z)$为在区域D内解析的非常数值复变函数, C为D内的一条简单闭曲线, 它的内部包含在D内.证明: 对于任何复数A, $f(z)=A$在C的内部只有有限个解.

(3)(6分)设$f(z) = \dfrac{z\,(\sin z - z)}{(z^3+1)(z+1)^3}$，设$C : |z| = R > 0$为圆周，方向取正向，其中$R \neq 1$，试计算$\Delta_C arg f(z)$.

(4)(8分)求保形变换$\omega = f(z)$, 将区域$D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |z - \sqrt{3}i| < 2\right\}$映为区域$\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1\}$, 并且满足条件$f(\sqrt{3}i) = 0, f'(\sqrt{3}i) > 0$. (请画出必要的示意图)

(5)(7分)设$P_n(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!}$, A_n表示$P_n(z)$的n个零点模的最小值, 证明:

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = +\infty.$$

2003-2004学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (20分)填空.

(1) 设方程$z^3=\overline{z}$, 则$z=$____________.

(2) 求复对数的单值解析分支____________, 使得$\ln(-\mathrm{i})=\dfrac{3\pi}{2}\mathrm{i}$, 其辐角主值是____________.

(3) 设复函数$f(z)=x^4+\mathrm{i}y^2$, 则$f(z)$的可微点是____________. $f(z)$的解析点是____________.

(4) 计算积分$\displaystyle\int_{|z|=1,\mathrm{Im}z\geqslant 0}\overline{z}dz=$____________. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{(z+1)^3}dz=$____________.

(5) $\mathrm{Res}\Big(z^{-2}\sin^3\dfrac{1}{z},0\Big)=$____________. $\mathrm{Res}\Big(\dfrac{1-\cos 7z}{z^3},0\Big)=$____________.

2. (20分)

(1) 已知解析函数$f(z)$的虚部为$x+y$, 且$f(1)=\mathrm{i}$, 求$f(z)$.

(2) 判别方程$z^5-6z^3+2z^2+7=0$在圆环$2<|z|<3$内有多少个根.

3. (20分)

(1) 已知$f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}$, 求$f(z)$在$|z-1|<1$及$0<|z|<2$内的级数展开式.

(2) 设$f(z)$在$z=a$解析, $f(z)$在a点附近不恒为0, 而$f(a)=0$. 证明$z=a$为$f(z)$在a点的某个邻域内的唯一零点.

4. (20分)计算积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+2\cos^2\theta}$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z(z^2+4)}dz$

5. (20分)用拉氏变换解方程.

(1) $\begin{cases} y''(t)-y(t)=4\sin t \\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\cos t \\ y'(t)-y(t)+x(t)=0 \\ x(0)=0,\ y(0)=1 \end{cases}$

2006-2007学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (16分=2分×8)填空题. (写出复数的标准式$a+b$i或指数表示$re^{i\theta}$均可)

(1)$(1+\mathrm{i})^2=$ ____________　　(2)$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})^2}=$ ____________

(3)$\sin(1+\mathrm{i})=$ ____________　　(4)$\mathrm{ch}(1+\mathrm{i})=$ ____________

(5)$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})=$ ____________　　(6)$(1+\mathrm{i})^{\frac{3}{2}}=$ ____________

(7)$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=$ ____________　　(8)$\mathrm{Arc\ sh\ i}=$ ____________

2. (25分=5分×5)设$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)^4}$试求

(1) $f(z)$在环域$0<|z|<1$内的罗朗级数展开式.

(2) $f(z)$在环域$0<|z-1|<1$内的罗朗级数展开式.

(3) $f(z)$在环域$|z|>1$内的罗朗级数展开式.

(4) $f(z)$在$z=4$处的罗朗级数展开式.

(5) 求$\mathrm{Res}[f(z),0]$, $\mathrm{Res}[f(z),1]$, $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$.

3. (36分=6分×6)(1-4小题的闭路积分方向均沿逆时针).

