中国科学技术大学

博士学位论文

不变张量技术在微分方程解的分类中的应用

作者姓名：　　吴　天

学科专业：　　基础数学

导师姓名：　　麻希南　教授

完成时间：　　二〇二四年五月二十一日

University of Science and Technology of China

A dissertation for doctor's degree

Application of the invariant tensors technique in classification of solutions to differential equations

Author: Tian Wu

Speciality: Pure mathematics

Supervisor: Prof. Xinan Ma

Finished time: May 21, 2024

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：吴天　　　　　　签字日期：2024.5.21

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解密后也遵守此规定。

☑公开　□控阅（____年）

作者签名：吴天　　　　　　导师签名：[illegible]

签字日期：2024、5.21　　　　签字日期：2024.5.21

摘　要

微分恒等式是解决微分方程解的分类问题的一种重要方法，它能够成立的关键是寻找一个向量场，使其在满足方程的条件下散度非负，进而通过散度定理得到所有非负项均为 0，其中一般会包含能够得出解的分类的项. 即使流形非紧或者带边，也通常可以通过引入恰当的截断函数和合适的积分估计，得到想要的结果. 因此，寻找合适的向量场成为解决问题的关键.

通过经典问题的已有结果出发，笔者发现微分恒等式中必定会出现能够刻画方程本质的一类张量，该类张量在满足方程的情况下必须为 0，且在临界指标情形下，该类张量为 0 能够完全刻画方程. 在寻找该类张量的过程中，笔者发现张量的主项完全由方程主算子决定；余项的某些量纲一定同主项的相应量纲是一致的，即量纲守恒，而量纲取决于方程的其余部分. 在通过量纲分析确定好可能出现的项以后，既然希望该张量为 0，那么通过令该张量的微分依旧由这些张量组成，能够定出所有项的线性组合系数，即张量需要具有微分不变性，进而称这类张量为不变张量. 而整个确定不变张量的流程即为不变张量技术，通过该技术可以简洁而有效地得到期待的微分恒等式.

本文系统性地阐述了不变张量技术的理论与算法，通过不变张量技术给出若干类不同空间上的（次）临界指标方程解相应的微分恒等式，建立了解的分类问题研究的理论框架. 具体内容如下：

第1章介绍了 Sobolev 不等式、Yamabe 问题分别与（次）临界指标方程间的关系，并以闭 Riemann 流形上的（次）临界指标方程解的分类问题为例，将以不变张量技术为支撑的新方法同直接分部积分的旧方法进行对比，并应用不变张量技术得到了闭流形上的一般半线性方程的一类解的分类定理.

第2章使用不变张量技术解决了闭 CR 流形上关于次临界指标方程 Liouville 型定理的一个猜想，进而能给出闭 CR 流形上 Folland-Stein 不等式的一个更优的常数，并对临界指标方程解的分类及流形刚性给出新证明.

第3章介绍了 Heisenberg 群上的次临界指标方程解的分类定理，并使用不变张量技术结合 Serrin 技术给出新证明，同时针对临界指标方程，即 CR-Yamabe 方程，借助不变张量技术建立微分恒等式理论框架以回答 Jerison-Lee 于 1988 年提出的问题.

第4章使用传统的分部积分法给出了球面上 σ_k（次）临界指标方程解的分类结果，并在最后一章讨论了不变张量技术所面临的问题与挑战.

关键词：不变张量，解的分类，Liouville 型定理

ABSTRACT

The differential identity method is an important method for the classification of solutions to differential equations. The key is to find a vector field with non-negative divergence, thus all non-negative terms are 0 by the divergence theorem, which classifies the solutions. If the manifold is non-compact or with a boundary, the classification results can be obtained by introducing truncation functions and integration estimates. Hence, finding a suitable vector field becomes the key to classification problems.

Some classical results help the author find that there must be some characteristic tensors, which is 0 when satisfying the equation and fully characterize the equation in the critical exponent case. The main terms are completely determined by the main operator of the equation, and remainders can be determined by dimensional conservation, which depends on the rest part of the equation. By letting the differential of those tensors be composed by themselves since those tensors are expected to be 0, the coefficients of all terms can be determined. Those tensors are called invariant tensors. The invariant tensor technique is helpful to obtain desired differential identities effectively.

In this article, the theoretical framework and detailed algorithm of the invariant tensors technique are introduced systematically. The following works are finished:

In the first chapter, the relationships between Sobolev inequality, the Yamabe problem, and the (sub)critical exponent equation are introduced. The invariant tensors technique and the classical integrating by parts method are compared. Besides, a classification result of the semilinear equation on manifolds is established.

In the second chapter, we solve the conjecture of the subcritical exponent equation on the closed CR manifold and compute a better constant for the Folland-Stein inequality. A new proof for the rigidity in the critical exponent case is also given.

In the third chapter, we introduce the classification theorem of the subcritical exponent equations in the Heisenberg group and give a new proof by the invariant tensors technique. For the critical case, namely the CR Yamabe equation, we answer the question raised by Jerison-Lee in 1988 by establishing theoretical frameworks.

In the fourth chapter, a classification result on the σ_k (sub)critical exponent equation on the sphere is established. Difficulties of the invariant tensors technique are also discussed in the last chapter.

Key Words: invariant tensors, classification of solutions, Liouville-type theorem

目　　录

第 1 章　引言与不变张量技术

在微分方程解的研究中，存在性、正则性、唯一性是最重要的三个性质. 存在性告诉我们方程可解与否；正则性能得到解落在哪个函数空间中；唯一性能得到解的分类，甚至能将所有解析解写出来. 一般来讲，唯一性的建立需要存在性、正则性的帮助，并且唯一性通常是微分方程最难研究的性质. 然而一旦唯一性得到建立，此类微分方程将在某种意义上被彻底研究清楚. 值得注意的是，这里的唯一性并不意味着方程的解一定是唯一一个，即使能够证明方程的解只能落在某一个函数族中，我们也认为这得到了方程解的唯一性. 在后续行文中，我们用解的分类来指代解的唯一性.

研究解的分类的方法有很多. 对于形式较为特殊的一些微分方程，人们可以使用一些经典手段直接得到方程所有解的表达式，诸如首次积分、常数变易、特征线法、分离变量、Fourier 变换、基本解方法等. 然而对于大多数微分方程，我们无法用经典手段直接得到解的具体表达式，但是依旧有很多方法可以帮助研究唯一性，诸如：做差法、不动点法、连续性方法、单调性公式、微分恒等式、移动平面法等.

文献 [19] 通过微分恒等式的技巧对闭 Einstein 流形上 Yamabe 方程进行了解的分类. 在这篇文章中，M. Obata 借助 Bochner 型公式，给出了闭流形上 Yamabe 方程的正解满足的一个微分恒等式：

$$(v^{1-n}E_{ij}v^j),{}^i = v^{1-n}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2 + \mathscr{R},$$

其中的 $\mathscr{R}$ 为非负项，且仅在流形为球面或方程的解为常数时等于 0. 通过直接在闭流形上积分，并使用散度定理，可以得到 $E_{ij} \equiv 0$ 且 $\mathscr{R} = 0$，这会给出 Yamabe 方程解的具体表达式，并得到 Yamabe 方程的刚性.

通过上一段的例子可以发现，微分恒等式成立的关键是寻找一个向量场，使其在满足方程的条件下散度非负，进而通过散度定理得到所有非负项均为 0. 如果流形非紧或者带边，直接积分一般是无效的，此时通常需要引入恰当的截断函数和合适的积分估计.

本文通过引进不变张量技术，针对若干类不同空间上的（次）临界指标方程，借助不变张量寻找合适的微分恒等式，并建立解的分类定理，或对已有分类定理给出新证明. 而在这些工作之前，本章先介绍这些方程的研究背景，并通过实流形上的一个经典例子，初步给出不变张量技术的思路和框架，并与以前的方法进行对比.

1.1　记号与说明

在阅读本文任何一处内容之前，请务必仔细阅读本节.

在本文中，每个记号的定义默认在该章内是通用，而不会延续到下一章.

$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、$\mathbb{S}^n$、$\mathbb{H}^n$ 分别表示欧氏空间、复欧氏空间、$(n+1)$ 维欧氏空间上的单位球面、Heisenberg 群，并以 g_c 表示 $\mathbb{S}^n$ 上的典范度量. 记 $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. 纯虚数基本单位用 $\sqrt{-1}$ 表示，而不用 i 或者 i.

定义 Kronecker 符号 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.$\delta_{i\bar{j}}$ 的定义和 δ_{ij} 一致.

$C_x^k := \dfrac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (x - j)$ 为组合数，其中 $x \in \mathbb{R}$，$k \in \mathbb{N}$.

若 $a = (a_1, \cdots, a_n)$，那么 $\operatorname{diag} a$ 表示以 $a_1, \cdots, a_n$ 为对角元的对角矩阵.

$f \in C^k(A; B)$ 表示 f 为集合 A 到集合 B 的 k 次连续可微映射，如果 $B = \mathbb{R}$，一般会简记为 $f \in C^k(A)$.

$C(\cdot)$ 表示一个只依赖于 $\cdot$ 位置元素的正的常数，而且具有相同依赖性的 C 表示的数值可能不一定相同，使用这套记号能够忽略放缩过程中无关紧要的常数.

默认 $R > 1$，$B_R(x_0)$ 表示研究的度量空间上以 x_0 为中心、R 为半径的球，将 $B_R(0)$ 简记为 B_R. 如果积分号没有指定积分区域，则默认在该章研究的全空间上积分.

以 $f_{,i}$ 表示 f 的协变导数，欧氏空间上即为偏导数，Cauchy-Riemann 几何的协变导数请参考附录2.1. 为了方便，在书写 u 的协变导数时，会省略逗号.

在英语字母做角标的情况下，当在一项中同时出现，如无特殊说明，则自动表示对其从 1 到 n 求和，并省略求和符号，而希腊字母和数字角标不参与这项过程. 值得注意的是，在每一章，n 都表示空间的维数. 一些常见示例：

$$E_{ij} E_{ji},\ E_{i\bar{j}} u^i u^{\bar{j}},\ \sqrt{-1} u_{0i} u^i,$$

以上出现的类似情况均表示对 i, j 等英文字母指标从 1 到 n 求和.

称 $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ 是紧支的，如果其支集 $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ 是紧的，记作 $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. 事实上，此定义能类似地在任何一个光滑流形上给出，诸如闭流形、CR 流形、Heisenberg 群.

微分恒等式方法的关键一步，是在找到微分恒等式并两边积分之后运用散度定理，即进行分部积分. 由于在正文运用的过程中，没有涉及到边界项，因此给出适用于正文内容的非紧空间和紧空间的散度定理：在 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{H}^n$ 上，$f \in C^1$，$g \in C_0^1$，或闭（紧致无边）流形上，$f, g \in C^1$，则

$$\int f g_{,i} = -\int f_{,i} g.$$

在非紧的情形，通常需要引进截断函数作为测试函数，以帮助完成积分估计. 先考虑欧氏空间的情况，取

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ \exp\left(\dfrac{(|x|-1)^2}{1-(|x|-1)^2}\right), & 1<|x|<2,\\ 0, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

定义 $\phi(\frac{x}{R})$ 为支在 B_{2R} 上的标准截断函数，那么其满足的性质为：(1)$0\leqslant\phi\leqslant 1$；(2)$\operatorname{supp}\phi=\overline{B}_{2R}$；(3)$\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$；(4)$|\nabla^k\phi|\leqslant C(n)R^{-k}$，$k=0,1,2$.

类似地，将所有度量换成 Carnot-Caratheodory 度量，可以定义 Heisenberg 群上支在 B_{2R} 上的标准截断函数. 在正文中的所有 η 均满足上面叙述的四条性质.

设 $p,p'>1$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$，此时，有 Hölder 不等式成立：

$$\left|\int fg\right|\leqslant\left(\int|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

此外，当 $\varepsilon>0$ 时，有 ε-Young 不等式成立：

$$|ab|\leqslant\varepsilon a^p+C(p)\varepsilon^{-\frac{p'}{p}}b^{p'}.$$

当 $p=2$ 时，Hölder 不等式和 Young 不等式分别退化为 Cauchy 不等式和均值不等式. 以上这些不等式在做积分估计中尤为常用.

1.2　Sobolev 不等式与（次）临界指标方程

对于 $1<m<n$，$u\in W^{1,m}(\mathbb{R}^n)$，有著名的 Sobolev 不等式

$$\left(\int|u|^{m^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m^*}}\leqslant S(n,m)\left(\int|\nabla u|^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}.$$

其中 $m^*=\dfrac{mn}{n-m}$. 要得到最佳常数 $S(n,m)$，需要计算如下泛函的条件极值：

$$\sup\left\{\int|u|^{m^*}:\int|\nabla u|^m=1,\ u\in W^{1,m}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

在条件 $\displaystyle\int|\nabla u|^m=1$ 下，使用 Lagrange 乘子法计算变分. 任给 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，

$$\begin{aligned}0=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\left[\int|u+t\varphi|^{p+1}+L\left(\int|\nabla(u+t\varphi)|^m-1\right)\right]\\=&(p+1)\int|u|^{p-1}u\varphi+mL\int|\nabla u|^{m-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi,\end{aligned}$$

其中 $p = m^* - 1$. 注意到 φ 逼近 u 时，若上式成立，需要 $L < 0$. 于是根据弱解定义，得到 Euler-Lagrange 方程

$$\Delta_m u - \frac{p+1}{mL}|u|^{p-1}u = 0,$$

其中 $\Delta_m u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)$ 为 m-Laplace 算子. 通过正、负部分解，以及对 u 作恰当的伸缩，可以将该方程的讨论约化为

$$\Delta_m u + u^p = 0 \tag{1.1}$$

在 $p = m^* - 1$ 时的非负解. 而由弱 Harnack 不等式，该方程的非负上解要么是正的，要么恒为 0，因此只需考虑其正解即可. 称 $p = m^* - 1$ 为方程(1.1)的临界指标，$p < m^* - 1$ 为方程(1.1)的次临界指标. 如果将临界指标情形下方程(1.1)的解代入 Sobolev 不等式，即可得到最佳常数 $S(n, m)$.

当 $\lambda > 0$，$x_0 \in \mathbb{R}^n$ 时，考虑函数族

$$u_{\mu,x_0}(x) = \left(\frac{\lambda n(m_* - 1)^{-\frac{m-1}{m}}}{1 + |\lambda(x - x_0)|^{\frac{m}{m-1}}}\right)^{\frac{n-m}{m}}. \tag{1.2}$$

G. Talenti[25] 使用重排技术证明了 Sobolev 不等式的最佳常数 $S(n, m)$ 由(1.2)达到. M. Guedda、L. Véron[11] 证明了方程(1.1)的径向正解只能是(1.2). L. A. Caffarelli、B. Gidas、J. Spruck[3] 通过移动平面证明了方程(1.1)的正解在 $m = 2$ 时只能是(1.2). 在使用微分恒等式方面，欧乾忠 [21]、J. Vétois[26] 分别做出了相关工作，这些结果能在 m 具有一定下界的情况下得到方程(1.1)的正解只能是(1.2)，其中 m 的下界在 $n \to \infty$ 时等价于 $\frac{n}{3}$.

在次临界指标 $p < m^* - 1$ 情形，J. Serrin、H-H. Zou[23] 建立了相应的微分恒等式，得到了 Liouville 型定理，即方程(1.1)没有正解. 微分恒等式能够处理 $m - 1 < p < m^* - 1$ 的情形，而 $p \leqslant m - 1$ 的情形需要 Serrin 技术.

在 Heisenberg 群上相应地有 Folland-Stein 不等式，也可以通过对其做变分得到临界指标方程，当 $m = 2$ 时，它是 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上的半线性方程

$$\Delta_b u + u^\alpha = 0, \tag{1.3}$$

其中 $\alpha = 2^* - 1 = \dfrac{Q+2}{Q-2} = \dfrac{n+2}{n}$，$Q = 2n + 2$ 为齐性维数. D. Jerison、J. M. Lee[13] 得到如下解的分类定理.

定理 1.1 ([13] 推论 C)　当 $\alpha = \dfrac{n+2}{n}$ 时，若 $u \in L^{\frac{2n+2}{n}}(\mathbb{H}^n)$ 为方程(1.3)的正解，那么存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $\mu \in \mathbb{C}^n$ 满足 $\operatorname{Im}\lambda > \dfrac{|\mu|^2}{4}$，使得

$$u(z,t) = c_{n,\lambda,\mu}\left|t + \sqrt{-1}|z|^2 + z \cdot \mu + \lambda\right|^{-n}.$$

为了证明定理1.1，Jerison-Lee 使用计算机给出了三个线性无关的恒等式. 他们在文献 [13] 中提出了问题：是否存在一套理论框架能够找出合适的微分恒等式，以及针对方程(1.3)，是否合适的微分恒等式只能是上述三个恒等式的线性组合？在第3章将会借助不变张量技术，针对 Jerison-Lee 之问给出肯定的回答.

在次临界指标 $\alpha < \dfrac{n+2}{n}$ 情形，麻希南、欧乾忠 [18] 得到了 Liouville 型定理，这也将第3章中给出新证明.

定理 1.2 ([18] 定理 1.1)　若 $\alpha < \dfrac{n+2}{n}$，方程(1.3)没有正解.

注　在 $\mathbb{H}^n$ 上，对应于一般的 $1 < m < Q = 2n+2$ 且 $m \neq 2$，关于（次）临界指标方程解的分类的研究还没有任何结果，相应的 Folland-Stein 不等式的最佳常数问题也是公开问题.

在闭流形上，当 $m = 2$ 时会有如下形式的 Sobolev 不等式：

$$\int_M |\nabla u|^2 + \lambda \int_M |u|^2 \geqslant C(n,q) \left(\int_M |u|^q \right)^{\frac{2}{q}},$$

其中 $2 < q \leqslant 2^* = \dfrac{2n}{n-2}$. 通过计算变分，同样可以得到其 Euler-Lagrange 方程. 这里讨论 Cauchy-Riemann 流形（以下简称 CR 流形）的情况，实际上它和实 Riemann 流形的方程形式是一致的. 在闭 CR 流形上，Folland-Stein 不等式相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\Delta u - \lambda u + u^\alpha = 0. \tag{1.4}$$

其中的 α 相当于 Folland-Stein 不等式中的 $q-1$，因此 $1 < \alpha \leqslant 2^* - 1 = \dfrac{Q+2}{Q-2} = \dfrac{n+2}{n}$. 设 (M^{2n+1}, θ) 是一个可定向、严格拟凸、超曲面型的闭 CR 流形，其 Ricci 曲率和挠率满足如下逐点条件：

$$\mathrm{Ric}(Z,Z) \geqslant (n+1)\langle Z,Z\rangle_{L_\theta},\ \ \mathrm{Tor}(Z,Z) = 0,\ \ \forall Z \in T^{(1,0)}M. \tag{1.5}$$

在临界指标 $\alpha = \dfrac{n+2}{n}$ 情形，王晓东 [28][29] 证明了如下刚性定理.