(1)$\displaystyle\oint_{|z|=2}\overline{z}\mathrm{d}z$　　(2)$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z-\overline{z})}\mathrm{d}z$　　(3)$\displaystyle\oint_{|z|=2}z^2\mathrm{e}^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}z$

(4)$\displaystyle\oint_{|z|=10}\frac{\cos z}{\sin z}\mathrm{d}z$　　(5)$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{5-\cos\theta}\mathrm{d}\theta$　　(6)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x$

4. (8分)解析函数$f(z)$的实部为$\mathrm{Re}f(z)=x^2+y^2+2x+y$, 且$f(0)=0$, 求$\mathrm{Im}f(z)$, 并求$f'(1+\mathrm{i})$

5. (5分)若在$|z|\leqslant 1$上$f(z)$解析, 且在$|z|=1$上$|f(z)|<1$, 求证: 在$|z|<1$内存在唯一的点z_0, 使得$f(z_0)=z_0$.

6. (10分)利用拉普拉斯变换求初值问题.

$$\begin{cases} y''(t)+y'(t)-2y(t)=1\ (t>0) \\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

2007-2008学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (12分)求解下列方程:

(1) $z^3=1+\mathrm{i}$　　(2) $\mathrm{e}^z=3+4\mathrm{i}$　　(3) $\cos(2+z)=3$

2. (12分)已知复变函数$f(z)$解析, 实部$u(x,y)=x^3-3xy^2-y+1$, 且$f(0)=1$, 求虚部$v(x,y)$和$f'(0)$.

3. (15分=5分×3)已知$f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$.

(1)在$|z|<1$内把$f(z)$展为z的幂级数.

(2)在$0<|z-1|<3$上把$f(z)$展为罗朗级数.

(3)在$1<|z|<4$上把$f(z)$展为罗朗级数.

4. (36分=6分×6)求下列积分(其中凡闭路积分沿逆时针方向)

(1)$\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)(z-1)^2}\mathrm{d}z,\ C:|z|=3.$　　(2)$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\sin^2\theta}.$

(3)$\displaystyle\oint_C \frac{z-\sin z}{z^6}\mathrm{d}z,\ C:|z|=1.$　　(4)$\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^7-2z^4},\ C:|z|=1.$

(5)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+16}.$　　(6)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+2x+5)}\mathrm{d}x.$

5. (12分) 用Laplace变换的方法求解处值问题:

$$\begin{cases} y''-2y'+2y=t \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

6. (6分) 求方程$z^4+7z+1=0$在圆环$\dfrac{3}{2}<|z|<2$的根的个数, 并说明理由.

7. (7分) 设$f(z)$和$g(z)$区域D内解析, $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$是$D$内的一个点列, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\in D$, 如果对于任意的$k$, 都有$f(a_k)=g(a_k)$, 求证: 在$D$内恒有$f(z)=g(z)$成立.

2009-2010学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (6分=3分×2)

   (1) 若$e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{1+i}=a+bi$, 其中$a,b$为实数, 请求出$a,b$的值.

   (2) 若$1+\sin 2i=c+di$, 其中c,d为实数, 请求出c,d的值.

2. (9分=3分×3)求解以下复方程:

   (1)$z^4+2=0$ (2)$e^z=i$ (3)$2\cos z=3$

3. (9分)已知复变函数$f(z)$解析, 其实部$u(x,y)=x^2-y^2+2y$, 且$f(0)=i$, 求其虚部$u(x,y)$, 并求$f'(0)$.

4. (16分=6分+5分+5分)

   (1) 设$f_1(z)=\dfrac{1}{1-3z}, f_2(z)=\dfrac{z}{(1-3z)^2}$. 请把$f_1(z)$和$f_2(z)$在区域$|z|<\dfrac{1}{3}$展成$z$的幂级数.

   (2) 设函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z-6)}$. 在环域$3<|z|<6$内把$f(z)$展成$z$的罗朗级数.

   (3) 设$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$. 在区域$0<|z-2|<2$内把$f(z)$展为$z-2$的罗朗级数.

5. (21分=5分×3+6分)计算复积分.

   (1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-i}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=2}z^2(1+e^{\frac{1}{z}})dz$

   (3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^2(z-5)}$ (4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^5(2-z)}$

6. (18分=6分×3)计算定积分.

   (1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$

   (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx$

7. (16分=8分×2)利用拉普拉斯变换解微分方程:

   (1) $\begin{cases} y''(t)+y'(t)=2 \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y''(t)-2y'(t)+y(t)=te^{2t} \\ y(0)=1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$

8. (5分)记$C=\left\{z\middle||z|<R,R>0\right\}, H=\left\{z\middle||z|<R,0<\alpha<\arg z<\beta<\dfrac{1}{2}\pi\right\}$, 这样$H$为圆域$C$内的一个扇形区域, 设有复变函数$f(z)$在$C$内解析, 且在$H$内为常数. 求证: $f(z)$在C内必为常数.