定理 1.3 ([29] 定理 4)　当 $\alpha = \dfrac{n+2}{n}$ 且 $\lambda \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ 时，要么方程(1.4)的正解只有常数解 $\lambda^{\frac{n}{2}}$，要么 $\lambda = \dfrac{n^2}{4}$，(M^{2n+1}, θ) 等距同构于 $(\mathbb{S}^{2n+1}, \theta_c)$，此时存在 $s \geqslant 0$，$\xi \in \mathbb{S}^{2n+1}$，使得方程(1.4)的正解 u 满足

$$u(z) = c_{n,s} |\cosh s + (\sinh s)\langle z, \xi\rangle|^{-n},\ z \in \mathbb{S}^{2n+1}.$$

在次临界指标 $1 < \alpha < \dfrac{n+2}{n}$ 情形下，王晓东于文献 [29] 猜想 1 中提出了 λ 落在一定范围内，方程(1.4)的解只能为常数的猜想. 第2章将应用不变张量技术解决这个猜想，并将定理1.3给出新证明. 王晓东的猜想如下.

定理 1.4　若 $1 < \alpha < \dfrac{n+2}{n}$ 且 $\lambda \leqslant \dfrac{n}{2(\alpha-1)}$，方程(1.4)的正解只有 $\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

这个定理实际上给出了次临界指标情形下，Folland-Stein 不等式中 λ 更优的一个下界. 具体陈述为如下推论.

推论 1.5　设 (M^{2n+1},θ) 为可定向、严格拟凸、超曲面型的闭 CR 流形，满足条件(1.5)，那么对任意 $2<q<\dfrac{2Q}{Q-2}=\dfrac{2n+2}{n}$，$u\in HW^{1,2}(M)$，

$$\frac{4(q-2)}{Q-2}\int_M|\nabla_b u|^2+\int_M|u|^2\geqslant \mathrm{vol}(M)^{1-\frac{2}{q}}\left(\int_M|u|^q\right)^{\frac{2}{q}}.$$

等式取得当且仅当 u 为常数.

1.3　Yamabe 问题与 σ_k（次）临界指标方程

设 (M^n,g) 为闭 Riemann 流形，矩阵 A^g 由 $A^g=g^{-1}\widetilde{A}^g$ 给出, 其中 $\widetilde{A}^g$ 是(0,2)-型 Schouten 张量

$$\widetilde{A}^g=\frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}^g-\frac{1}{2(n-1)}\mathrm{R}^g g),$$

这里 Ric 和 R 分别是关于度量 g 的 Ricci 曲率张量和数量曲率. 从共形几何的角度来看，我们对 Schouten 张量的研究感兴趣，是因为它包含了关于曲率的所有共形信息，这可以从以下分解可以看出：

$$\mathrm{Rm}=W+\widetilde{A}^g\wedge g,$$

其中 $\wedge$ 是 Kulkarni-Nomizu 积，它被定义为

$$\begin{aligned}h\wedge k(X,Y,Z,W)=&h(X,Z)k(Y,W)-h(Y,Z)k(X,W)\\&-h(X,W)k(Y,Z)+h(Y,W)k(X,Z),\end{aligned}$$

W 是 Weyl 张量，它是共形不变的.

H. Yamabe 在 1959 年提出 Yamabe 问题，引起了广泛关注与研究. 我们关心衍生出来的 k-Yamabe 问题：给定闭 Riemann 流形 (M^n,g)，是否存在一个共形度量 $g_v=v^{-2}g$，使得 k-曲率 $\sigma_k(A^{g_v})$ 为常数？这里，k-曲率为 Schouten 张量 A^{g_v} 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 组成向量的 k 次基本对称多项式.

在欧氏空间上，k-Yamabe 问题对应于方程

$$\sigma_k(A^{g_v})=v^{\alpha},\ x\in\ \mathbb{R}^n,\tag{1.6}$$

在 $\alpha=0$ 的情形，其中 $v>0$，$g_v=v^{-2}|dx|^2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中局部共形平坦度量，A^{g_v} 为(1,1)-型 Schouten 张量. 在度量 g_v 下，Schouten 张量变成 $A^{g_v}=vD^2v-\dfrac{1}{2}|Dv|^2I$. 当 $k=1$ 时，令 $u^{\frac{4}{n-2}}=v^{-2}$、$1+\dfrac{n}{2}-\dfrac{n-2}{2}\beta=\alpha$，方程(1.6)可以化为

$$\Delta u+\frac{n-2}{2}u^{\beta}=0,\tag{1.7}$$

通过对 u 做恰当的伸缩，(1.7)可以化为(1.1)在 $m=2$ 的情形. B. Gidas、J. Spruck[8] 证明了(1.7)次临界指标 $\beta<\frac{n+2}{n-2}$ 情形下没有正解. L. A. Caffarelli、B. Gidas、J. Spruck[3] 利用移动平面法和 Kelvin 变换研究了(1.7)的临界指标 $\beta=\frac{n+2}{n-2}$ 情形，并得到了解的分类（即(1.2)在 $m=2$ 的情形）. 值得一提的是，在临界指标情形，A. S-Y. Chang、M. J. Gursky、P. C-P. Yang[4] 使用分部积分方法也做了研究，但 $n\geqslant 4$ 时需要加体积有限条件. 注意到临界指标 $\beta=\frac{n+2}{n-2}$ 对应于 $\alpha=0$，此时，如果 v 是方程(1.6)的正解，那么 $v^{-1}(x)=\frac{2S(n,k)b}{b^2+|x-x_0|^2}$，其中 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$b>0$；次临界指标 $\beta<\frac{n+2}{n-2}$ 对应于 $\alpha>0$，此时方程(1.6)无正解.

回到一般情形. 李岩岩、李敖兵 [15] 通过移动平面得到：当 $\alpha>0$ 时，方程(1.6)无正解；当 $\alpha=0$ 时，方程(1.6)的正解只能是二次多项式. 在使用分部积分方面，M. González[9] 研究了 $n\geqslant 2k+2$ 时的次临界指标 $\alpha>0$ 情形；欧乾忠 [20] 研究了 $n=2k+1$ 情形，他在处理临界指标 $\alpha=0$ 情形时的处理方式类似于 Chang-Gursky-Yang[4] 中处理 $k=2$ 的方式.

现在考虑闭 Riemann 流形 (M^n,g)，Schouten 张量

$$A=v\nabla^2v+\frac{1}{2}(\mu v^2-|\nabla v|^2)g.$$

研究 σ_k（次）临界指标方程

$$\sigma_k(A)=v^\beta, \tag{1.8}$$

其中 $\beta=0$ 为临界指标，此时 $\mu=1$ 对应于 σ_k-Yamabe 问题；$\beta>0$ 为次临界指标. 当 $k=1$ 时，$\sigma_1(A^{g_v})=\frac{1}{n-2}(\mathrm{R}^g-\frac{n\mathrm{R}^g}{2(n-1)})=\frac{\mathrm{R}^g}{2(n-1)}$，于是 1-Yamabe 问题即为经典 Yamabe 问题（详情请参考文献 [14]），相应的 Yamabe 方程为 $-\Delta_g u+\frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{R}^g u=\frac{n-2}{2}c_0u^{\frac{n+2}{n-2}}$，其中 c_0 是常数. 当 $k=1$ 时，依旧通过 $u^{\frac{4}{n-2}}=v^{-2}$，可以得到关于 u 的方程

$$\Delta u-\lambda u+u^p=0. \tag{1.9}$$

临界指标 $p=\frac{n+2}{n-2}$ 情形由 M. Obata 在文献 [19] 中研究，次临界指标 $1<p<\frac{n+2}{n-2}$ 情形由 M-F. B. Véron、L. Véron 在文献 [2] 中研究. 总结起来是如下定理.

定理 1.6 ([19] 命题 6.2、[2] 定理 6.1)　假定闭 Riemann 流形 (M^n,g) 满足 $\mathrm{Ric}-(n-1)g$ 半正定，$n\geqslant 3$，$1<p\leqslant\frac{n+2}{n-2}$，$\lambda\leqslant\frac{n}{p-1}$，那么方程(1.9)的正解要么只有常数，要么 $p=\frac{n+2}{n-2}$，$\lambda=\frac{n(n-2)}{4}$，且 $(M^n,g)=(\mathbb{S}^n,g_c)$，此时存在 $a\in\mathbb{S}^n$，$t\geqslant 0$，使得方程(1.9)的正解 u 满足

$$u(x)=\left(\frac{\sqrt{n(n-2)}}{2\cosh t+2\sinh t\cdot\langle a,x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

现在考虑 $k \geqslant 2$、$(M^n, g) = (\mathbb{S}^n, g_c)$ 的情形. 取 $\mathbb{S}^n$ 上局部幺正标架 $\{e_i\}_{i=1}^n$，此时 $g_{ij} = \delta_{ij}$，Schouten 张量 $A_{ij} = vv_{ij} + \frac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2)\delta_{ij}$. 通过借鉴文献 [9] 中的递推方法，我们得到了积分恒等式(4.13)，并据此得到 σ_k（次）临界指标方程的解的分类.

定理 1.7　若 v 是 $\mathbb{S}^n$ 上方程(1.8)的光滑正解，如果 $k < n$、$\beta > 0$、$\mu \leqslant 1$，或 $k < n$、$\beta = 0$、$\mu < 1$，则 v 是常数. 如果 $k < n$、$\beta = 0$、$\mu = 1$，则存在 $t \geqslant 0$，$a \in \mathbb{S}^n$，使得 $v(x) = S(n,k)^{-1}(\cosh t + \sinh t\langle a, x\rangle)$.

注　定理1.7的特殊情形 $k = 1$ 和 $\mu = 1$、$\beta \geqslant 0$ 分别已被 M. Obata [19] 和李岩岩 [16] 证明. 定理1.7的证明过程在从 $\mathbb{S}^n$ 推广到一般流形上的时候没有本质困难，因此定理1.7完全可以类比定理1.6的形式，推广到带有 Ricci 曲率正下界的闭 Riemann 流形上，并得到相应解的分类和流形的刚性.

当 $\beta = 0$、$\mu = 1$ 时，方程(1.8)回到了 σ_k-Yamabe 方程，它可以由 $\mathbb{R}^n$ 中的 σ_k-Yamabe 方程球极投影得到. 具体来讲，记

$$\phi(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n),\ \forall x \in \mathbb{S}^n$$

是 $\mathbb{S}^n$ 到 $\mathbb{R}^n_\infty$ 的球极投影，如果 $v(x)$ 满足 $\mathbb{S}^n$ 上 $\beta = 0$、$\mu = 1$ 时的方程1.8, 则 $u(y) = \dfrac{1 + |y|^2}{2} v \circ \phi^{-1}(y)$ 满足 $\alpha = 0$ 时的方程(1.6).

在 CR 流形上也有类似的 CR-Yamabe 问题，只要将数量曲率换成 Webster 数量曲率即可，这会导出方程(1.4)；如果将数量曲率换成 Q-曲率，即为 Q-Yamabe 问题，其相应于四阶方程；如果将数量曲率换成 σ_k 曲率，即为 σ_k-Yamabe 问题. 这种类似的问题还有很多，它们都被称作 Yamabe 型问题，并且在共形几何领域被广泛研究. 更多有关 Yamabe 问题、CR-Yamabe 问题的讨论与分析，请参考文献 [14][12].

1.4　旧方法：直接分部积分

从这一节开始，本章将在闭 Riemann 流形 (M^n, g) 上以（次）临界指标方程解的分类问题为例，通过对比直接分部积分法与不变张量技术，介绍不变张量的思想，并在最后给出一类较为一般的半线性方程解的分类定理.

记 Riemann 曲率张量为 $R_{i\ jk}^{\ l}$，于是协变导数交换公式为:

$$f_{,ijk} - f_{,ikj} = R_{i\ jk}^{\ l} f_{,l}.$$

记 Ricci 曲率张量 $R_{ij} = R_{i\ lj}^{\ l}$，$\Delta f = f_i^{\ i}$，$|\nabla f|^2 = f_i f^i$. 在导数交换公式中将 i 和 k 缩并，有：$f_{,ij}^{\ \ \ i} - (\Delta f)_{,j} = R_{ij} f^i$.

本节使用旧方法证明定理1.6. 旧方法的关键是在方程(1.9)两侧同时乘以某

些函数，并做分部积分. 注意到流形是闭的，因此在所有分部积分的过程中无边界项产生. 旧方法源自文献 [2][5].

定理1.6的旧证明　考虑在方程(1.9)两侧同时乘以 $u^\alpha \Delta u$，其中 α 是待定常数，那么

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

其中 $I_1 := \int u^\alpha (\Delta u)^2$，$I_2 := \int -\lambda u^{\alpha+1} \Delta u$，$I_3 := \int u^{\alpha+p} \Delta u$. 由散度定理，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \left[(u^\alpha \Delta u u_j)_,{}^j - (u^\alpha \Delta u)_{,j} u^j \right] = \int \left[-\alpha u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u - u^\alpha u_{ij}{}^i u^j + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \right] \\ &= \int \left[u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |u_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} u_{ij} u^i u^j - \alpha u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \right]. \end{aligned}$$

为了配方过程计算到最佳，引进 $E_{ij} = u_{ij} - \dfrac{\Delta u}{n} g_{ij}$，则

$$\sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^n |u_{ij}|^2 - \frac{1}{n} (\Delta u)^2.$$

将 u_{ij} 换做 E_{ij}，继续计算 I_1：

$$I_1 = \int \left[u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j - \frac{n-1}{n} \alpha u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \right] + \frac{1}{n} I_1,$$

于是可以解出

$$I_1 = \frac{n}{n-1} \int \left[u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j - \frac{n-1}{n} \alpha u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \right].$$

类似地，利用散度定理直接做分部积分，并代入方程(1.9)，得

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 =& \lambda(\alpha+1) \int u^\alpha |\nabla u|^2 - (\alpha + p) \int u^{\alpha+p-1} |\nabla u|^2 \\ =& \lambda(1-p) \int u^\alpha |\nabla u|^2 + (\alpha+p) \int u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u. \end{aligned}$$

考虑 $\dfrac{n-1}{n}(I_1 + I_2 + I_3) = 0$，于是

$$\begin{aligned} 0 = \int \Big[& u^\alpha \sum_{i,j=1}^n |E_{ij}|^2 + \alpha u^{\alpha-1} E_{ij} u^i u^j + \frac{n-1}{n} \lambda (1-p) u^a |\nabla u|^2 \\ & + \frac{n-1}{n} p u^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \Delta u + u^\alpha R_{ij} u^i u^j \Big] \end{aligned} \tag{1.10}$$

对 $\int u^{\alpha-1}|\nabla u|^2\Delta u$ 项做分部积分：

$$\begin{aligned}\int u^{\alpha-1}|\nabla u|^2\Delta u &= -\int \left[(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^4 + 2u^{\alpha-1}u_{ij}u^iu^j\right]\\ &= -\int \left[2u^{\alpha-1}E_{ij}u^iu^j + \frac{2}{n}u^{\alpha-1}|\nabla u|^2\Delta u + (\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^4\right],\end{aligned}$$

于是可以解出

$$\int u^{\alpha-1}|\nabla u|^2\Delta u = -\frac{n}{n+2}\int \left[2u^{\alpha-1}E_{ij}u^iu^j + (\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^4\right]. \tag{1.11}$$

将(1.11)代入(1.10)，得

$$\begin{aligned}0=\int \Bigg[&u^\alpha\sum_{i,j=1}^n|E_{ij}|^2 + \left(\alpha - \frac{2(n-1)}{n+2}p\right)u^{\alpha-1}E_{ij}u^iu^j\\ &- \frac{n-1}{n+2}p(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^4 + u^\alpha R_{ij}u^iu^j - \frac{n-1}{n}\lambda(p-1)u^\alpha|\nabla u|^2\Bigg].\end{aligned} \tag{1.12}$$

为了配方达到最佳，令 $L_{ij} = \dfrac{u_iu_j}{u} - \dfrac{1}{n}\dfrac{|\nabla u|^2}{u}g_{ij}$，则 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n|L_{ij}|^2 = \frac{n-1}{n}\frac{|\nabla u|^4}{u^2}$. 注意到 $E_i{}^i=0$，因此 $u^{\alpha-1}E_{ij}u^iu^j = u^\alpha E_{ij}L^{ij}$. 将(1.12)右端的前三项配方：

$$\begin{aligned}&u^\alpha\sum_{i,j=1}^n|E_{ij}|^2 + \left(\alpha - \frac{2(n-1)}{n+2}p\right)u^{\alpha-1}E_{ij}u^iu^j - \frac{n-1}{n+2}p(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^4\\ =&u^\alpha\sum_{i,j=1}^n\left|E_{ij} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{n-1}{n+2}p\right)L_{ij}\right|^2\\ &-\left[\frac{n-1}{n}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{n-1}{n+2}p\right)^2 + \frac{n-1}{n+2}p(\alpha-1)\right]u^{\alpha-2}|\nabla u|^4,\end{aligned}$$

其中 $u^{\alpha-2}|\nabla u|^4$ 项的系数为关于 α 开口向下的二次多项式：

$$\begin{aligned}&-\left[\frac{n-1}{n}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{n-1}{n+2}p\right)^2 + \frac{n-1}{n+2}p(\alpha-1)\right]\\ =&-\frac{n-1}{n}\left[\frac{\alpha^2}{4} + \frac{p\alpha}{n+2} + \frac{(n-1)^2}{(n+2)^2}p^2 - \frac{np}{n+2}\right],\end{aligned}$$

它在对称轴 $\alpha = -\dfrac{2p}{n+2}$ 处达到最大值 $\dfrac{n-1}{n+2}p\left(1-\dfrac{n-2}{n+2}p\right)$.

根据上述讨论，在(1.12)中取定 $\alpha = -\dfrac{2p}{n+2}$，那么(1.12)化为

$$\begin{aligned}0=\int \Bigg[&u^{-\frac{2p}{n+2}}\sum_{i,j=1}^n\left|E_{ij} - \frac{np}{n+2}L_{ij}\right|^2 + \frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4\\ &+u^{-\frac{2p}{n+2}}R_{ij}u^iu^j - \frac{n-1}{n}\lambda(p-1)u^{-\frac{2p}{n+2}}|\nabla u|^2\Bigg].\end{aligned} \tag{1.13}$$

注意到当 $p \leqslant \dfrac{n+2}{n-2}$、$\lambda \leqslant \dfrac{n}{p-1}$ 和 $R_{ij}-(n-1)g_{ij}$ 半正定这三个条件同时满足的情况下，(1.13)右侧第一项、第二项、第三项加第四项分别非负.