2017-2018学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (30分)基础知识.

(1)求解以下复方程:

(a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 2017$　　　(b)$(z-3)^4 = 1$.

(2)已知调和函数$v(x,y) = 4x^2 + ay^2 + x$, 求常数a, 并求出以$v(x,y)$为虚部且满足$f(0) = 1$的解析函数$f(z)$.

(3)已知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nz^{n-1}}{2^n}$, 求收敛半径$R$, 并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

(4)已知$f(z) = z^3\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, 把$f(z)$在区域$0 < |z| < +\infty$展成Laurent级数.

(5)求$z^5 + 5z^2 + 2z + 1 = 0$在$1 < |z| < 2$的根的个数, 并说明理由.

2. (30分)计算以下复积分.

(1)$\displaystyle\int_0^{3\mathrm{i}}(2z+3z^2)\mathrm{d}z$　　(2)$\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-2\mathrm{i}}\mathrm{d}z$　　(3)$\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin 5z}{z^2}\mathrm{d}z$

(4)$\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z^4}\mathrm{d}z$　　(5)$\displaystyle\oint_{|z-3|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{|z|^2}|\mathrm{d}z|$

3. (14分)计算以下定积分.

(1)$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(5-4\cos\theta)^2}$　　(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x(x^4+1)}\mathrm{d}x$

4. (10分)利用Laplace变换解微分方程初值问题: $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = t\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 2017. \end{cases}$

5. (6分)设函数$f(z)$和$g(z)$在围道C及内部解析, $g(z)$在围道C上没有零点, 在C内$g(z)$有唯一的零点a. 已知$f(a) = p_1 \neq 0$, $f'(a) = p_2$, $f''(a) = p_3$. 而$g'(a) = 0$, $g''(a) = q_1 \neq 0$, $g'''(a) = q_2$, $g''''(a) = q_3$. 计算积分: $\displaystyle\oint_C\frac{f(z)}{g(z)}\mathrm{d}z$.

6. (10分)设$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ $(a_0 \neq 0)$的收敛半径$R > 0$.

(1)记$M(r) = \max\limits_{|z|\leqslant r}|f(z)|$ $(0 < r < R)$, 利用Cauchu积分公式证明: $|f^{(n)}(0)| \leqslant \dfrac{n!M(r)}{r^n}$.

(2)证明: 当$|z| < \dfrac{|a_0|r}{|a_0| + M(r)}$时, 函数$f(z)$无零点. (其中$r < R$)

2019-2020学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (10分)求解以下复方程:

(1)$z^3=-3\bar{z}(z\neq 0)$;　　(2) $\sin z=3$.

2. (7分) 已知解析函数$f(z)$的实部$u(x,y)=e^{\alpha y}\cos 3x+3x$, 其中$\alpha>0$且$f(0)=1$, 求常数$\alpha$, 并求出解析函数$f(z)$. (请用$z$表示函数$f(z)$)

3. (10分)

(1)把$f(z)=z^5e^z$在$z=0$展开成幂级数, 并指出收敛区域.

(2)把$g(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$在区域$0<|z-2|<2$展开成洛朗级数.

4. (36分=6分×6)计算复积分

$$(1)\int_0^{\pi i}\left(2019z^2-\cos z\right)\mathrm{d}z;\qquad (2)\int_{|z|=6}\left(2019z^2-\cos z\right)\mathrm{d}z;$$

$$(3)\int_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{z^2-8z+5}{z^3(z+2)(z-3)^2}\mathrm{d}z;\qquad (4)\int_{|z|=3}\frac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z}\mathrm{d}z;$$

$$(5)\int_{|z|=3}\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}\mathrm{d}z;\qquad (6)\int_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-i|^4}.$$

5. (14分=7分×2)求以下定积分

$$(1)\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{3-2\cos\theta}\mathrm{d}\theta;\qquad (2)\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin 4x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x.$$

6. (5分) 判断方程$z^9=8z^3+2z^2+z+2$在$1<|z|<5$的根的个数, 并说明理由.