如果 $1<p<\dfrac{n+2}{n-2}$，对(1.13)在 M 上积分，得

$$0 \geqslant \frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)\int u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4,$$

其中 $u^{-\frac{2p}{n+2}-2}|\nabla u|^4$ 的系数为正，从而 u 为常数.

如果 $p=\dfrac{n+2}{n-2}$，$\lambda<\dfrac{n}{p-1}=\dfrac{n(n-2)}{4}$ 或 $R_{ij}-(n-1)g_{ij}$ 存在一点严格正定，对(1.13)在 M 上积分，得

$$0 \geqslant \int\left[u^{-\frac{2}{n-2}}R_{ij}u^iu^j-\frac{4(n-1)}{n(n-2)}\lambda u^{-\frac{2}{n-2}}|\nabla u|^2\right],$$

若 $|\nabla u|^2\neq 0$，上式矛盾，这迫使 u 为常数.

当 $p=\dfrac{n+2}{n-2}$、$\lambda=\dfrac{n}{p-1}$ 且 $R_{ij}=(n-1)g_{ij}$ 时，(1.13)化为

$$0=\int u^{-\frac{2}{n-2}}\sum_{i,j=1}^{n}\left|E_{ij}-\frac{n}{n-2}L_{ij}\right|^2.$$

因此 $E_{ij}=\dfrac{n}{n-2}L_{ij}$，由文献 [19] 中的讨论，可以得到流形的刚性 $(M^n,g)=(\mathbb{S}^n,g_c)$，以及正解的分类. ∎

注　不难看出，证明可以覆盖 $0\leqslant p\leqslant 1$ 的情形，此时，对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，方程(1.9)都是有 Liouville 型定理的. 然而就笔者知识范围内所知，这种情形是没有相应的几何或不等式意义的，它只是一个方程本身推广出的问题.

1.5　新方法：不变张量

经过上一节的讨论可以得知，微分恒等式中向量场的关键在于 $E_{ij}-\dfrac{np}{n+2}L_{ij}$ 这个张量，下面从新的观点分析这个张量是如何得到的.

目标是通过寻找向量场，建立其散度等于一些非负项之和的微分恒等式，进而帮助得到解的分类，而这其中要用到分部积分的手段. 通过在方程(1.9)两侧同时乘以 $u^\alpha\Delta u$ 并分部积分后，很容易得到张量 u_{ij} 的模长平方，因此所需张量 E_{ij} 须以 u_{ij} 为主项.

如果在整个分部积分的计算过程中，遇到 u^p 就使用方程(1.9)将它换成另外两项，并且将 λ 视作带有二阶导数的量，那么整个计算过程中，所有项的 u 的次幂、导数阶数和张量阶数一定是恒定的. 因此在这个问题中，将含有的 u 的次幂、导数阶数和张量阶数称作一个张量的量纲. 如果一个恒等式的每一项的量纲

相同，那么也将这个量纲叫做这个恒等式的量纲. 在不同的问题中，量纲可能是不同的，而量纲一定是在寻找恒等式的过程中守恒的量，因此这个现象叫做**量纲守恒**，而借助量纲守恒现象寻找可能的向量场的过程叫做量纲分析.

针对方程(1.9)，做出量纲分析：由于希望证明目标张量 E_{ij} 为 0，那么至少需要产生 $\sum_{i,j}|E_{ij}|^2$ 项，而这个项具有四阶导数，因此需要恒等式至少具有四阶导数. 然而，这里只是给出了恒等式导数的最低阶数，并不意味着一定只能是四阶，引入更高阶的导数可能在某些问题的处理上会有奇效.

对于张量 E_{ij} 本身，它的主项 u_{ij} 已经确定，因此它需要是一个具有一次 u 和二阶导数的一阶张量，进而余项也需要具有这个量纲. 最简单的选取方式有 $\frac{u_iu_j}{u}$、Δug_{ij}、$\frac{|\nabla u|^2}{u}g_{ij}$ 和 λug_{ij}，因此考察

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{u_iu_j}{u}+c_1\Delta_u g_{ij}+c_2\frac{|\nabla u|^2}{u}g_{ij}+c_3\lambda ug_{ij}.$$

其中 c,c_1,c_2,c_3 为待定常数. 注意到 Δu、$\frac{|\nabla u|^2}{u}$ 和 λu 项若线性相关，通过凑全微分和散度定理，u 只能为常数，因此我们在讨论过程中假设它们线性无关. 希望证明 E_{ij} 为 0，那么其迹 $E_i{}^i$ 必然为 0，这需要 $c_1=-\frac{1}{n}$，$c_2=-\frac{c}{n}$，$c_3=0$，于是

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{u_iu_j}{u}-\frac{1}{n}(\Delta u+c\frac{|\nabla u|^2}{u})g_{ij}.$$

现在需要确定 c. 由方程(1.9)可得 $(\Delta u)_j=\alpha\frac{\Delta u}{u}u_j-(p-1)\lambda u_j$，借此计算散度 $E_{ij,}{}^i$. 值得注意的是，讨论的主要对象是 E_{ij}，因此遇到 u_{ij} 就要换成 E_{ij}：

$$\begin{aligned}E_{ij,}{}^i=&\frac{n-1}{n}(\Delta u)_j+R_{ij}u^i+c\frac{\Delta uu_j}{u}+\frac{n-2}{n}c\frac{u_{ij}u^j}{u}-\frac{n-1}{n}c\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j\\=&\frac{n-2}{n}c\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n}(p+\frac{n+2}{n}c)\frac{\Delta u}{u}u_j\\&-\frac{n-1}{n}c(1+\frac{n-2}{n}c)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j.\end{aligned}$$

如果 E_{ij} 为 0，那么 $E_{ij,}{}^i$ 也为 0，若要 u 不是常数，必须相应项系数为 0：

$$\frac{n-1}{n}(p+\frac{n+2}{n}c)=0,\ -\frac{n-1}{n}c(1+\frac{n-2}{n}c)=0. \tag{1.14}$$

不难解得 $c=p=0$，或 $c=-\frac{n}{n-2}$，$p=\frac{n+2}{n-2}$. 显然后者对应于临界指标，但是前者并不对应，这是因为讨论过程中希望 E_{ij} 是 0 且 u 不是常数，不意味着这件事一定总会发生. 当然，分析到这里，已经得到了合乎几何或不等式意义的临界指标，说明张量 E_{ij} 的形式选取大概率是成功的.

当然，在次临界指标情形下，无法做到让(1.14)的两个式子同时成立，这就需要牺牲掉两个式子中的一个条件. 由于需要产生 $\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2$，在构建向量场时需要引入 u^j，即考察 $(E_{ij}u^j)_{,}{}^{i}$，这会使得(1.14)中的两个系数对应的项分别是 $\frac{|\nabla u|^2\Delta u}{u}$ 和 $\frac{|\nabla u|^4}{u^2}$，其中后者是贡献最终恒等式二次型中正定性的好项，前者是作为交叉项存在的，因此最直接的一个方法是令前者对应的系数为 0，故选取 $c=-\frac{np}{n+2}$，那么

$$E_{ij,}{}^{i}=-\frac{n-2}{n+2}p\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n+2}p(1-\frac{n-2}{n+2}p)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j.$$

在上述讨论过程中，E_{ij} 作为希望证明为 0 的张量，临界指标情形下它的微分（比如上面的散度）依旧有含有 E_{ij} 的项组成. 而次临界指标情形下，虽然会多出来一些其他项，但是这些项能够帮助得出 Liouville 定理（比如解是常数这种结论）. 从张量代数的角度来将，在临界指标情形下，E_{ij} 张成的张量代数是微分算子 ∇ 的不变子代数. 因此，E_{ij} 是一种具有微分不变性的张量，我们称其为**不变张量**，而寻找这些张量的方法被称作**不变张量技术**.

到现在为止，针对(1.9)的量纲分析和不变张量技术已经完成，下面将整理出定理1.6的新证明.

定理1.6的新证明　取 c 为待定常数，考察

$$E_{ij}=u_{ij}+c\frac{u_iu_j}{u}-\frac{1}{n}(\Delta u+c\frac{|\nabla u|^2}{u})g_{ij},$$

则

$$\begin{aligned}E_{ij,}{}^{i}=&\frac{n-2}{n}c\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n}(p+\frac{n+2}{n}c)\frac{\Delta u}{u}u_j\\&-\frac{n-1}{n}c(1+\frac{n-2}{n}c)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j.\end{aligned}$$

取 $c=-\frac{np}{n+2}$，那么

$$E_{ij,}{}^{i}=-\frac{n-2}{n+2}p\frac{E_{ij}u^i}{u}+\frac{n-1}{n+2}p(1-\frac{n-2}{n+2}p)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}u_j+R_{ij}u^i-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda u_j,$$

于是

$$\begin{aligned}(E_{ij}u^j),{}^{i}=&\sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2+\frac{2p}{n+2}\frac{E_{ij}u^iu^j}{u}+\frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)\frac{|\nabla u|^4}{u^2}\\&+R_{ij}u^iu^j-\frac{n-1}{n}(p-1)\lambda|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

为了消去交叉项 $\dfrac{E_{ij}u^iu^j}{u}$，将 u 的次幂引进向量场，考虑

$$
\begin{aligned}
u^{\frac{2p}{n+2}}(u^{-\frac{2p}{n+2}}E_{ij}u^j),^i = \sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2 + \frac{n-1}{n+2}p\left(1-\frac{n-2}{n+2}p\right)\frac{|\nabla u|^4}{u^2} \\
+ R_{ij}u^iu^j - \frac{n-1}{n}(p-1)\lambda|\nabla u|^2.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

在微分恒等式(1.15)两侧同时乘以 $u^{-\frac{2p}{n+2}}$，并在 M 上积分，即可得到积分恒等式(1.13)，进而完成定理1.6的证明. ∎

使用不变张量技术的证明，比旧方法的证明简化了大量计算. 具体来讲，通过不变张量的思想，本该讨论二次函数对称轴才能得到的 $\alpha = -\dfrac{2p}{n+2}$，直接在上述证明过程中可以观察出来. 旧方法中需要将二次三项式配完全平方，这个过程蕴含在了待定常数 c 的选取中，而 c 也是通过不变张量思想确定的，在确定 c 的同时还能得到微分恒等式，极大地简化了计算过程.

在旧证明中，(1.11)是计算过程中需要的一次分部积分操作，这在直接寻找微分恒等式的观点下，相当于寻找一个新的恒等式，并线性组合到主恒等式上. 而寻找新恒等式的重要工具是量纲分析，直接计算向量场的散度要比分部积分容易. 此外，不变张量中的待定常数 c 已经能够完全蕴含微分恒等式的向量场中对应项 $\dfrac{|\nabla u|^2}{u}u_i$ 的信息，因此线性组合新的恒等式的操作被完全整合到了这里，这进一步优化了计算.

在新方法的证明过程中，为什么不考虑配完全平方，而是直接引入 u 的幂次去消掉交叉项？因为如果配完全平方，会产生 $\left|E_{ij}+b\dfrac{u_iu_j}{u}\right|^2$ 项，其中 $b \neq 0$，因此最后会得到 $E_{ij}+b\dfrac{u_iu_j}{u}=0$，而不变张量 E_{ij} 也需要为 0，这导致 u 只能是常数，这样就与不变张量选取的初衷相矛盾.

贯穿不变张量技术的一个重要思想是，先使用较为简单的方法尝试解决问题，如果还有一些情形无法处理，那么就引入一些稍微复杂的项，反复这样操作，直至最后解决问题. 因此每次拿到一个问题，无论是量纲分析选取不变张量的余项，还是选取恒等式的量纲，总会先尝试最简单的可能. 由于本节讨论的问题很简单，所以只选取了最简单的形式就解决了问题，不过这个思想在后续章节更复杂问题的讨论中将会陆续得以体现.

量纲分析与不变张量技术中一些概念从数学的严格角度来看是模糊的，但这不影响其成为一套好方法. 具体来讲，在找出需要恒等式的过程中无需对每一个计算过程给出合理的解释或证明，因为只要最终得到的微分恒等式能够解决实际问题就足够了. 量纲分析与不变张量技术提供了解决解的分类问题的可行性，让寻找恒等式的思路变得有方向，与此同时也大量简化了计算.

通过本节开始的讨论，可知 E_{ij} 以 u_{ij} 为主项，是由 Δ——方程(1.9)的主算子决定的. 而曲率条件同方程的 λ 项息息相关. 那为什么在这个方程中，u 的幂次是一个守恒的量纲？为什么在向量场中引入 u 的幂次，可以行之有效地消去交叉项？事实上，这些问题与方程的最后一部分——u^p 有关. 下一节将以一般的半线性方程为例，讨论除去主算子后的部分对量纲分析和不变张量产生影响.

1.6　实流形上的半线性方程

本节考虑闭 Riemann 流形 (M^n, g) 上一般的半线性方程的光滑正解：

$$\Delta u + f(u) = 0 \tag{1.16}$$

其中 $n \geqslant 2$，$R_{ij} - (n-1)g_{ij}$ 半正定.

如果 $f \geqslant 0$，通过直接对方程(1.16)积分，根据散度定理，$\int f(u) = 0$，因此 $f(u) \equiv 0.f \leqslant 0$ 同理. 因此，后续讨论假定 f 变号. 不妨设 $f = -f_1 + f_2$，其中 $f_1 \in C^1(\mathbb{R}_+)$，$f_2 \in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$. 最经典的例子是前两节讨论的情形：$f_1(s) = \lambda s$，$f_2(s) = s^p$.

根据上一节的讨论，主算子是 Laplace 算子，依旧考虑 u_{ij} 作为 E_{ij} 的主项. 由于 f_2 是抽象函数，无法直接看出量纲，但是可以尝试用分部积分考察

$$u_{ij} = \frac{(u_i f_2(u))_{,j}}{f_2(u)} - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)} u_i u_j,$$

因此 $\dfrac{f_2'(u)}{f_2(u)} u_i u_j$ 可以作为 E_{ij} 的后续项，即设

$$E_{ij} = u_{ij} + c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)} u_i u_j - \frac{1}{n}\left(\Delta u + c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}|\nabla u|^2\right) g_{ij}. \tag{1.17}$$

从量纲的角度看，$\dfrac{f_2'(u)}{f_2(u)}$ 可以视作具有 -1 次 u、零阶导数的零阶张量，虽然对于某些 f 可能不一定正确. 例如：当 $f_2(s) = \mathrm{e}^s$ 时，$\dfrac{f_2'(u)}{f_2(u)} = 1$，这显然不是 -1 次的 u. 但是使用这种定义量纲的观点来看，对于寻找更复杂恒等式的时候会比较方便. 此外，当 $f_2(s) = s^p$ 时，E_{ij} 的形式回到了上一节讨论的情况，当然，待定常数 c 和上一节的 c 相比多了一个系数 p，但这不是本质问题.

回到一般的半线性方程，对(1.17)中的 E_{ij} 使用不变张量技术：

$$\begin{aligned} E_{ij,}{}^{i} = &\frac{n-1}{n}(\Delta u)_j + R_{ij}u^i + c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta u u_j + \frac{n-2}{n}c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}u_{ij}u^i \\ &+ \frac{n-1}{n}c\left[\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - \left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2\right]|\nabla u|^2 u_j. \end{aligned}$$

为了将各项量纲统一，需要保持分子、分母 f_2 的数量相同，因此按照如下方式，结合方程(1.16)计算 $(\Delta u)_j$：

$$(\Delta u)_j = f_1'(u)u_j - f_2'(u)u_j = \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta u u_j + \left(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\right)u_j.$$

将上式代入 $E_{ij,}{}^{i}$，并将 u_{ij} 换成 E_{ij}，得

$$\begin{aligned} E_{ij,}{}^{i} =& \frac{n-2}{n}c\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^i + \frac{n-1}{n}(1+\frac{n+2}{n}c)\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta u u_j \\ &+ \frac{n-1}{n}c\left[\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - (\frac{n-2}{n}c+1)\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2\right]|\nabla u|^2 u_j \\ &+ R_{ij}u^i + \frac{n-1}{n}\left(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\right)u_j. \end{aligned}$$

令 $\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\Delta u u_j$ 项系数为 0，于是取 $c = -\frac{n}{n+2}$，那么

$$\begin{aligned} E_{ij,}{}^{i} =& -\frac{n-2}{n+2}\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^i - \frac{n-1}{n+2}\left[\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} - \frac{4}{n+2}\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2\right]|\nabla u|^2 u_j \\ &+ R_{ij}u^i + \frac{n-1}{n}\left(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\right)u_j. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &(E_{ij}u^j),{}^{i} \\ =& \sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2 + \frac{2}{n+2}\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^iu^j + \frac{n-1}{n+2}\left[\frac{4}{n+2}\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\right]|\nabla u|^4 \\ &+ R_{ij}u^iu^j + \frac{n-1}{n}\left(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\right)|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

为了消去交叉项 $\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}E_{ij}u^iu^j$，将 $f_2(u)$ 的次幂引进向量场，考虑

$$\begin{aligned} &f_2(u)^{\frac{2}{n+2}}[f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}}E_{ij}u^j],{}^{i} \\ =& \sum_{i,j=1}^{n}|E_{ij}|^2 + \frac{n-1}{n+2}\left[\frac{4}{n+2}\left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)}\right)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)}\right]|\nabla u|^4 \\ &+ R_{ij}u^iu^j + \frac{n-1}{n}\left(f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)}f_1(u)\right)|\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{1.18}$$

在微分恒等式(1.18)两侧同时乘以 $f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}}$，并在 M 上积分，结合 $R_{ij}-(n-1)g_{ij}$

半正定，得

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant & \int f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}} \sum_{i,j=1}^{n} |E_{ij}|^2 \\
& + \frac{n-1}{n+2} \int f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}} \left[\frac{4}{n+2} \left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)} \right)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)} \right] |\nabla u|^4 \\
& + \frac{n-1}{n} \int f_2(u)^{-\frac{2}{n+2}} \left(n + f_1'(u) - \frac{f_2'(u)}{f_2(u)} f_1(u) \right) |\nabla u|^2.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

注意到 $n + f_1'(u) - \dfrac{f_2'(u)}{f_2(u)} f_1(u) = f_2(u) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \dfrac{f_1(u)}{f_2(u)} + n$,

$$
\frac{4}{n+2} \left(\frac{f_2'(u)}{f_2(u)} \right)^2 - \frac{f_2''(u)}{f_2(u)} = \begin{cases} -\dfrac{n+2}{n-2} f_2(u)^{-\frac{n-2}{n+2}} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 u} [f_2(u)^{\frac{n-2}{n+2}}], & n \geqslant 3, \\ -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 u} [\log f_2(u)], & n = 2. \end{cases}
$$

若要(1.19)中的后两项均为 0，那么必须 $f_2(s) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \dfrac{f_1(s)}{f_2(s)} = -n$，且 $n = 2$ 时 $\log f_2$ 为线性函数，或 $n \geqslant 3$ 时 $f_2^{\frac{n-2}{n+2}}$ 为线性函数. 此时通过求解常微分方程，得

$$
f_2(s) = \begin{cases} \mathrm{e}^{k_1(s+k_2)}, & n = 2, \\ [k_1(s+k_2)]^{\frac{n+2}{n-2}}, & n \geqslant 3, \end{cases} \qquad f_1(s) = \begin{cases} \dfrac{2}{k_1} + k_3 f_2(s), & n = 2, \\ \dfrac{n(n-2)}{4}(s+k_2) + k_3 f_2(s), & n \geqslant 3, \end{cases}
$$

其中 $\{k_l\}_{l=1}^3$ 为常数. 由于方程中 f_1 和 f_2 是线性组合的关系，通过调整 k_1 和 k_2，可以将 f_1 中的 k_3 项合并到 f_2 上，因此不妨 $k_3 = 0$.

当 $n \geqslant 3$ 时，由 $f_2(s) > 0$ 在 $s > 0$ 时成立，知 $k_1 > 0$，$k_2 \geqslant 0$. 方程(1.16)化为

$$
\varDelta u - \frac{n(n-2)}{4}(u + k_2) + [k_1(u+k_2)]^{\frac{n+2}{n-2}} = 0,
$$

于是 $w := k_1^{\frac{n+2}{4}}(u + k_2)$ 满足 Yamabe 方程 $\varDelta w - \dfrac{n(n-2)}{4} w + w^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$.

当 $n = 2$ 时，由于 $f_1 \leqslant 0$ 的情况无需讨论，因此 $k_1 > 0$. 方程(1.16)化为

$$
\varDelta u - \frac{2}{k_1} + \mathrm{e}^{k_1(u+k_2)} = 0,
$$

于是 $w := \dfrac{k_1}{2}(u+k_2) + \dfrac{1}{2} \log \dfrac{k_1}{2}$ 满足 Liouville 方程 $\varDelta w - 1 + \mathrm{e}^{2w} = 0$. 关于 Liouville 方程的一些更多信息，请参考附录1.2、附录1.3.

综合上述讨论，可以得到如下解的分类定理. 在文献 [5] 中也有类似的结论，但是条件不同，下面的定理是完全新的.

定理 1.8　设 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，闭流形 (M^n,g) 满足 $n\geqslant 2$，$R_{ij}-(n-1)g_{ij}$ 半正定，u 是方程(1.16)的光滑正解. 如果 $f\geqslant 0$ 或 $f\leqslant 0$，那么 u 为满足 $f(u)\equiv 0$ 的调和函数；如果存在 $f_1\in C^1(\mathbb{R}_+)$，$f_2\in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$，使得 $f=f_2-f_1$，$(\dfrac{f_1}{f_2})'\geqslant -\dfrac{n}{f_2}$，且 $n=2$ 时，$\log f_2$ 是凹函数，$n\geqslant 3$ 时，$f_2^{\frac{n-2}{n+2}}$ 是凹函数，那么要么 u 只能是常数，即 f 的某个零点，要么 $(M^n,g)=(\mathbb{S}^n,g_c)$，且存在 $a\in\mathbb{S}^n$，$t\geqslant 0$，

(1) 当 $n=2$ 时，存在 $k_1>0$，$k_2\in\mathbb{R}$，使得 $f(s)=-\dfrac{2}{k_1}+\mathrm{e}^{k_1(s+k_2)}$，

$$u(x)=\frac{2}{k_1}\log\frac{2k_1^{-\frac{1}{2}}}{\cosh t+\sinh t\cdot\langle a,x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}-k_2.$$

(2) 当 $n\geqslant 3$ 时，存在 $k_1>0$，$k_2\geqslant 0$，使得

$$f(s)=-\frac{n(n-2)}{4}(s+k_2)+[k_1(s+k_2)]^{\frac{n+2}{n-2}},$$

$$u(x)=k_1^{-\frac{n+2}{4}}\left(\frac{\sqrt{n(n-2)}}{2\cosh t+2\sinh t\cdot\langle a,x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}\right)^{\frac{n-2}{2}}-k_2.$$

注　若取 $f(s)=-\lambda s+s^p$，立刻可以得到定理1.6. 在将上述定理作为判别法应用到具体方程时，如何找到合适的分解 $f=f_2-f_1$ 是比较关键的. 当流形非紧时（例如欧氏空间），上述关于微分恒等式的讨论没有问题，但是后续积分估计还需要知道 f 的更多信息才可以完成.

第 2 章　Cauchy-Riemann 流形上的（次）临界指标方程

本章使用不变张量技术，建立 Cauchy-Riemann 流形上（次）临界指标方程的微分恒等式，以此证明定理1.4，并将定理1.3给出新证明.

设 (M^{2n+1},θ) 是一个可定向、严格拟凸、超曲面型的闭 CR 流形，其 Ricci 曲率和挠率满足逐点条件(1.5)，即 M 无挠，且 Ricci 曲率有正下界（通过伸缩，不妨下界为 $n+1$，即同标准 CR 球面一样）.

方程(1.4)的存在性和正则性理论请参考文献 [12]，其中正则性保证了本章所有计算在分布意义下是合理的，因此本章默认 u 是方程(1.4)的光滑正解.

2.1　Cauchy-Riemann 几何与 Heisenberg 群

设 M 为实流形，称 $\mathbb{C}TM$ 的复子丛 $T^{(1,0)}M$ 具有 Cauchy-Riemann 结构（简称 CR 结构），如果 $T^{(1,0)}\cap T^{(0,1)}=0$，其中 $T^{(0,1)}:=\overline{T^{(1,0)}}$，此时，称 M 为 Cauchy-Riemann 流形（简称 CR 流形）. 称一个 CR 流形 M 是超曲面型的，如果 $\dim_{\mathbb{R}}M=2n+1$，且 $\dim_{\mathbb{C}}T^{(1,0)}M=n$.

如果 M 可定向，那么存在全局定义的实 1-形式 θ，其能零化 $T^{(1,0)}M$ 和 $T^{(0,1)}M$. 定义 Levi 形式：$\langle V,W\rangle_{L_\theta}=L_\theta(V,\overline{W}):=-2\sqrt{-1}\mathrm{d}\theta(V\wedge\overline{W})$，那么它是 $T^{(1,0)}M$ 上的 Hermitian 形式. 称 CR 结构是严格拟凸的，如果对于某个 θ 的选取，使得 L_θ 在 $T^{(1,0)}M$ 上严格正定，此时，θ 在 M 定义了切触结构，进而称 θ 为 CR 结构相应的切触形式.

称 T 为 Reeb 向量场，如果 $\theta(T)=1$ 且 $\mathrm{d}\theta(T,X)=0$ 对任意 $X\in TM$ 成立. 于是，$TM=T^{(1,0)}M\oplus T^{(0,1)}M\oplus\mathrm{span}\{T\}$. 取 $\{Z_i\}_{i=1}^n$ 为其 Levi 形式意义下 $T^{(1,0)}M$ 的一组正交基，$\{\theta^i\}_{i=1}^n$ 为 $\{Z_i\}_{i=1}^n$ 的对偶基，那么 $\theta^i(T)=0$. 置 $\mathrm{d}\theta=2\sqrt{-1}h_{i\bar{j}}\theta^i\wedge\theta^{\bar{j}}$，那么 $h_{i\bar{j}}$ 与其逆矩阵 $h^{i\bar{j}}$ 用来升降指标，例如：

$$h_{i\bar{j}}S^{ik}=S_{\bar{j}}^{\ k},\ h^{i\bar{j}}S_{i\bar{k}}=S^{\bar{j}}_{\ \bar{k}}.$$

记 $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ 为 Webster 曲率张量，$\mathrm{Tor}(Z_i,Z_j)=A_{ij}$ 为挠率张量，$\mathrm{Ric}(Z_i,Z_j)=R_{i\bar{j}}=R_{i\ k\bar{j}}^{\ k}$ 为 Ricci 曲率张量，$R=R_i^{\ i}$ 为数量曲率.

定义协变导数：$f_{,i}:=Z_if$，$f_{,\bar{i}}:=Z_{\bar{i}}f$，$f_{,0}:=Tf$. 交换法则如下：

$$f_{,ij}=f_{,ji},\ f_{,i\bar{j}}-f_{,\bar{j}i}=2\sqrt{-1}h_{i\bar{j}}f_{,0},\ f_{,0i}-f_{,i0}=A_{ij}f_{,}^{\ j},$$

$$f_{,ij\bar{k}}-f_{,i\bar{k}j}=2\sqrt{-1}h_{j\bar{k}}f_{,i0}+R_{i\ j\bar{k}}^{\ l}f_{,l}.$$

将上式中的 i 和 k 缩并，得：$f_{,ij}^{\ \ \ i}-f_{,i\ j}^{\ \ i}=2\sqrt{-1}h_{ij}f_{,0}^{\ \ i}+R_{j\bar{i}}f_{,}^{\ \bar{i}}.$

定义次梯度：$|\nabla_b f|^2 := f_{,i}f_{,}{}^{i}$，次 Laplace 算子：$\Delta_b f := \dfrac{1}{2}(f_{,i}{}^{i} + f_{,}{}^{i}{}_{i})$，那么

$$f_{,i}{}^{i} = \Delta_b f + n\sqrt{-1} f_{,0},\ \Delta_b f = \operatorname{Re} f_{,i}{}^{i}.$$

当 Webster 曲率和挠率为零，即 CR 流形平坦时，即为 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$. 若从代数的角度出发，$\mathbb{H}^n := \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ 配备了群乘法 $\circ$ 满足

$$(z,t)\circ(z',t') = (z+z', t+t'+2\operatorname{Im} z\cdot\overline{z}'),\ \forall (z,t),(z',t')\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}.$$

作为李群，$\mathbb{H}^n$ 上的左不变向量场 $\{Z_i, Z_{\bar{i}}, T : i = 1,\cdots,n\}$ 为

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial z^i} + \sqrt{-1}\overline{z}^i\frac{\partial}{\partial t},\ Z_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i} - \sqrt{-1}z^i\frac{\partial}{\partial t},\ T := \frac{\partial}{\partial t},\ i = 1,\cdots,n.$$

导数交换法则如下：

$$f_{,ij} = f_{,ji},\ f_{i\bar{j}} - f_{\bar{j}i} = 2\sqrt{-1}\delta_{i\bar{j}} f_0,\ f_{0i} = f_{i0}.$$

因此，$\mathbb{H}^n$ 上的分析学运算，相当于在一般 CR 流形上的计算中，令 Webster 曲率和挠率为零，以及 $h_{i\bar{j}} = \delta_{i\bar{j}}$ 即可. 这个观点在将 CR 几何的恒等式直接搬到 Heisenberg 群上的时候非常有用.

由于 $\mathbb{H}^n$ 上有 $[Z_{\bar{i}}, Z_i] = 2\sqrt{-1}T$，因此其第二层分量 t 在几何上具有二倍于第一层分量的权重，因此在量纲分析时将 $f_{,0}$ 视作二阶导数. 也正因如此，$(z,t)\in\mathbb{H}^n$ 的齐性范数为 $\|(z,t)\| = (|z|^4+t^2)^{\frac{1}{4}}$，齐性伸缩为 $\delta_\lambda(z,t) = (\lambda z, \lambda^2 t)$，CR 几何的齐性维数 $Q = 2n+2$. 从这个观点来看，Yamabe 方程中的临界指标 $\dfrac{n+2}{n} = \dfrac{Q+2}{Q-2}$ 同欧氏空间在某种意义上是吻合的. 齐性范数诱导的度量即为 Carnot-Caratheodory 度量，相应的球为 $B_R(z_0,t_0) := \{(z,t)\in\mathbb{H}^n : \|(z-z_0, t-t_0)\| < R\}$，那么

$$|B_R(z_0,t_0)| = \int_{B_R(z_0,t_0)} \mathrm{d}x = C(Q)R^Q.$$

Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 可以经过一点紧致化得到 CR 标准球面 $(\mathbb{S}^{2n+1}, \theta_c)$，它们之间也有 Cayley 变换（即球极投影），这些内容可以参考文献 [13]. 想要进一步了解 CR 几何乃至次 Riemann 几何的相关知识，可以参考文献 [6]；想要进一步了解 Heisenberg 群乃至幂零李群的相关知识，可以参考文献 [1].

2.2　不变张量

由于在 CR 几何的情形下，各种量变得非常复杂，因此需要对张量量纲刻画的显式表达，以便于具体分析. 称张量 $S(u)$ 是 $\{(r,s), x, y, +/-\}$ 型的，如果它是由有限个 (r,s) 阶张量线性组合而成，且每个张量具有 x 次幂的 u、y 阶导数，以

及每个张量的 $\sqrt{-1}$ 个数加上向量场 T 的个数是偶数/奇数，而 $\{(r,s),x,y,+/-\}$ 叫做张量 $S(u)$ 的量纲. 举例如下：

$$\{(2,0),1,2,+\}：\ D_{ij}=u_{ij}+c_1\frac{u_iu_j}{u};$$

$$\begin{aligned}\{(1,1),1,2,+\}：\ E_{i\bar{j}}=&u_{i\bar{j}}+c_2\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u}+c_3\Delta_b uh_{i\bar{j}}\\&+c_4n\sqrt{-1}u_0h_{i\bar{j}}+c_5\frac{|\nabla_b u|^2}{u}h_{i\bar{j}}+c_6\lambda uh_{i\bar{j}},\end{aligned}$$

其中 $\{c_l\}_{l=1}^6$ 是常数. 值得注意的是，向量场 T 在齐性意义下是二阶算子，因此 u_0 视作具有二阶导数，即它是 $\{(0,0),1,2,-\}$ 型的；λ 在方程中的地位与二阶导数等同，因此视作 $\{(0,0),0,2,+\}$ 型的.

如上定义的张量量纲在针对方程(1.4)的解进行分部积分的过程中是守恒的. 类比于实流形的分析过程，容易得知前面定义的 D_{ij} 和 $E_{i\bar{j}}$ 正是需要的不变张量的形式，且根据 $E_i{}^i=0$，得

$$c_3=-\frac{1}{n},\ \ c_4=-\frac{1}{n},\ \ c_5=-\frac{1}{n}c_2,\ \ c_6=0,$$

因此 $E_{i\bar{j}}=u_{i\bar{j}}+c_2\dfrac{u_iu_{\bar{j}}}{u}-\dfrac{1}{n}\left(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0+c_2\dfrac{|\nabla_b u|^2}{u}\right)h_{i\bar{j}}.$

记 $D_i=\dfrac{D_{ij}u^j}{u}$，$E_i=\dfrac{E_{i\bar{j}}u^{\bar{j}}}{u}$. 对方程(1.4)求导，有

$$(\Delta_b u)_j=\lambda u_j+\alpha u^{\alpha-1}u_j=\alpha\frac{\Delta_b u}{u}u_j+(1-\alpha)\lambda u_j.$$

利用上式，直接计算可得

$$\begin{aligned}D_{ij,}{}^i=&u_{ij}{}^i+c_1\frac{u_j{}^iu_i}{u}+c_1\frac{u_j(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)}{u}-c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j\\=&(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)_j+2\sqrt{-1}u_{0j}+R_{j\bar{i}}u^{\bar{i}}+c_1\Big[E_{j\bar{i}}-c_2\frac{u_ju_{\bar{i}}}{u}+\frac{1}{n}\Big(\Delta_b u\\&+n\sqrt{-1}u_0+c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\Big)h_{j\bar{i}}\Big]\frac{u^{\bar{i}}}{u}+c_1\frac{u_j(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)}{u}-c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j\\=&c_1E_j+(n+2)\sqrt{-1}u_{0j}+(n+1)c_1\frac{\sqrt{-1}u_0u_j}{u}+(\frac{n+1}{n}c_1+\alpha)\frac{\Delta_b u}{u}u_j\\&-(\frac{n-1}{n}c_2+1)c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j+R_{j\bar{i}}u^{\bar{i}}+(1-\alpha)\lambda u_j.\end{aligned}$$

$$E_{i\bar{j},}{}^i=u_{i\bar{j}}{}^i+c_2\frac{u_{\bar{j}}{}^iu_i}{u}+c_2\frac{u_{\bar{j}}(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)}{u}-c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar{j}}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)_{\bar j}}{n}-\frac{c_2}{n}\frac{u_{\bar i\bar j}u^{\bar i}}{u}-\frac{c_2}{n}\frac{u_{i\bar j}u^i}{u}+\frac{c_2}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar j}\\
=&(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)_{\bar j}+\frac{n-1}{n}c_2\frac{u_{\bar i\bar j}u^{\bar i}}{u}+c_2\frac{u_{\bar j}(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)}{u}\\
&-\frac{c_2}{n}\frac{u_{i\bar j}u^i}{u}-\frac{(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0)_{\bar j}}{n}-\frac{n-1}{n}c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar j}\\
=&-\frac{c_2}{n}\left[E_{i\bar j}-c_2\frac{u_iu_{\bar j}}{u}+\frac{1}{n}\left(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0+c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\right)h_{i\bar j}\right]\frac{u^i}{u}\\
&+\frac{n-1}{n}c_2\left(D_{\bar i\bar j}-c_1\frac{u_{\bar i}u_{\bar j}}{u}\right)\frac{u^{\bar i}}{u}+(n-1)\sqrt{-1}u_{0\bar j}+nc_2\frac{\sqrt{-1}u_0u_{\bar j}}{u}\\
&+(c_2+\frac{n-1}{n}\alpha)\frac{\Delta_b u}{u}u_{\bar j}-\frac{n-1}{n}c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar j}+\frac{n-1}{n}(1-\alpha)\lambda u_{\bar j}\\
=&\frac{n-1}{n}c_2D_{\bar j}-\frac{c_2}{n}E_{\bar j}+(n-1)\sqrt{-1}u_{0\bar j}+\frac{n^2-1}{n}c_2\frac{\sqrt{-1}u_0u_{\bar j}}{u}+\frac{n-1}{n}\times\\
&(\frac{n+1}{n}c_2+\alpha)\frac{\Delta_b u}{u}u_{\bar j}-\frac{n-1}{n}(c_1-\frac{c_2}{n}+1)c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar j}+\frac{n-1}{n}(1-\alpha)\lambda u_{\bar j}.
\end{aligned}
$$

希望 D_{ij} 和 $E_{i\bar j}$ 为 0，那么 $D_{ij,}{}^i$ 和 $E_{i\bar j,}{}^i$ 也为 0，于是

$$
\begin{aligned}
0=&(n+2)\sqrt{-1}u_{0j}+(n+1)c_1\frac{\sqrt{-1}u_0u_j}{u}+(\frac{n+1}{n}c_1+\alpha)\frac{\Delta_b u}{u}u_j\\
&-(\frac{n-1}{n}c_2+1)c_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j+R_{j\bar i}u^{\bar i}+(1-\alpha)\lambda u_j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=&(n-1)\sqrt{-1}u_{0\bar j}+\frac{n^2-1}{n}c_2\frac{\sqrt{-1}u_0u_{\bar j}}{u}+\frac{n-1}{n}(\frac{n+1}{n}c_2+\alpha)\frac{\Delta_b u}{u}u_{\bar j}\\
&-\frac{n-1}{n}(c_1-\frac{c_2}{n}+1)c_2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_{\bar j}+\frac{n-1}{n}(1-\alpha)\lambda u_{\bar j}.
\end{aligned}
$$

将第二个式子取共轭，令 $\sqrt{-1}u_{0j}$、$\dfrac{\sqrt{-1}u_0u_j}{u}$、$\dfrac{\Delta_b u}{u}u_j$ 和 $\dfrac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j$ 的系数成比例，

$$
\frac{n+2}{-(n-1)}=\frac{(n+1)c_1}{-\frac{n^2-1}{n}c_2}=\frac{\frac{n+1}{n}c_1+\alpha}{\frac{n-1}{n}(\frac{n+1}{n}c_2+\alpha)}=\frac{-(\frac{n-1}{n}c_2+1)c_1}{-\frac{n-1}{n}(c_1-\frac{c_2}{n}+1)c_2},
$$

于是 $c_1=c_2=\alpha=0$ 或 $c_1=-\dfrac{n+2}{n}$，$c_2=-1$，$\alpha=\dfrac{n+2}{n}$. 这样的话，临界指标 $\alpha=\dfrac{n+2}{n}$ 通过不变张量技术确定了出来.