7. (10分)利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y''+y=e^t\cos 2t,\\ y(0)=4, y'(0)=0.\end{cases}$$

8. (8分) 已知函数$f(z)$在$|z|\leq 1$内解析, 函数$g(z)$在$|z|\geq 1$解析, 且存在常数M, 使得在$|z|>1$时, $|g(z)|<M$. 证明以下算式成立:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-a}-\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi-a)}\right)\mathrm{d}\xi=\begin{cases} f(a)\ , & \text{当}|a|<1,\\ g(a)\ , & \text{当}|a|>1.\end{cases}$$

2019-2020学年第一学期复变函数(B)期末补考试题

1.(12分)求解以下复方程:

(1)$z^2-2019z+2018=0$;　　　　(2)$e^z=5+i$.

2.(12分)利用柯西-黎曼方程求以下函数的可微点:

(1)$f(z)=xy+iy$;　　　　(2)$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.

3.(30分=10分×3)计算复积分:

(1)$\int_0^{2i}(2019e^z-4\cos 4z)\,\mathrm{d}z$;

(2)$\int_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{(z-1)(z-8)^2}\mathrm{d}z$;

(3)$\int_{|z|=9}\dfrac{e^z}{16+z^2}\mathrm{d}z$;

(4)$\int_{|z|=2}\dfrac{z}{(z^4+1)\sin^2 z}\mathrm{d}z$;

(5)$\int_{|z|=2}\dfrac{e^z|\mathrm{d}z|}{|z-1|^4}$.

4.(14分)求以下定积分:

(1)$\int_0^{2i}\dfrac{1}{(10-8\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$;　　　　(2)$\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}\mathrm{d}x$.

5.(8分)利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y''-2y'+2y=te^t, \\ y(0)=1, y'(0)=2. \end{cases}$$

6.(24分=10分+7分+7分)

(1)设$f(z)=\dfrac{1}{\cos 2z}=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$, 请求出$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4$，并计算积分

$$\int_{|z-1|=2}\frac{2019}{z^5\cos 2z}\mathrm{d}z.$$

(2)计算积分方程

$$f(t)=\sin 2t+\int_0^t\sin 2(t-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

(3)设级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n$收敛，$|\arg c_n|\le\dfrac{\pi}{3}$，求证: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|c_n|$收敛.

2020-2021学年第一学期复变函数(B)期末试题

1. (10分) 将$f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$在$z=0$处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

2. (10分) 将$f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z}$在$1<|z+1|<+\infty$展开为洛朗级数.

3. (5分) 计算$(2020+i)(2-i)$.

4. (5分) 计算Arccos2.

5. (10分) 求a使得$v(x,y)=ax^2y-y^3+x+y$是调和函数, 并求虚部为$v(x,y)$且满足$f(0)=1$的解析函数$f(z)$.

6. (30分=6分×5) 求积分(所有路径均为逆时针)

(1)$\displaystyle\int_C(e^z+3z^2+1)dz, C:|z|=2, \mathrm{Re}z<0$;

(2)$\displaystyle\oint_C\frac{dz}{z(z-1)^2(z-5)}, C:|z|=3$;

(3)$\displaystyle\oint_C\frac{dz}{\sin z(z+6)(z-5)}, C:|z|=4$;

(4)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+5}dx$;

(5)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}$.

7. (10分) 求方程$z^8+e^z+6z+1=0$在$1<|z|<2$中根的个数, 并说明理由.

8. (10分) 利用拉氏变换解微分方程:

$$\begin{cases}y''+2y'+y=te^t,\\ y(0)=y'(0)=0.\end{cases}$$

9.(10分)设f是域$|z|>r>0$上的解析函数. 证明：如果对于$|a|>R>r$, $\lim\limits_{z->\infty}f(z)=f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz=0$$

.

2010-2011学年第二学期复分析期中试题

1. (15分)计算题.

(1) 设$u(x,y)=y^3-3x^2y$, 求$\mathbb{C}$上的全纯函数$f(z)$.使得$\mathrm{Re}f(z)=u$且$f(\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$.

(2) 求积分$I=\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$, $r\neq 1,2$.

2. (15分)求函数$f(z)=\sqrt[3]{\dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}$的所有支点, 一个单值域, 并求使得$f(3)=0$的单值解析分支在$z=\mathrm{i}$的值.