如果 α 不是临界指标，那么无法令上面四项的系数同时成比例，类比于实流

形的讨论，需要保留一个系数不成比例的项 $\dfrac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j$. 于是考虑

$$\frac{n+2}{-(n-1)}=\frac{(n+1)c_1}{-\dfrac{n^2-1}{n}c_2}=\frac{\dfrac{n+1}{n}c_1+\alpha}{\dfrac{n-1}{n}(\dfrac{n+1}{n}c_2+\alpha)},$$

进而 $c_1=-\alpha$，$c_2=-\dfrac{n\alpha}{n+2}$. 代入 c_1、c_2 并重写 $D_{ij}, E_{i\bar{j}}$：

$$D_{ij}=u_{ij}-\alpha\frac{u_iu_j}{u},$$

$$E_{i\bar{j}}=u_{i\bar{j}}-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta_b u+n\sqrt{-1}u_0-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\right)h_{i\bar{j}},$$

通过使 $E_{i\bar{j},}{}^{i}$ 具有不变性，确定出具有 $\{(1,0),1,3,+\}$ 量纲的不变张量 G_i 为

$$\begin{aligned}G_i=&n\sqrt{-1}u_{0i}-\frac{n(n+1)}{n+2}\alpha\frac{\sqrt{-1}u_0u_i}{u}-\frac{\alpha}{n+2}\frac{\Delta_b u}{u}u_i\\&+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_i+(\alpha-1)\lambda u_i,\end{aligned}$$

此时 $D_{ij,}{}^{i}$ 和 $E_{i\bar{j},}{}^{i}$ 化为

$$\begin{aligned}D_{ij,}{}^{i}=&-\alpha E_j+\frac{n+2}{n}G_j+2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_j\\&+R_{j\bar{i}}u^{\bar{i}}-\frac{2(n+1)}{n}(\alpha-1)\lambda u_j,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$E_{i\bar{j},}{}^{i}=-\frac{n-1}{n+2}\alpha D_{\bar{j}}+\frac{\alpha}{n+2}E_{\bar{j}}-\frac{n-1}{n}G_{\bar{j}}.\tag{2.2}$$

2.3　一些必要的引理

引入如下记号：

$$E_{\bar{i}j}=\overline{E_{i\bar{j}}},\ L_{i\bar{j}}=\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u}-\frac{1}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}h_{i\bar{j}},\ \mathscr{R}=R_{i\bar{j}}u^iu^{\bar{j}}-\frac{2(n+1)}{n}(\alpha-1)\lambda|\nabla_b u|^2.$$

引理 2.1

(1) $E_i{}^{i}:=E_{i\bar{j}}h^{i\bar{j}}=0, E_{i\bar{j}}=E_{\bar{j}i}$，$E_iu^i\in\mathbb{R}$；

(2) $L_i{}^{i}=0, E_iu^i=E_{i\bar{j}}L^{i\bar{j}}$，$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}|L_{i\bar{j}}|^2=\frac{n-1}{n}\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}$；

(3) 在满足 $\mathrm{Ric}\geqslant(n+1)h$ 和 $\lambda\leqslant\dfrac{n}{2(\alpha-1)}$ 的条件下，有 $\mathscr{R}\geqslant 0$.

证明　$E_i{}^i = u_i{}^i - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_b u|^2}{u} - \left(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0 - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\right) = 0$，于是 $L_i{}^i = 0$ 同理可证. 由 $E_i{}^i = 0$，得 $E_{i\bar{j}}L^{i\bar{j}} = E_{i\bar{j}} \cdot \frac{u^i u^{\bar{j}}}{u} = E_i u^i$. 同理由 $L_i{}^i = 0$，

$$\sum_{i,j=1}^n |L_{i\bar{j}}|^2 = L_{i\bar{j}} \cdot \frac{u^i u^{\bar{j}}}{u} = \frac{n-1}{n}\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}.$$

由 $u_{i\bar{j}} - u_{\bar{j}i} = 2\sqrt{-1}h_{i\bar{j}}u_0$，知

$$\begin{aligned} E_{i\bar{j}} =& u_{i\bar{j}} - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_i u_{\bar{j}}}{u} - \frac{1}{n}\left(\Delta_b u + n\sqrt{-1}u_0 - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\right)h_{i\bar{j}} \\ =& u_{\bar{j}i} - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_{\bar{j}} u_i}{u} - \frac{1}{n}\left(\Delta_b u - n\sqrt{-1}u_0 - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\right)h_{\bar{j}i} = E_{\bar{j}i}, \end{aligned}$$

于是 $E_i u^i = \frac{E_{i\bar{j}}u^i u^{\bar{j}}}{u} = \frac{E_{\bar{j}i}u^i u^{\bar{j}}}{u} = E_{\bar{j}}u^{\bar{j}}$，即 $E_i u^i \in \mathbb{R}$.

如果 $\mathrm{Ric} \geqslant (n+1)h$ 且 $\lambda \leqslant \frac{n}{2(\alpha-1)}$，那么

$$\mathscr{R} \geqslant (n+1)|\nabla_b u|^2 - \frac{2(n+1)}{n}(\alpha-1)\lambda|\nabla_b u|^2 \geqslant 0.$$

∎

引理 2.2　当 $n \geqslant 2$ 时，

$$\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^n |D_{ij}|^2 \geqslant \sum_{i=1}^n |D_i|^2,\quad \frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^n |E_{i\bar{j}}|^2 \geqslant \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^n |E_i|^2.$$

证明　设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，$\mu \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. 根据 Cauchy 不等式，

$$\sum_{j=1}^n |A_{ij}\mu_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2\|\mu\|^2.$$

对 i 求和，有 $\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}\mu_j|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2\|\mu\|^2$，于是 $u^2\sum_i |D_i|^2 \leqslant |\nabla_b u|^2 \sum_{i,j}|D_{ij}|^2$.

对于 $n \geqslant 2$，假设 $\operatorname{tr} A = 0$. 由所证不等式的正交变换不变性，不妨当 $i \neq j$ 且 $i,j \geqslant 2$ 时，$A_{ij} = 0$，$\mu = (1,0,\cdots,0)^T$，那么

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2\|\mu\|^2 - \frac{n}{n-1}\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}\mu_j|^2 \\ =& \sum_{i=1}^n |A_{ii}|^2 + 2\sum_{i=2}^n |A_{i1}|^2 - \frac{n}{n-1}|A_{11}|^2 - \frac{n}{n-1}\sum_{i=2}^n |A_{i1}|^2 \end{aligned}$$

$$\geqslant \sum_{i=2}^{n} |A_{ii}|^2 - \frac{1}{n-1}|A_{11}|^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} |A_{ii} - A_{jj}|^2 \geqslant 0.$$

于是 $|\nabla_b u|^2 \sum_{i,j} |E_{i\bar{j}}|^2 \geqslant \frac{n}{n-1} u^2 \sum_i |E_i|^2.$ ∎

引理 2.3

$$(\Delta_b u)_{,i} = \lambda u_i - \alpha u^{\alpha-1} u_i = \alpha \frac{\Delta_b u}{u} u_i + (1-\alpha)\lambda u_i,$$

$$(|\nabla_b u|^2)_{,\bar{i}} = u D_{\bar{i}} + u E_{\bar{i}} + \frac{2n+1}{n+2}\alpha \frac{|\nabla_b u|^2}{u} u_{\bar{i}} + \frac{1}{n}\Delta_b u u_{\bar{i}} + \sqrt{-1} u_0 u_{\bar{i}},$$

$$\begin{aligned} n\sqrt{-1} u_{0\bar{i}} = & - G_{\bar{i}} + \frac{n(n+1)}{n+2}\alpha \frac{\sqrt{-1} u_0 u_{\bar{i}}}{u} - \frac{\alpha}{n+2}\frac{\Delta_b u}{u} u_{\bar{i}} \\ & + \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} u_{\bar{i}} + (\alpha-1)\lambda u_{\bar{i}}. \end{aligned}$$

证明　由方程(1.4)和 D_{ij}、$E_{i\bar{j}}$、G_i 的定义，可以直接计算验证. ∎

下面的引理体现了 D_{ij}、$E_{i\bar{j}}$ 和 G_i 的微分不变性.

引理 2.4

$$\begin{aligned} D_{i,}{}^{i} = & u^{-1}\sum_{i,j=1}^{n} |D_{ij}|^2 + (\alpha-1)\frac{D_i u^i}{u} - \alpha \frac{E_i u^i}{u} + \frac{n+2}{n}\frac{G_i u^i}{u} \\ & + 2\alpha\left(1 - \frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^3} + u^{-1}\mathscr{R}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$E_{i,}{}^{i} = u^{-1}\sum_{i,j=1}^{n} |E_{i\bar{j}}|^2 - \frac{n-1}{n+2}\alpha\frac{D_{\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u} + \left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\frac{E_{\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u} - \frac{n-1}{n}\frac{G_{\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u}. \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Im} G_{i,}{}^{i} = \operatorname{Im}\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\frac{D_{\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u} + \frac{n+1}{n+2}\alpha \frac{G_{\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u}\right]. \tag{2.5}$$

证明　(2.3)和(2.4)可以由(2.1)和(2.2)直接得到验证. 由引理2.3，

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G_{i,}{}^{i} = & n \operatorname{Im}\sqrt{-1}(\Delta_b u)_{,0} - \frac{n(n+1)}{n+2}\alpha\left(\operatorname{Im}\frac{\sqrt{-1} u_{0\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u} + \frac{u_0 \Delta_b u}{u} - \frac{u_0|\nabla_b u|^2}{u^2}\right) \\ & - \frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_0\Delta_b u}{u} + \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\left(\operatorname{Im}\frac{D_{\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u} + (n+1)\frac{u_0|\nabla_b u|^2}{u^2}\right) \\ & + n(\alpha-1)\lambda u_0 \\ = & \frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha - 1\right)\operatorname{Im}\frac{D_{\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u} - \frac{n(n+1)}{n+2}\alpha \operatorname{Im}\frac{\sqrt{-1} u_{0\bar{i}} u^{\bar{i}}}{u} \\ & + \frac{n(n+1)^2}{(n+2)^2}\alpha^2 \frac{u_0|\nabla_b u|^2}{u^2} \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{D_{\bar{i}}u^{\bar{i}}}{u}+\frac{n+1}{n+2}\alpha\frac{G_{\bar{i}}u^{\bar{i}}}{u}\right].$$

∎

2.4　次临界指标：定理1.4的证明

本节将分成四种情况，完成定理1.4的证明.

2.4.1　情形 1：$n \geqslant 2$ 且 $1 < \alpha < \frac{n+2}{n}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$

本小节仿照实流形的做法，寻找 $\{(0,0),2,4,+\}$ 型恒等式，证明定理1.4在 $n \geqslant 2$ 且 $1 < \alpha < \frac{n+2}{n}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$ 的情形.

注意到 $\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2$ 是 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型的量，这就导致所寻求的 $\{(0,0),2,4,+\}$ 型恒等式无法蕴含 $\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2$ 项，因此需要想办法消除含有 G_i 的项. 于是根据(2.3)和(2.4)，考虑如下恒等式：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} u^{-\beta}\{u^{\beta}[(n-1)D_{ij}u^{j}+(n+2)E_{i\bar{j}}u^{\bar{j}}]\}_{,}{}^{i}\\
=&(n-1)\operatorname{Re}(u^{\beta+1}D_i)_{,}{}^{i}+(n+2)\operatorname{Re}(u^{\beta+1}E_i)_{,}{}^{i}\\
=&(n+2)\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2+(n-1)\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2+[(n+2)\beta+2\alpha]E_iu^i\\
&+(n-1)\beta\operatorname{Re}D_iu^i+2(n-1)\alpha\left(1-\frac{n\alpha}{n+2}\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+(n-1)\mathscr{R},
\end{aligned}$$

其中 β 是待定常数. 使用引理 2.1 配方，得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} u^{-\beta}\{u^{\beta}[(n-1)D_{ij}u^{j}+(n+2)E_{i\bar{j}}u^{\bar{j}}]\}_{,}{}^{i}\\
=&(n+2)\sum_{i,j=1}^{n}\left|E_{i\bar{j}}+\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{n+2}\right)L_{i\bar{j}}\right|^2+(n-1)\sum_{i,j=1}^{n}\left|D_{ij}+\frac{\beta}{2}\frac{u_iu_j}{u}\right|^2\\
&-\frac{n-1}{n}\left[\frac{n+1}{2}\beta^2+\alpha\beta+\alpha\left(\frac{2n^2+1}{n+2}\alpha-2n\right)\right]\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+(n-1)\mathscr{R}.
\end{aligned}$$

希望 $\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}$ 的系数尽可能大，以使得能够解决问题的 α 的范围尽可能宽，因此取 $\beta=-\frac{\alpha}{n+1}$，进而得到一个 $\{(0,0),2,4,+\}$ 型恒等式：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} u^{\frac{\alpha}{n+1}}\{u^{-\frac{\alpha}{n+1}}[(n-1)D_{ij}u^j+(n+2)E_{i\bar{j}}u^{\bar{j}}]\}_{,}{}^{i}\\
=&(n+2)\sum_{i,j=1}^{n}\left|E_{i\bar{j}}+\frac{n\alpha}{2(n+1)(n+2)}L_{i\bar{j}}\right|^2+(n-1)\sum_{i,j=1}^{n}\left|D_{ij}-\frac{\alpha}{2(n+1)}\frac{u_iu_j}{u}\right|^2\\
&+\frac{(n-1)\alpha}{2(n+1)(n+2)}[4(n+1)(n+2)-(2n+1)^2\alpha]\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+(n-1)\mathscr{R}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

因此当 $n \geqslant 2$ 且 $1<\alpha<\frac{n+2}{n}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$ 时，$\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}$ 的系数为正. 而根据散度定理，对(2.6)两侧同时乘以 $u^{-\frac{\alpha}{n+1}}$ 并在 M 上积分，左侧为 0，这迫使 $|\nabla_b u|^4=0$，即 u 是常数. ∎

注　$\{(0,0),2,4,+\}$ 型恒等式的运用最早出现在文献 [30]，如果将本节的恒等式限制在 Heisenberg 群上，那么对该文定理 1 中 $h(x)$ 为常数的情形给了一个新证明. 其实取 $\beta=0$ 可以处理 $1<\alpha<\frac{n+2}{n+1/(2n)}$ 的情形，这与后续情形相配合也足够证明定理1.4了. 本小节讨论的恒等式虽然简洁，但是当 $n=1$ 时，其退化为 $0=0$，无法用来解决问题，而避开 G_i 也导致无法将 α 靠近临界指标的情形解决，这些都促使我们考虑其他类型的恒等式.

2.4.2　情形 2：$\frac{n+2}{n+1/(2n)} \leqslant \alpha < \frac{n+2}{n}$

为了解决上一小节最后提及的问题，需要将 G_i 考虑进来，即需要产生 $\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2$ 这个六阶导数项，因此 $\{(0,0),2,4,+\}$ 型恒等式就不够用了. 本小节利用如下 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型恒等式解决 $\frac{n+2}{n+1/(2n)} \leqslant \alpha < \frac{n+2}{n}$ 的情形.