3. (15分)求将区域$\left\{z:|z|<1,\left|z-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right|>\dfrac{1}{2}\right\}$映到上半平面的单叶保角变换.

4. (15分)求证方程$z+\mathrm{e}^{-z}=a\ (a>1)$在$\mathrm{Re}z>0$内只有一个根, 且为实根.

5. (15分)若$f(z)$是$|z|<1$上的全纯函数, 且$|f(z)|<1$. 求证: $|f'(z)|\leqslant\dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$, $|z|<1$.

6. (10分)设$D=\{|z|<1\}$. 若$f(z)$是D上的函数, 且$f^2(z)$和$f^3(z)$都是D上的全纯函数. 求证$f(z)$是D上的全纯函数.

7. (15分=5分+10分)求证:

(1)若$f(z)$是$|z|<r$上的全纯函数, 则$|f(0)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\pi}r}\Big(\displaystyle\int_{|z|<r}|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}}$.

(2)若$f(z)$在$0<|z|<r$上全纯, 且$\displaystyle\int_{0<|z|<r}|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$. 则$z=0$是$f(z)$的可去奇点.

2014-2015年第二学期复分析(H)期末试题

1. (20分=10分×2)

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^3}{2z^2+1}\mathrm{d}z$　　　　(2) $a,b>0$, 求$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x$

2. (15分)求一个共形映射, 使$B(0,1)\bigcap\left\{\mathrm{Im}z>0\right\}\longmapsto B(0,1)$.

3. (15分)利用Rouché定理去证代数学基本定理.

4. (10分)设$f(z)$在$\mathbb{C}_\infty$上仅有一极点$z=1$, 其主要部分是$\dfrac{1}{(z-1)^2}$, $f(0)=1$, 求$f(z)$表达式, 并对$f(z)$在$1<|z|<+\infty$上作Laurant展开.

5. (10分)设$f\in H\big(B(0,1)\big)$, $f(0)=0$,求证: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f(z^n)$在$B(0,1)$绝对内闭一致收敛.

6. (10分)证明: 除掉线性函数之外, 不存在其它整函数使其反函数也是整函数.

7. (10分)设$f\in H\big(B(0,1)\big)\bigcap C\big(\overline{B(0,1)}\big)$, $|f(z)|=1,\forall z\in\partial B(0,1)$, 证明: f是有理函数.

8. (10分)设区域D关于实轴对称, f在D上全纯. 证明: 存在$f_1(z),f_2(z)\in H(D)$, 使$f(z)=f_1(z)+\mathrm{i}f_2(z)$, 且$f_1,f_2$在实轴上取得实值.

2015-2016年第二学期复分析期中试题

1. (20分=4分×5)判断下列命题的对错, 请直接及那个答案写在命题左侧的下划线上, 不要解答过程.

(1)____ $\mathbb{C}$中区域上的调和函数一定有共轭调和函数.

(2)____ 若函数$f(z)$在$\mathbb{C}$中的区域Ω上全纯, 在Ω的闭包上连续, 则对任何$z\in\Omega$有$|f(z)|\leqslant\sup\limits_{w\in\partial\Omega}|f(w)|$.

(3)____ 设f为有理函数, 且∞是f的一阶零点, 那么f在$\mathbb{C}$上的所有留数之和等于0.

(4)____ 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$的收敛半径等于1, 在单位圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$内定义出解析函数$f(z)$, 那么必有$z_0$, 使得$|z_0|=1$, 并且$f(z)$不能解析延拓到$z_0$的任何邻域上.

(5)____ 存在从上半平面$\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z>0\}$到$\mathbb{C}$的共形一一对应.

2. (24分)计算题, 要求有详细解答过程, 直接给出答案者不得分.

(1)求留数$\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\cdot z^5,0)$.

(2)利用留数定理计算积分$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x$.

(3)求$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$和$1<|z|<+\infty$的Laurant展开.

(4)设γ为闭曲线$z(t)=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t\in[0,2\pi]$, 计算积分$\displaystyle\int_{\gamma}\frac{z^9}{z^{10}-1}\mathrm{d}z$.

3. (16分)设$f(z)$为$\mathbb{C}$中的区域Ω上的解析函数, 且恒不为零, 证明: 实值函数$\log|f(z)|$为Ω上的调和函数.

4. (10分)方程$z^7-2z^5+2016z^3-z+1=0$在单位开圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$内共有多少个根？要求详细说明理由, 直接写出得数者不得分.

5. (10分)证明Weierstrass定理: 设解析函数列$\{f_n\}$在区域$\Omega\subset\mathbb{C}$上内闭一致收敛, 设k为任意正整数, 那么相应的k阶导函数列$\{f_n^{(k)}(z)\}$也在Ω上内闭一致收敛.

6. (10分)求从区域$\Omega=\{z\in\mathbb{C}:z\neq0, 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\}$到单位圆盘$\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}$的共形一一对应$w=f(z)$, 使得$f(\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}})=0$, 且$f'(\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}})>0$. 要求有详细解答过程, 直接写出答案者不得分.

7. (10分)设$f(z)$为单位开圆盘$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$上的解析函数, $|f(z)|\leqslant1$, 且f在$\mathbb{D}$内有两个不动点, i.e. 存在$z_1\neq z_2\in\mathbb{D}$, 使得$f(z_1)=z_1$, $f(z_2)=z_2$. 利用Schwarz引理证明: 在$\mathbb{D}$内$f(z)=z$.

8. (10分)设$f(z)$为上半平面$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z>0\}$上恒不为零的解析函数, 并且当$z\in\mathbb{H}$趋于实轴$\mathbb{R}$上的点时, $|f(z)|\to1$.

(1)证明$f(z)$可以延拓为整函数, 仍然记作$f(z)$.

(2)在(1)的条件下, 假设∞不是$f(z)$的本性奇点, 证明$f(z)$为常值函数.

9. (10分)设$\Omega=\{0<|z|<1\}$, 设f在Ω上全纯, 且$\displaystyle\iint_{\Omega}|f(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$. 证明: $z=0$是$f(z)$的可去奇点.

2016-2017年第二学期复分析期中试题

1. (2分)设$z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbb{R})$, 证明: $f(z)=\sqrt{xy}$在$z=0$处满足Cauchy-Riemann方程, 但$f(z)$在$z=0$处不可导.

2. (2分)设f是凸区域Ω上的全纯函数, 如果对每点$z\in\Omega$有$\mathrm{Re}f'(z)>0$, 则f是Ω上的单叶函数.

3. (4分=2分×2)

(1)若幂级数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径为$R=1$, 且在点$z=1$收敛到$s$, 则

(a)设$\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$且$A$为如下四条直线所围城的四边形区域$y=\pm\cot\theta_0\cdot x,\ y=\pm\tan\theta_0\cdot(x-1)$.则上述级数在区域$A$上一致收敛.

(b)$\lim\limits_{z\to1,z\in A}f(z)=s$.

(2)利用上述结论求和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$, 并详细说明推导理由.

4. (2分=1分×2)

(1)对任何$z_1,z_2\in\mathbb{D}$, 有$\left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right|\leqslant\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$.

(2)对任何$z_1\in\mathbb{D}$, 有$|f'(z_1)|\leqslant\dfrac{1-|f(z_1)|^2}{1-|z_1|^2}$.

5. (2分)设$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 试分别给出这个函数$D_1=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|1<|z|<2\right\}$和$D_2=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|2<|z|<\infty\right\}$上的Laurant展开式.

6. (2分)设$\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0<r_1<|z|<r_2<\infty\right\}$, f是Ω上的全纯函数且在$\overline{\Omega}$上连续, $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, 求证: 对任何$r\in(r_1,r_2)$, $\log M(r)\leqslant\dfrac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\dfrac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2)$.

7. (2分)利用留数定理计算积分(写清楚详细推导过程, 不得直接套用公式).

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{(1-x)^3}{x}}\mathrm{d}x$$

8. (2分)设$f(z)$是$\mathbb{D}=\left\{z\in\mathbb{C}\middle||z|<1\right\}$上的全纯函数, 实数列$\{x_n\}$满足$\lim_{n\to+\infty}x_n=0$, 且对任何$n\in\mathbb{N}$有$0<x_{n+1}<x_n<1$, 求证: 如果对任何$n\in\mathbb{N}$有$f(x_{2n+1})=f(x_{2n})$, 则$f(z)$是常值函数.