命题 2.5 设 $\{d_l\}_{l=1}^4$、$\{e_l\}_{l=1}^4$、μ 和 β 是待定常数，则

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}\left\{u^{\beta}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^{\alpha}+d_3\lambda u+d_4n\sqrt{-1}u_0\right)D_i\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(e_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+e_2u^{\alpha}+e_3\lambda u+e_4n\sqrt{-1}u_0\right)E_i-\mu n\sqrt{-1}u_0G_i\right]\right\}_{,}^{\ i}\\
=&\left[d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+d_2u^{\alpha-1}+d_3\lambda\right]\left[\sum_{i,j=1}^n|D_{ij}|^2+2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]\\
&+\left[e_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+e_2u^{\alpha-1}+e_3\lambda\right]\sum_{i,j=1}^n|E_{i\bar{j}}|^2+d_1\sum_{i=1}^n|D_i|^2+e_1\sum_{i=1}^n|E_i|^2\\
&+\mu\sum_{i=1}^n|G_i|^2+(d_1+e_1)\operatorname{Re}D_iE^i-d_4\operatorname{Re}D_iG^i-e_4\operatorname{Re}E_iG^i\\
&+\operatorname{Re}\left[\mathit{\Delta}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\mathit{\Delta}_2u^{\alpha-1}+\mathit{\Delta}_3\lambda+\mathit{\Delta}_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_iu^i\\
&+\left[\mathit{\Theta}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\mathit{\Theta}_2u^{\alpha-1}+\mathit{\Theta}_3\lambda\right]E_iu^i\\
&+\operatorname{Re}\left[\mathit{\Xi}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\mathit{\Xi}_2u^{\alpha-1}+\mathit{\Xi}_3\lambda+\mathit{\Xi}_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]G_iu^i.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

其中的系数如下：

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Delta}_1&=\left(\beta+\frac{3(n+1)}{n+2}\alpha-2\right)d_1-\frac{n-1}{n+2}\alpha e_1+\frac{n\alpha}{n+2}(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)d_4,\\
\mathit{\Delta}_2&=-\frac{1}{n}d_1+(\beta+2\alpha-1)d_2-\frac{n-1}{n+2}\alpha e_2+\frac{\alpha}{n+2}d_4,\\
\mathit{\Delta}_3&=\frac{1}{n}d_1+(\beta+\alpha)d_3-\frac{n-1}{n+2}\alpha e_3+(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)d_4,\\
\mathit{\Delta}_4&=\frac{1}{n}d_1+\left(\beta+\frac{2n+3}{n+2}\alpha-1\right)d_4+\frac{n-1}{n+2}\alpha e_4+\frac{n\alpha}{n+2}(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)\mu,\\
\mathit{\Theta}_1&=-\alpha d_1+\left(\beta+\frac{3n+2}{n+2}\alpha-2\right)e_1+\frac{n\alpha}{n+2}(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)e_4,\\
\mathit{\Theta}_2&=-\frac{1}{n}e_1-\alpha d_2+\left(\beta+\frac{2n+3}{n+2}\alpha-1\right)e_2+\frac{\alpha}{n+2}e_4,\\
\mathit{\Theta}_3&=\frac{1}{n}e_1-\alpha d_3+\left(\beta+\frac{n+1}{n+2}\alpha\right)e_3+(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)e_4,\\
\mathit{\Xi}_1&=\frac{n+2}{n}d_1-\frac{n-1}{n}e_1-\frac{n\alpha}{n+2}(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)\mu,\\
\mathit{\Xi}_2&=\frac{n+2}{n}d_2-\frac{n-1}{n}e_2-\frac{\alpha}{n+2}\mu,\\
\mathit{\Xi}_3&=\frac{n+2}{n}d_3-\frac{n-1}{n}e_3-(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)\mu,\\
\mathit{\Xi}_4&=\frac{n+2}{n}d_4+\frac{n-1}{n}e_4-\beta\mu.
\end{aligned}
$$

证明　由引理2.3和引理 2.4，可以直接计算：

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-1}|\nabla_b u|^2 D_i)_{,}{}^{i}\\
=&\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[|D_{ij}|^2+2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]+\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2+\operatorname{Re}D_iE^i\\
&+\operatorname{Re}\left[\left(\beta+\frac{3(n+1)}{n+2}\alpha-2\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}-\frac{1}{n}u^{\alpha-1}+\frac{1}{n}\lambda+\frac{1}{n}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_iu^i\\
&-\alpha\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}E_iu^i+\frac{n+2}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_iu^i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+\alpha}D_i)_{,}{}^{i}\\
=&u^{\alpha-1}\sum_{i,j=1}^{n}\left[|D_{ij}|^2+2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]\\
&+(\beta+2\alpha-1)u^{\alpha-1}\operatorname{Re}D_iu^i-\alpha u^{\alpha-1}E_iu^i+\frac{n+2}{n}u^{\alpha-1}\operatorname{Re}G_iu^i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+1}\cdot\lambda D_i)_{,}{}^{i}\\
=&\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\left[|D_{ij}|^2+2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]\\
&+(\beta+\alpha)\lambda\operatorname{Re}D_iu^i-\alpha\lambda E_iu^i+\frac{n+2}{n}\lambda\operatorname{Re}G_iu^i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta}\cdot n\sqrt{-1}u_0D_i)_{,}{}^{i}\\
=&-\operatorname{Re}D_iG^i+\left(\beta+\frac{2n+3}{n+2}\alpha-1\right)\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}D_iu^i+\frac{n+2}{n}\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}G_iu^i\\
&+\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}+\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\lambda\right]\operatorname{Re}D_iu^i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-1}|\nabla_b u|^2 E_i)_{,}{}^{i}\\
=&\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2+\sum_{i=1}^{n}|E_i|^2+\operatorname{Re}D_iE^i-\frac{n-1}{n+2}\alpha\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_iu^i\\
&+\left[\left(\beta+\frac{3n+2}{n+2}\alpha-2\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}-\frac{1}{n}u^{\alpha-1}+\frac{1}{n}\lambda\right]E_iu^i-\frac{n-1}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_iu^i,
\end{aligned}
$$

$$
u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+\alpha}E_i)_{,}{}^{i}
$$

$$
\begin{aligned}
=&u^{\alpha-1}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2-\frac{n-1}{n+2}\alpha u^{\alpha-1}\operatorname{Re}D_iu^i\\
&+\left(\beta+\frac{2n+3}{n+2}\alpha-1\right)u^{\alpha-1}E_iu^i-\frac{n-1}{n}u^{\alpha-1}\operatorname{Re}G_iu^i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+1}\cdot\lambda E_i)_{,}{}^{i}\\
=&\lambda\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2-\frac{n-1}{n+2}\alpha\lambda\operatorname{Re}D_iu^i+\left(\beta+\frac{n+1}{n+2}\alpha\right)\lambda E_iu^i-\frac{n-1}{n}\lambda\operatorname{Re}G_iu^i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta}\cdot n\sqrt{-1}u_0E_i)_{,}{}^{i}\\
=&-\operatorname{Re}E_iG^i+\frac{n-1}{n+2}\alpha\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}D_iu^i+\frac{n-1}{n}\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}G_iu^i\\
&+\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}+\frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}+\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\lambda\right]E_iu^i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(-n\sqrt{-1}u^{\beta}u_0G_i)_{,}{}^{i}\\
=&\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}D_iu^i-\beta\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}G_iu^i\\
&-\left[\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}+\frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}+\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\lambda\right]\operatorname{Re}G_iu^i.
\end{aligned}
$$

直接线性组合以上各式，命题得证. ∎

通过尝试恰当的线性组合系数，即可得到定理1.4在情形 2 的证明. 取

$$
d_1=e_1=\frac{n^2\alpha[3n+6-(n-1)\alpha]}{(2n+1)(n+2)^2},\ d_2=e_2=\frac{n\alpha}{n+2},\ d_3=e_3=n(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1),
$$

$$
d_4=\frac{n}{2n+1}(3-\frac{7n+2}{n+2}\alpha),\ e_4=\frac{n(3+\alpha)}{2n+1},\ \mu=3,\ \beta=1-\alpha,
$$

于是各项系数化为

$$
\varDelta_1=\frac{2n^2\alpha[(4n+5)\alpha-3n-6]}{(2n+1)(n+2)^2}(1-\frac{n\alpha}{n+2}),\ \ \varTheta_1=-\frac{6n^2\alpha(\alpha+n+2)}{(2n+1)(n+2)^2}(1-\frac{n\alpha}{n+2}),
$$

$$
\varXi_1=\frac{6n\alpha}{2n+1}(1-\frac{n\alpha}{n+2}),\ \ \varDelta_3=\varTheta_3=\frac{2n(\alpha-1)(2+n-n\alpha)}{2n+1},
$$

$$
\varDelta_2=\varTheta_2=\varXi_2=\varXi_3=\varDelta_4=\varXi_4=0.
$$

注意到 $\sum_{i,j,k=1}^{n}|D_{ij}u_{\bar{k}}+E_{i\bar{k}}u_j|^2=|\nabla_bu|^2\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+2u^2\operatorname{Re}D_iE^i$，结合引理 2.1，将恒等式(2.7)重写为

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}\left\{u^{\beta}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^{\alpha}+d_3\lambda u\right)(D_i+E_i)+n\sqrt{-1}u_0(d_4D_i+e_4E_i-3G_i)\right]\right\}^{i}_{,}\\
=&d_1u^{-2}\sum_{i,j,k=1}^{n}|D_{ij}u_{\bar k}+E_{i\bar k}u_j|^2+d_2u^{\alpha-1}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar j}|^2)+2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\\
&+d_3\lambda\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left|D_{ij}+\frac{\Delta_3}{2d_3}\frac{u_iu_j}{u}\right|^2+\left|E_{i\bar j}+\frac{\Delta_3}{2d_3}L_{i\bar j}\right|^2\right)\right.\\
&\left.+\left(2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})-\frac{2n-1}{n}\frac{\Delta_3^2}{4d_3^2}\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]+\left[d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+d_2u^{\alpha-1}+d_3\lambda\right]\mathscr{R}+\mathbf{Q}_1,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

其中 $\mathbf{Q}_1$ 为如下二次型：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1=&d_1\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2+d_1\sum_{i=1}^{n}|E_i|^2+3\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2-d_4\operatorname{Re}D_iG^i-e_4\operatorname{Re}E_iG^i\\
&+\Delta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_iu^i+\Theta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}E_iu^i+\Xi_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_iu^i\\
&+2d_1\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4},
\end{aligned}
$$

其对应的矩阵为

$$
Q_1=\begin{pmatrix}
d_1 & 0 & -\frac{d_4}{2} & \frac{\Delta_1}{2}\\
0 & d_1 & -\frac{e_4}{2} & \frac{\Theta_1}{2}\\
-\frac{d_4}{2} & -\frac{e_4}{2} & 3 & \frac{\Xi_1}{2}\\
\frac{\Delta_1}{2} & \frac{\Theta_1}{2} & \frac{\Xi_1}{2} & 2d_1\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})
\end{pmatrix}.
$$

先检查 λ 项的正性. 当 $\alpha\in(\frac{n+2}{n+1},\frac{n+2}{n})$ 时，$d_3=n(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1)>0$，

$$
d_3\left(2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})-\frac{2n-1}{n}\frac{\Delta_3^2}{4d_3^2}\right)=\frac{n}{(2n+1)^2d_3}(1-\frac{n\alpha}{n+2})f_1(\alpha),
$$

其中 $f_1(\alpha)$ 是关于 α 的多项式：

$$
\begin{aligned}
f_1(\alpha)=&\frac{n(10n^4+35n^3+44n^2+16n-6)}{(n+2)^2}\alpha^3-\frac{22n^4+57n^3+46n^2-8}{n+2}\alpha^2\\
&+(14n^3+25n^2+8n-8)\alpha-(n+2)^2(2n-1),
\end{aligned}
$$

那么 f_1' 是一个二次函数：

$$\begin{aligned}f_1'(\alpha) =&3n(10n^4+35n^3+44n^2+16n-6)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)^2\\&-2(22n^4+57n^3+46n^2-8)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)+(14n^3+25n^2+8n-8).\end{aligned}$$

比较二次函数 $f_1'((n+2)x)$ 的对称轴与 $\dfrac{\alpha}{n+2}$ 的最小值 $\left(n+\dfrac{1}{2n}\right)^{-1}$ 的大小：

$$\begin{aligned}&\frac{22n^4+57n^3+46n^2-8}{3n(10n^4+35n^3+44n^2+16n-6)}\Big/\left(n+\frac{1}{2n}\right)^{-1}-1\\=&-\frac{16n^6+96n^5+150n^4+39n^3-66n^2+8}{6n^2(10n^4+35n^3+44n^2+16n-6)}<0,\end{aligned}$$

因此

$$f_1'(\alpha)\geqslant f_1'(\frac{n+2}{n+\frac{1}{2n}})=\frac{(2n-1)(32n^5+96n^4+64n^3-41n^2-24n+8)}{(2n^2+1)^2}>0,$$

$$f_1(\alpha)\geqslant f_1(\frac{n+2}{n+\frac{1}{2n}})=\frac{(n+2)(2n-1)(32n^5+16n^4-24n^3-28n^2+15n-2)}{(2n^2+1)^3}>0,$$

于是 $2\alpha(1-\dfrac{n\alpha}{n+2})>\dfrac{2n-1}{n}\dfrac{\varDelta_3^2}{4d_3^2}\geqslant 0$，$\forall\alpha\in[\dfrac{n+2}{n+\frac{1}{2n}},\dfrac{n+2}{n})$.

事实上，除了 λ 项以外，其余项在 $\alpha\in(1,\dfrac{n+2}{n})$ 时即为正，下面证明此事实. 注意到 $d_1=\dfrac{n\alpha}{n+2}\cdot\dfrac{n[3n+6-(n-1)\alpha]}{(2n+1)(n+2)}\geqslant\dfrac{n\alpha}{n+2}>0$，$d_2=\dfrac{n\alpha}{n+2}>0$，故只需通过计算矩阵 Q_1 的顺序主子式，验证二次型 $\mathbf{Q}_1$ 的正定性即可：

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & -\frac{d_4}{2}\\ 0 & d_1 & -\frac{e_4}{2}\\ -\frac{d_4}{2} & -\frac{e_4}{2} & 3\end{vmatrix}=\frac{n^4\alpha(3-\frac{n-1}{n+2}\alpha)}{2(n+2)(2n+1)^3}f_2(\alpha),$$

其中 $3-\dfrac{n-1}{n+2}\alpha>3-\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{n+2}{n}=\dfrac{2n+1}{n}>0$，

$$\begin{aligned}f_2(\alpha)=&-(37n^2+10n-2)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)^2+18(3n+1)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)-9\\\geqslant&\min\left\{f_2(1),f_2(\frac{n+2}{n})\right\}\\=&\min\left\{\frac{2(4n^2+40n+1)}{(n+2)^2},\frac{2(2n+1)^2}{n^2}\right\}>0.\end{aligned}$$

现在，只需验证 Q_1 的行列式为正即可：

$$\det Q_1 = \frac{n^6\alpha^3(3-\frac{n-1}{n+2}\alpha)^2}{(n+2)^3(2n+1)^4}(1-\frac{n\alpha}{n+2})f_3(\alpha),$$

其中

$$\begin{aligned} f_3(\alpha) =& -2(2n-1)(11n^2+14n+2)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right)^2 + (79n^2+58n-2)\left(\frac{\alpha}{n+2}\right) - 27n \\ \geqslant& \min\left\{ f_3(1), f_3(\frac{n+2}{n}) \right\} \\ =& \min\left\{ \frac{2n(4n^2+37n+13)}{(n+2)^2}, \frac{2(n+2)(2n+1)^2}{n^2} \right\} > 0. \end{aligned}$$

因此，当 $\alpha \in (1, \dfrac{n+2}{n})$ 时，$\mathbf{Q}_1$ 是正定的二次型.

综上所述，当 $\alpha \in [\dfrac{n+2}{n+\frac{1}{2n}}, \dfrac{n+2}{n})$ 时，存在 $\delta > 0$ 依赖于 n 和 α，使得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left\{ u^\beta \left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u} + d_2u^\alpha + d_3\lambda u \right)(D_i+E_i) + n\sqrt{-1}u_0(d_4D_i + e_4E_i - 3G_i) \right] \right\}^i_{,} \\ \geqslant& \delta u^{\beta-4}|\nabla_b u|^6, \end{aligned}$$

直接在 M 上积分，可得 $|\nabla_b u|^6 \leqslant 0$，即 u 是常数. ∎

注　注意到 $\dfrac{n+2}{n+1/(2n)} = \dfrac{n+2}{n}\left[1-\dfrac{1}{2n^2+1}\right] < \dfrac{n+2}{n}\left[1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right]$，因此情形 1 和情形 2 已经覆盖了 $n \geqslant 2$ 的情形. 本小节使用的恒等式的向量场完全由不变张量组成，但是依旧无法覆盖 $n=1$ 且 α 远离临界指标的情形，因此需要在 1 维的时候，考虑将非不变张量组成的向量场引入，构建新的恒等式，这就是下一小节讨论的内容.

2.4.3　情形 3：$n = 1$ 且 $1.06 \leqslant \alpha < 3$

沿着上一小节结尾的思路，本节寻找 1 维情形下适用的恒等式. 由于在临界指标情形下，恒等式全部由不变张量组成，因此以非不变张量作向量场时，其散度须由不变张量和临界指标情形为 0 的余项组成. 通过量纲分析，得到下面的命题中给出的恒等式.

命题 2.6　当 $n=1$ 时，设 β 为待定常数，则

$$\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}\Big\{u^{\beta}\Big[\left(\frac{\alpha}{3}(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}-\frac{\alpha}{6}u^{\alpha-1}+(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\lambda\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u}\\
&+\left(\frac{1}{2}(\beta+\frac{4}{3}\alpha-1)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}-u^{\alpha-1}+\lambda-\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right)\sqrt{-1}u_0\Big]u_1\Big\}_{,}{}^{1}\\
=&\operatorname{Re}\left[\frac{\alpha}{3}(1-\frac{2}{3}\alpha)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}-\frac{\alpha}{6}u^{\alpha-1}+(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\lambda-\frac{1}{2}(\beta+\frac{4}{3}\alpha-1)\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_1u^1\\
&+\operatorname{Re}\left[-\frac{1}{2}(\beta+\frac{4}{3}\alpha-1)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+u^{\alpha-1}-\lambda-2\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right]G_1u^1\\
&-\frac{\alpha}{3}(1-\frac{\alpha}{3})(1-\frac{2}{3}\alpha)\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

证明　注意到 1 维的时候 $E_{1\bar{1}}=0$. 由引理2.3，

$$u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-3}|\nabla_b u|^4u_1),{}^{1}=2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_1u^1+(\beta+2\alpha-3)\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}+3\Delta_b u\frac{|\nabla_b u|^4}{u^3},\tag{2.10}$$

$$u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+\alpha-2}|\nabla_b u|^2u_1),{}^{1}=u^{\alpha-1}\operatorname{Re}D_1u^1+(\beta+2\alpha-2)u^{\alpha-3}|\nabla_b u|^4+2u^{\alpha-2}\Delta_b u|\nabla_b u|^2,$$

$$u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-1}\lambda|\nabla_b u|^2u_1),{}^{1}=\lambda\operatorname{Re}D_1u^1+(\beta+\alpha-1)\lambda\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+2\lambda\Delta_b u\frac{|\nabla_b u|^2}{u},$$

$$\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-2}|\nabla_b u|^2\sqrt{-1}u_0u_1),{}^{1}\\
=&-\operatorname{Re}\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}D_1u^1-\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_1u^1-\frac{\alpha}{3}(1-\frac{2}{3}\alpha)\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\\
&-\frac{\alpha}{3}\Delta_b u\frac{|\nabla_b u|^4}{u^3}+(\alpha-1)\lambda\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}-2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_0^2,
\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta+\alpha-1}\sqrt{-1}u_0u_1),{}^{1}\\
=&-u^{\alpha-1}\operatorname{Re}G_1u^1-\frac{\alpha}{3}(1-\frac{2}{3}\alpha)u^{\alpha-3}|\nabla_b u|^4\\
&-\frac{\alpha}{3}u^{\alpha-2}\Delta_b u|\nabla_b u|^2+(\alpha-1)\lambda u^{\alpha-1}|\nabla_b u|^2-u^{\alpha-1}u_0^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta}\lambda\sqrt{-1}u_0u_1),{}^{1}\\
=&-\lambda\operatorname{Re}G_1u^1-\frac{\alpha}{3}(1-\frac{2}{3}\alpha)\lambda\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}-\frac{\alpha}{3}\lambda\Delta_b u\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+(\alpha-1)\lambda^2|\nabla_b u|^2-\lambda u_0^2,
\end{aligned}$$

$$u^{-\beta}\operatorname{Re}(u^{\beta-1}u_0^2u_1),{}^{1}$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\,\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}G_1u^1 + (\beta + \frac{4}{3}\alpha - 1)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_0^2 + \frac{\Delta_b u}{u}u_0^2.$$

由方程(1.4)，结合用

$$\left\{\frac{\alpha}{3}(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}), -\frac{\alpha}{6}, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}, \frac{1}{2}(\beta + \frac{4}{3}\alpha - 1), -1, 1, 1\right\},$$

作为系数线性组合上面七个恒等式，可知命题得证. ∎

在 $n = 1$ 的情况下，重写恒等式(2.7)：

$$\begin{aligned}
&u^{-\beta}\,\mathrm{Re}\left\{u^\beta\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u} + d_2u^\alpha + d_3\lambda u\right)D_1 + \sqrt{-1}u_0(d_4D_1 - \mu G_1)\right]\right\}^1_{,}\\
=&\left(2d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + d_2u^{\alpha-1} + d_3\lambda\right)|D_{11}|^2 + \left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + d_2u^{\alpha-1} + d_3\lambda\right)\\
&\times\left[2\alpha(1 - \frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2} + \mathscr{R}\right] + \mu|G_1|^2 - d_4\,\mathrm{Re}\,D_1G^1\\
&+\mathrm{Re}\left[\varDelta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \varDelta_2u^{\alpha-1} + \varDelta_3\lambda + \varDelta_4\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_1u^1\\
&+\mathrm{Re}\left[\varXi_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + \varXi_2u^{\alpha-1} + \varXi_3\lambda + \varXi_4\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right]G_1u^1.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中的系数如下：

$$\varDelta_1 = (\beta + 2\alpha - 2)d_1 + \frac{\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\alpha - 1\right)d_4,\ \varDelta_2 = -d_1 + (\beta + 2\alpha - 1)\,d_2 + \frac{\alpha}{3}d_4,$$

$$\varDelta_3 = d_1 + (\beta + \alpha)\,d_3 + \left(\frac{2}{3}\alpha - 1\right)d_4,\ \varDelta_4 = d_1 + \left(\beta + \frac{5}{3}\alpha - 1\right)d_4 + \frac{\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\alpha - 1\right)\mu,$$

$$\varXi_1 = 3d_1 - \frac{\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\alpha - 1\right)\mu,\ \varXi_2 = 3d_2 - \frac{\alpha}{3}\mu,\ \varXi_3 = 3d_3 - \left(\frac{2}{3}\alpha - 1\right)\mu,\ \varXi_4 = 3d_4 - \beta\mu.$$

取 $d_1 = \dfrac{\alpha}{36}(5\alpha - 3)$，$d_2 = d_3 = \dfrac{\alpha - 1}{2}$，$d_4 = 2 - \dfrac{4}{3}\alpha$，$\mu = 3$，$\beta = 1 - \alpha$，则

$$\varDelta_1 = \frac{\alpha}{108}(3 - \alpha)(17\alpha - 21),\ \varDelta_2 = \frac{\alpha}{12}(3 - \alpha),\ \varDelta_3 = \frac{1}{12}(3 - \alpha)(9\alpha - 10),$$

$$\varDelta_4 = \frac{\alpha}{12}(3 - \alpha),\ \varXi_1 = \frac{\alpha}{4}(3 - \alpha),\ \varXi_2 = \frac{\alpha - 3}{2},\ \varXi_3 = \frac{3 - \alpha}{2},\ \varXi_4 = 3 - \alpha.$$

考察(2.12)+$\frac{3-\alpha}{2}$×(2.9)：

$$
\begin{aligned}
&u^{\alpha-1}\operatorname{Re}\Big\{u^{1-\alpha}\Big[\left(\frac{\alpha}{36}(5\alpha-3)\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+\frac{\alpha-1}{2}(u^\alpha+\lambda u)\right)D_1\\
&+\sqrt{-1}u_0\left((2-\frac{4}{3}\alpha)D_1-3G_1\right)\\
&+\frac{3-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{3}(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}-\frac{\alpha}{6}u^{\alpha-1}+(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\lambda\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u}u_1\\
&+\frac{3-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{6}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}-u^{\alpha-1}+\lambda-\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right)\sqrt{-1}u_0u_1\Big]\Big\}_{,}^{\;1}\\
=&\left(\frac{\alpha}{18}(5\alpha-3)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\frac{\alpha-1}{2}(u^{\alpha-1}+\lambda)\right)|D_{11}|^2+3|G_1|^2+(\frac{4}{3}\alpha-2)\operatorname{Re}D_1G^1\\
&+\frac{\alpha}{6}(\alpha-1)(\alpha+3)(1-\frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}+\frac{\alpha}{36}(5\alpha-3)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\mathscr{R}\\
&+\frac{\alpha-1}{2}(u^{\alpha-1}+\lambda)\left[2\alpha(1-\frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]\\
&+(3-\alpha)\operatorname{Re}\left[\frac{\alpha}{108}(5\alpha-3)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}D_1u^1+\frac{7}{12}(\alpha-1)\lambda D_1u^1+\frac{\alpha}{6}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}G_1u^1\right]\\
=&\frac{\alpha-1}{2}\lambda\left[\left|D_{11}+\frac{7}{12}(3-\alpha)\frac{u_1u_1}{u}\right|^2+\frac{1}{144}(3-\alpha)(145\alpha-147)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]\\
&+\frac{\alpha-1}{2}u^{\alpha-1}\left[|D_{11}|^2+2\alpha(1-\frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]+\frac{\alpha}{36}(5\alpha-3)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\mathscr{R}+\mathbf{Q}_2,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

其中 $\mathbf{Q}_2$ 为如下二次型：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_2=&\frac{\alpha}{18}(5\alpha-3)|D_1|^2+3|G_1|^2+(\frac{4}{3}\alpha-2)\operatorname{Re}D_1G^1+(3-\alpha)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\\
&\times\left[\frac{\alpha}{108}(5\alpha-3)\operatorname{Re}D_1u^1+\frac{\alpha}{6}\operatorname{Re}G_1u^1+\frac{\alpha}{18}(\alpha-1)(\alpha+3)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right],
\end{aligned}
$$

其对应的矩阵为

$$
Q_2=\begin{pmatrix}
\frac{\alpha}{18}(5\alpha-3) & \frac{2}{3}\alpha-1 & \frac{\alpha}{216}(3-\alpha)(5\alpha-3)\\
\frac{2}{3}\alpha-1 & 3 & \frac{\alpha}{12}(3-\alpha)\\
\frac{\alpha}{216}(3-\alpha)(5\alpha-3) & \frac{\alpha}{12}(3-\alpha) & \frac{\alpha}{18}(3-\alpha)(\alpha-1)(\alpha+3)
\end{pmatrix}.
$$

先检查 λ 项的正性：当 $\alpha\in[1.06,3)$ 时，$\alpha-1>0$，$(3-\alpha)(145\alpha-147)>0$.

欲证(2.13)右侧的正性，只需验证矩阵 Q_2 在 $\alpha \in [1.06, 3)$ 的正定性即可. 计算矩阵 Q_2 的顺序主子式：

$$\frac{\alpha}{18}(5\alpha-3) > \frac{\alpha}{9} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{18}(5\alpha-3) & \frac{2}{3}\alpha-1 \\ \frac{2}{3}\alpha-1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{18}(\alpha+3)(7\alpha-6) > 0,$$

$$\det Q_2 = \frac{\alpha}{5184}(3-\alpha)(3+\alpha)f_4(\alpha),$$

其中 $f_4(\alpha) = 117\alpha^3 + 110\alpha^2 - 519\alpha + 288$，研究单调性：

$$f_4'(\alpha) = 351\alpha^2 + 220\alpha - 519 > 351 + 220 - 519 = 52 > 0,$$

那么 $f_4(\alpha) \geqslant f_4(1.06) = 0.804872 > 0$. 于是当 $\alpha \in [1.06, 3)$ 时，二次型 $\mathbf{Q}_2$ 正定.

综上所述，当 $\alpha \in [1.06, 3)$ 时，存在 $\delta > 0$ 依赖于 α，使得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\Bigg\{u^{1-\alpha}\Bigg[\left(\frac{\alpha}{36}(5\alpha-3)\frac{|\nabla_b u|^2}{u} + \frac{\alpha-1}{2}(u^\alpha+\lambda u)\right)D_1 \\
&+\sqrt{-1}u_0\left((2-\frac{4}{3}\alpha)D_1 - 3G_1\right) \\
&+\frac{3-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{3}(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} - \frac{\alpha}{6}u^{\alpha-1} + (\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\lambda\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u}u_1 \\
&+\frac{3-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{6}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} - u^{\alpha-1} + \lambda - \frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right)\sqrt{-1}u_0u_1\Bigg]\Bigg\}_{,}^{1} \\
\geqslant&\delta u^{-3-\alpha}|\nabla_b u|^6,
\end{aligned}$$

直接在 M 上积分，可得 $|\nabla_b u|^6 \leqslant 0$，即 u 是常数. ∎

注　本小节处理的 α 范围的下界 1.06 可以减少到

$$\frac{2}{351}\left\{\sqrt{194269}\cos\left[\frac{1}{3}\left(\arccos\frac{84611717}{194269^{\frac{3}{2}}} - \pi\right)\right] - 55\right\},$$

它是 f_4 的最大根，约为 1.052327. 然而下一小节讨论的恒等式可以覆盖 $(1, 1.06]$，因此无需将这里的数值确定到如此精细.

2.4.4　情形 4：$n = 1$ 且 $1 < \alpha \leqslant 1.06$

由于情形 4 远离临界指标 $\alpha = 3$，考虑的恒等式无需受到临界指标下全为不变张量的限制，因此可以考虑引入带有非不变张量的项. 通过量纲分析与线性组合的尝试，考察如下恒等式：

命题 2.7　当 $n=1$ 时，设 β 为待定常数，则

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}\left\{u^{\beta}\left[\frac{1}{3}(\frac{2}{3}\alpha-1)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^3}-\frac{\sqrt{-1}u_0}{u^2}|\nabla_b u|^2\right]u_1\right\}^{1}_{,} \\
=&\frac{2}{3}(\frac{2}{3}\alpha-1)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_1u^1+\operatorname{Re}\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}D_1u^1+\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_1u^1 \\
&+(\frac{\beta+\alpha}{3}-1)(\frac{2}{3}\alpha-1)\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}-(\alpha-1)u^{\alpha-3}|\nabla_b u|^4+2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_0^2.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

证明　$\frac{1}{3}(\frac{2}{3}\alpha-1)\times(2.10)-(2.11)$ 即可. ∎

下面结合上述命题，完成定理1.4的证明. 取 $d_1=\frac{1}{18}$，$d_2=d_3=\frac{\alpha-1}{2}$，$d_4=\frac{2}{3}$，$\mu=3$，$\beta=\frac{1}{2}$，代入恒等式(2.12)，并重写(2.12)中的系数：

$$
\varDelta_1=\frac{1}{108}(16\alpha^2-12\alpha-9),\ \varDelta_2=\frac{1}{36}(4\alpha-1)(9\alpha-7),
$$

$$
\varDelta_3=\frac{1}{36}(18\alpha^2+7\alpha-31),\ \varDelta_4=\frac{1}{18}(12\alpha^2+2\alpha-5),
$$

$$
\varXi_1=-\frac{1}{6}(4\alpha^2-6\alpha-1),\ \varXi_2=\frac{\alpha-3}{2},\ \varXi_3=\frac{3-\alpha}{2},\ \varXi_4=\frac{1}{2}.
$$

在 $\beta=\frac{1}{2}$ 时，考察 (2.12) + $\frac{3-\alpha}{2}\times$(2.9) + $\frac{9}{40}\times$(2.14)：

$$
\begin{aligned}
& u^{-\frac{1}{2}}\operatorname{Re}\Big\{u^{\frac{1}{2}}\Big[\left(\frac{1}{18}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+\frac{\alpha-1}{2}(u^\alpha+\lambda u)\right)D_1+\sqrt{-1}u_0\left(\frac{2}{3}D_1-3G_1\right)\\
&+\frac{3-\alpha}{2}\left[\left(-\frac{\alpha}{6}u^{\alpha-1}+(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\lambda\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+\left(-u^{\alpha-1}+\lambda-\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right)\sqrt{-1}u_0\right]u_1\\
&+\left((2\alpha-3)(\frac{1}{36}\alpha^2-\frac{1}{12}\alpha+\frac{1}{40})\frac{|\nabla_b u|^2}{u}-(\frac{1}{3}\alpha^2-\frac{9}{8}\alpha+\frac{3}{5})\sqrt{-1}u_0\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_1\Big]\Big\}_{,}^{\ 1}\\
=&\left[\frac{1}{9}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\frac{\alpha-1}{2}(u^{\alpha-1}+\lambda)\right]|D_{11}|^2+3|G_1|^2-\frac{2}{3}\operatorname{Re}D_1G^1\\
&+\frac{1}{2160}(80\alpha^4-600\alpha^3+1468\alpha^2-1272\alpha+405)\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}+\frac{1}{18}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\mathscr{R}\\
&+\frac{\alpha-1}{2}u^{\alpha-1}\left[-\frac{1}{60}(40\alpha^2-120\alpha+27)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]\\
&+\frac{\alpha-1}{2}\lambda\left[2\alpha(1-\frac{\alpha}{3})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+\mathscr{R}\right]+\frac{9}{20}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_0^2\\
&+\frac{1}{270}(30\alpha^3-95\alpha^2+132\alpha-63)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_1u^1\\
&+(\alpha-1)\left[\frac{1}{36}(39-7\alpha)u^{\alpha-1}+\frac{1}{9}(6\alpha+1)\lambda\right]\operatorname{Re}D_1u^1\\
&+\frac{1}{360}(360\alpha^2-365\alpha+116)\operatorname{Re}\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}D_1u^1\\
&-\frac{1}{120}(40\alpha^2+15\alpha-92)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_1u^1+(\alpha-\frac{5}{2})\operatorname{Re}\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}G_1u^1\\
=&\frac{\alpha-1}{2}u^{\alpha-1}\left[\left|D_{11}+\frac{1}{36}(39-7\alpha)\frac{u_1u_1}{u}\right|^2-\frac{4565\alpha^2-15690\alpha+10521}{6480}\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\\
&+\frac{\alpha-1}{2}\lambda\left[\left|D_{11}+\frac{1}{9}(6\alpha+1)\frac{u_1u_1}{u}\right|^2-\frac{90\alpha^2-150\alpha+1}{81}\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\\
&+\left[\frac{1}{18}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\frac{\alpha-1}{2}(u^{\alpha-1}+\lambda)\right]\mathscr{R}+\mathbf{Q}_3,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

其中 $\mathbf{Q}_3$ 为如下二次型：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_3=&\frac{1}{9}|D_1|^2+3|G_1|^2-\frac{2}{3}\operatorname{Re}D_1G^1+\frac{9}{20}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_0^2+\varDelta_4'\operatorname{Re}\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}D_1u^1\\
&+\varXi_4'\operatorname{Re}\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}G_1u^1+\varDelta_1'\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_1u^1+\varXi_1'\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_1u^1+A\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4},
\end{aligned}
$$

其对应的矩阵为

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{\Delta_4'}{2} & \frac{\Delta_1'}{2} \\ -\frac{1}{3} & 3 & \frac{\Xi_4'}{2} & \frac{\Xi_1'}{2} \\ \frac{\Delta_4'}{2} & \frac{\Xi_4'}{2} & \frac{9}{20} & 0 \\ \frac{\Delta_1'}{2} & \frac{\Xi_1'}{2} & 0 & A \end{pmatrix},$$

其中的系数如下：

$$\Delta_1' = \frac{1}{270}(30\alpha^3 - 95\alpha^2 + 132\alpha - 63),\ \Delta_4' = \frac{1}{360}(360\alpha^2 - 365\alpha + 116),$$

$$\Xi_1' = -\frac{1}{120}(40\alpha^2 + 15\alpha - 92),\ \Xi_4' = \alpha - \frac{5}{2},$$

$$A = \frac{1}{2160}(80\alpha^4 - 600\alpha^3 + 1468\alpha^2 - 1272\alpha + 405).$$

当 $\alpha \in (1, 1.06]$ 时，分别检查 $u^{\alpha-1}\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}$ 项和 $\lambda\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}$ 项的正性：

$$-(4565\alpha^2 - 15690\alpha + 10521) \geqslant -(4565 \times 1 - 15690 \times 1 + 10521) = 604 > 0,$$

$$-(90\alpha^2 - 150\alpha + 1) \geqslant -(90 \times 1.06^2 - 150 + 1) = 47.876 > 0.$$

欲证(2.15)右侧的正性，只需验证矩阵 Q_3 的正定性即可. 计算矩阵 Q_3 的顺序主子式：

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 3 \end{vmatrix} = \frac{2}{9} > 0,\ \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{\Delta_4'}{2} \\ -\frac{1}{3} & 3 & \frac{\Xi_4'}{2} \\ \frac{\Delta_4'}{2} & \frac{\Xi_4'}{2} & \frac{9}{20} \end{vmatrix} = \frac{f_5(\alpha)}{57600},\ \det Q_3 = \frac{f_6(\alpha)}{29859840000},$$

其中 $f_5(\alpha) = -43200\alpha^4 + 78000\alpha^3 - 40115\alpha^2 + 8800\alpha - 992$，

$$\begin{aligned} f_6(\alpha) =& -460800000\alpha^8 + 6320640000\alpha^7 - 25055552000\alpha^6 \\ &+ 44595172000\alpha^5 - 42848423575\alpha^4 + 24660626800\alpha^3 \\ &- 8756098960\alpha^2 + 1823449600\alpha - 252801536. \end{aligned}$$

先研究 f_5 的凹性：

$$f_5''(\alpha) = 10(-51840\alpha^2 + 46800\alpha - 8023)$$

$$<10(-51840+46800\times 1.06-8023)=-102550<0,$$

于是 f_5 是凹函数，进而 $f_5(\alpha)\geqslant \min\{f_5(1),f_5(1.06)\}=\min\{2493,1623.03\}>0.$

仿照上述过程，检查 f_6 的凹性：

$$\begin{aligned}f_6''(\alpha)=&-20(1290240000\alpha^6-13273344000\alpha^5+37583328000\alpha^4\\&-44595172000\alpha^3+25709054145\alpha^2-7398188040\alpha+875609896),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_6^{(3)}(\alpha)=&-600(258048000\alpha^5-2212224000\alpha^4+5011110400\alpha^3\\&-4459517200\alpha^2+1713936943\alpha-246606268),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_6^{(4)}(\alpha)=&-600(1290240000\alpha^4-8848896000\alpha^3\\&+15033331200\alpha^2-8919034400\alpha+1713936943),\end{aligned}$$

$$f_6^{(5)}(\alpha)=-480000(6451200\alpha^3-33183360\alpha^2+37583328\alpha-11148793),$$

$$\begin{aligned}f_6^{(6)}(\alpha)=&46080000(-201600\alpha^2+691320\alpha-391493)\\\geqslant&f_6^{(6)}(1)=46080000\times 98227>0,\end{aligned}$$

$$f_6^{(5)}(\alpha)\geqslant f_6^{(5)}(1)=480000\times 297625>0,$$

$$f_6^{(4)}(\alpha)\leqslant f_6^{(4)}(1.06)=-600\times 240932969.8544<0,$$

$$f_6^{(3)}(\alpha)\leqslant f_6^{(3)}(1)=-600\times 64747875<0,$$

$$f_6''(\alpha)\leqslant f_6''(1)=-20\times 191528001<0,$$

于是 f_6 是凹函数，进而

$$f_6(\alpha)\geqslant\min\{f_6(1),f_6(1.06)\}=\min\{26212329,2.38\times 10^7\}>0.$$

于是当 $\alpha\in(1,1.06]$ 时，二次型 $\mathbf{Q}_3$ 正定.

综上所述，当 $\alpha\in(1,1.06]$ 时，存在 $\delta>0$ 依赖于 α，使得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\{u^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{18}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+\frac{\alpha-1}{2}(u^\alpha+\lambda u)\right)D_1+\sqrt{-1}u_0\left(\frac{2}{3}D_1-3G_1\right)\right.\right.\\&+\frac{3-\alpha}{2}\left[\left(-\frac{\alpha}{6}u^{\alpha-1}+(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{3})\lambda\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+\left(-u^{\alpha-1}+\lambda-\frac{\sqrt{-1}u_0}{u}\right)\sqrt{-1}u_0\right]u_1\\&\left.\left.+\left((2\alpha-3)(\frac{1}{36}\alpha^2-\frac{1}{12}\alpha+\frac{1}{40})\frac{|\nabla_b u|^2}{u}-(\frac{1}{3}\alpha^2-\frac{9}{8}\alpha+\frac{3}{5})\sqrt{-1}u_0\right)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}u_1\right]\right\}_{,}^{1}\\\geqslant&\delta u^{-\frac{7}{2}}|\nabla_b u|^6,\end{aligned}$$

直接在 M 上积分，可得 $|\nabla_b u|^6\leqslant 0$，即 u 是常数.

结合情形 1~4，可知定理1.4得证. ∎

2.5　临界指标：定理1.3的证明

本节借助恒等式(2.8)，推出闭 CR 流形上的 Jerison-Lee 恒等式，并给出定理1.3的新证明. 定理1.3的原始证明请参考文献 [28]，此外，文献 [29] 中还有另一种证明，这两种证明也是基于 Jerison-Lee 恒等式.

取 $\alpha = \dfrac{n+2}{n}$，那么情形 2 中的待定参数为

$$d_1 = e_1 = d_2 = e_2 = d_3 = e_3 = 1,\ d_4 = -2,\ e_4 = 2,\ \mu = 3,\ \beta = -\frac{2}{n}.$$

代入上述参数，可得 $\varDelta_l = \varTheta_l = \varXi_l = 0$，$l = 1, 2, 3, 4$. 于是恒等式(2.8)化为

$$\begin{aligned}
&u^{\frac{2}{n}}\,\mathrm{Re}\left\{u^{-\frac{2}{n}}\left[\left(\frac{|\nabla_b u|^2}{u} + u^{\frac{n+2}{n}} + \lambda u\right)(D_i + E_i) - n\sqrt{-1}u_0(2D_i - 2E_i + 3G_i)\right]\right\}^{i}_{,}\\
=&u^{-2}\sum_{i,j,k=1}^{n}|D_{ij}u_{\bar{k}} + E_{i\bar{k}}u_j|^2 + \frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\mathscr{R} + (u^{\frac{2}{n}} + \lambda)\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2 + |E_{i\bar{j}}|^2 + \mathscr{R})\\
&+\sum_{i=1}^{n}(|G_i + D_i|^2 + |G_i - E_i|^2 + |G_i|^2).
\end{aligned}$$

这是著名的 Jerison-Lee 恒等式在 CR 几何的版本. 在其两侧同时乘以 $u^{-\frac{2}{n}}$，并在 M 上积分，得 $D_{ij} = 0$、$E_{i\bar{j}} = 0$、$G_i = 0$，且 $\mathscr{R} = 0$. 注意到 $\lambda \leqslant \dfrac{n^2}{4}$，且

$$\mathscr{R} = R_{i\bar{j}}u^i u^{\bar{j}} - \frac{4(n+1)}{n^2}\lambda|\nabla_b u|^2 \geqslant 0$$

取等，如果 u 不是常数，必须 $\mathrm{Ric} = (n-1)h$，于是 M 是 Einstein 的. 后续讨论过程与文献 [28] 完全一样，进而可以完成定理1.3的证明. ∎

注　本节得到的恒等式只对应于 Jerison-Lee 在文献 [13] 的三个恒等式中最著名的那一个. 其余两个恒等式的由来，以及为何会产生这些恒等式，将在下一章详细讨论.

第 3 章　Heisenberg 群上的（次）临界指标方程

本章利用第2章次临界指标情形 2 的恒等式(2.8)，对定理1.1给出新证明. 方程(1.3)的正则性理论请参考文献 [12]，正则性保证了本章所有计算在分布意义下是合理的，因此本章默认 u 是方程(1.3)的光滑正解.

本章将继续沿用第2章不变张量 D_{ij}、$E_{i\bar{j}}$、G_i 的定义，在 Heisenberg 群上，张量的指标全部在下面. 通过在第2章所有关于量纲分析、不变张量、恒等式的讨论中令 $\lambda=0$、$R_{i\bar{j}}=0$ 和 $h_{i\bar{j}}=\delta_{i\bar{j}}$，得到的结论完全适用于本章在 $\mathbb{H}^n$ 上的讨论.

本章会大量提及正定恒等式的说法，此时可能指的是恒等式右侧相应的二次型半正定，当然这时会排除掉 $0=0$ 的平凡情形. 事实上，半正定和正定不会影响讨论问题的本质.

3.1　Jerison-Lee 之问

将第2章得到的不变张量限制到 $\mathbb{H}^n$ 上：

$$D_{ij}=u_{ij}-\alpha\frac{u_iu_j}{u},$$

$$E_{i\bar{j}}=u_{i\bar{j}}-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{u_iu_{\bar{j}}}{u}-\frac{1}{n}\left(\Delta_bu+n\sqrt{-1}u_0-\frac{n\alpha}{n+2}\frac{|\nabla_bu|^2}{u}\right)\delta_{i\bar{j}},$$

$$G_i=n\sqrt{-1}u_{0i}-\frac{n(n+1)}{n+2}\alpha\frac{\sqrt{-1}u_0u_i}{u}-\frac{\alpha}{n+2}\frac{\Delta_bu}{u}u_i+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_bu|^2}{u^2}u_i.$$

为了证明定理1.1，Jerison-Lee 使用计算机给出了如下三个线性无关的恒等式，它们分别是文献 [13] 中的 (4.2)、(4.3)、(4.4)：

$$\begin{aligned}&u^{\frac{2}{n}}\operatorname{Re}\left\{u^{-\frac{2}{n}}\left[\left(\frac{|\nabla_bu|^2}{u}+u^{\frac{n+2}{n}}\right)(D_i+E_i)-n\sqrt{-1}u_0(2D_i-2E_i+3G_i)\right]\right\}_{,\bar{i}}\\ =&u^{\frac{2}{n}}\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\sum_{i=1}^{n}(|G_i|^2+|G_i+D_i|^2+|G_i-E_i|^2)\\ &+u^{-2}\sum_{i,j,k=1}^{n}|D_{ij}u_{\bar{k}}+E_{i\bar{k}}u_j|^2,\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$
\begin{aligned}
&u^{\frac{2}{n}}\operatorname{Re}\Big\{u^{-\frac{2}{n}}\Big\{\Big(nu^{\frac{n+2}{n}}-2n^2\sqrt{-1}u_0\Big)D_i+\Big((n+2)\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+u^{\frac{n+2}{n}}+2n\sqrt{-1}u_0\Big)E_i\\
&-(n+2)n\sqrt{-1}u_0G_i+n\Big[D_ju_{\bar{j}}-E_ju_{\bar{j}}+\frac{n-1}{n^2}\Big(\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+u^{\frac{2}{n}}|\nabla_b u|^2\\
&\qquad-n\frac{|\nabla_b u|^2\cdot n\sqrt{-1}u_0}{u}+(n+1)u^{\frac{n+2}{n}}\cdot n\sqrt{-1}u_0-(n+1)n^2u_0^2\Big)\Big]\frac{u_i}{u}\Big\}\Big\}_{,\bar{i}}\\
=&(n+2)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^n|E_{i\bar{j}}|^2+\sum_{i=1}^n|E_i|^2+(n-2)\sum_{i=1}^n|D_i|^2+(n+1)\sum_{i=1}^n|G_i+D_i|^2\\
&+\sum_{i=1}^n|G_i-D_i-E_i|^2+u^{\frac{2}{n}}\sum_{i,j=1}^n(|E_{i\bar{j}}|^2+n|D_{ij}|^2),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{\frac{2}{n}}\operatorname{Re}\Big\{u^{-\frac{2}{n}}\Big\{\Big(\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+u^{\frac{n+2}{n}}\Big)(D_i-2E_i)\\
&\qquad-n\sqrt{-1}u_0[(3n-1)D_i-(3n+2)E_i+3nG_i]\Big\}\Big\}_{,\bar{i}}\\
=&\left[\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+u^{\frac{2}{n}}\right]\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2-2|E_{i\bar{j}}|^2)+\sum_{i=1}^n(|D_i|^2-2|E_i|^2+3n|G_i|^2)\\
&-\operatorname{Re}D_iE_{\bar{i}}+(3n-1)\operatorname{Re}D_iG_{\bar{i}}-(3n+2)\operatorname{Re}E_iG_{\bar{i}},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

在这里，三个恒等式使用不变张量的语言来描述，这比原论文更加简洁. Jerison-Lee 在文献 [13] 中提出了问题：是否存在一套理论框架能够找出合适的微分恒等式，以及针对方程(1.3)，是否合适的微分恒等式只能是上述三个恒等式的线性组合？

事实上，量纲分析和不变张量技术即为 Jerison-Lee 寻求的理论框架，而且 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型恒等式中，符合需要的恒等式只能是 Jerison-Lee 寻找的三个恒等式的线性组合，这个回答分为高维和 1 维情况，被整理为如下两个命题. 本章的后半部分将会证明这两个命题，以回答 Jerison-Lee 之问.

命题 3.1　当 $n\geqslant 2$ 时，所有正定的 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型恒等式为

$$
\begin{aligned}
&u^{\frac{2}{n}}\operatorname{Re}\Bigg\{u^{-\frac{2}{n}}\Bigg\{\Bigg(\Bigg(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+(d_1+a)u^{\frac{n+2}{n}}+(d_1-\frac{n-2}{n}a-\mu)n\sqrt{-1}u_0\Bigg)D_i\\
&+\Bigg(\frac{(n+2)(d_1+a)-\mu}{n-1}\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+\frac{(n+2)d_1+(2+\frac{1}{n})a-\mu}{n-1}u^{\frac{n+2}{n}}\\
&\qquad+\frac{-(n+2)d_1-(n+\frac{2}{n})a+n\mu}{n-1}\cdot n\sqrt{-1}u_0\Bigg)E_i-\mu n\sqrt{-1}u_0G_i\\
&+a\Bigg[D_ju_{\bar{j}}-E_ju_{\bar{j}}+\frac{n-1}{n^2}\Bigg(\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}+u^{\frac{2}{n}}|\nabla_b u|^2-n\frac{|\nabla_b u|^2\cdot n\sqrt{-1}u_0}{u}\\
&\qquad+(n+1)u^{\frac{n+2}{n}}\cdot n\sqrt{-1}u_0-(n+1)n^2u_0^2\Bigg)\Bigg]\frac{u_i}{u}\Bigg\}\Bigg\}_{,\bar{i}} \qquad (3.4)\\
=&\Bigg[d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+(d_1+a)u^{\frac{2}{n}}\Bigg]\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2+(d_1+2a)\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2\\
&+\Bigg[\frac{(n+2)(d_1+a)-\mu}{n-1}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\frac{(n+2)d_1+(2+\frac{1}{n})a-\mu}{n-1}u^{\frac{2}{n}}\Bigg]\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2\\
&+\frac{(n+2)d_1+3a-\mu}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|E_i|^2+\mu\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2+\frac{(2n+1)d_1+3a-\mu}{n-1}\operatorname{Re}D_iE_{\bar{i}}\\
&+(-d_1+\frac{n-2}{n}a+\mu)\operatorname{Re}D_iG_{\bar{i}}+\frac{(n+2)d_1+(n+\frac{2}{n})a-n\mu}{n-1}\operatorname{Re}E_iG_{\bar{i}}.
\end{aligned}
$$

其中参数 d_1,a,μ 满足

$$d_1\geqslant\max\{0,-a\},\ (n+2)d_1-\mu\geqslant\max\left\{-(n+2)a,-(2+\frac{1}{n})a\right\}, \qquad (3.5)$$

以及三阶对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 半正定，其中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$B_{11}=\mu,\ B_{12}=\frac{1}{2}(-d_1+\frac{n-2}{n}a+\mu),$$

$$B_{13}=\frac{(n+2)d_1+(n+\frac{2}{n})a-n\mu}{2(n-1)},\ B_{22}=2(d_1+a),$$

$$B_{23}=\frac{(2n+1)d_1+3a-\mu}{2(n-1)},\ B_{33}=\frac{2n-1}{(n-1)^2}\left[(n+2)d_1+\frac{n^2+5n-3}{2n-1}a-\mu\right].$$

注　三个待定常数 d_1,a,μ 在线性相关意义下，决定了如 Jerison-Lee 所说的三维恒等式族. 如果取 $d_1=1$，$a=0$，$\mu=3$，可以得到(3.1)，这个恒等式正是被用来在文献 [13] 中得到临界指标情形下解的分类定理的恒等式；若取 $d_1=0$，$a=n$，$\mu=n+2$，可以得到(3.2)，这也是个正定的恒等式；若取 $d_1=1$，$a=0$，

$\mu = 3n$，可以得到(3.3)，它虽然不是正定的，但是它出现过的项均在(3.1)和(3.2)中出现过，因此可以将(3.3)作为扰动叠加到(3.1)和(3.2)上，也能得到新的正定恒等式.

注意到 $n = 1$ 时，$E_{1\bar{1}}$ 退化为 0，因此三个 Jerison-Lee 恒等式(3.1)、(3.2)、(3.3)是相同的恒等式，这对应于一维情形的如下命题.

命题 3.2　当 $n = 1$ 时，正定的 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型恒等式只能是经典 Jerison-Lee 恒等式(3.1)的倍数.

3.2　微分恒等式

本节借助第2章的情形 2，给出本章需要的恒等式.

通过令 $\lambda = 0$、$R_{i\bar{j}} = 0$ 和 $h_{i\bar{j}} = \delta_{i\bar{j}}$，在 $\mathbb{H}^n$ 上重写恒等式(2.7)，得

$$
\begin{aligned}
& u^{-\beta}\operatorname{Re}\left\{u^{\beta}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^{\frac{n+2}{n}}+d_4n\sqrt{-1}u_0\right)D_i\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(e_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+e_2u^{\frac{n+2}{n}}+e_4n\sqrt{-1}u_0\right)E_i-\mu n\sqrt{-1}u_0G_i\right]\right\}_{,\bar{i}}\\
={}&\left[d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+d_2u^{\frac{2}{n}}\right]\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2+d_1\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2+\left[e_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+e_2u^{\frac{2}{n}}\right]\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2\\
&+e_1\sum_{i=1}^{n}|E_i|^2+\mu\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2+(d_1+e_1)\operatorname{Re}D_iE_{\bar{i}}-d_4\operatorname{Re}D_iG_{\bar{i}}-e_4\operatorname{Re}E_iG_{\bar{i}}\\
&+\operatorname{Re}\left[\varDelta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\varDelta_2u^{\frac{2}{n}}+\varDelta_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_iu_{\bar{i}}+\left[\varTheta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\varTheta_2u^{\frac{2}{n}}\right]E_iu_{\bar{i}}\\
&+\operatorname{Re}\left[\varXi_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\varXi_2u^{\frac{2}{n}}+\varXi_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]G_iu_{\bar{i}},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

其中系数为

$$
\begin{aligned}
\varDelta_1 &= (\beta+\frac{n+3}{n})d_1-\frac{n-1}{n}e_1+\frac{1}{n}d_4,\\
\varDelta_2 &= -\frac{1}{n}d_1+(\beta+\frac{n+4}{n})d_2-\frac{n-1}{n}e_2+\frac{1}{n}d_4,\\
\varDelta_4 &= \frac{1}{n}d_1+(\beta+\frac{n+3}{n})d_4+\frac{n-1}{n}e_4+\frac{1}{n}\mu,\\
\varTheta_1 &= -\frac{n+2}{n}d_1+(\beta+\frac{n+2}{n})e_1+\frac{1}{n}e_4,\\
\varTheta_2 &= -\frac{1}{n}e_1-\frac{n+2}{n}d_2+(\beta+\frac{n+3}{n})e_2+\frac{1}{n}e_4,\\
\varXi_1 &= \frac{n+2}{n}d_1-\frac{n-1}{n}e_1-\frac{1}{n}\mu,
\end{aligned}
$$

$$\Xi_2 = \frac{n+2}{n}d_2 - \frac{n-1}{n}e_2 - \frac{1}{n}\mu,$$
$$\Xi_4 = \frac{n+2}{n}d_4 + \frac{n-1}{n}e_4 - \beta\mu.$$

3.3　次临界指标：定理1.2的证明

在本节，$\{C_l\}_{l=1}^4$ 均为某个固定的只依赖于 n, α 的正的常数.

先考虑 $\alpha > 1$ 的情况. 通过选取和第2章情形 2 完全相同的系数

$$d_1 = e_1 = \frac{n^2\alpha[3n+6-(n-1)\alpha]}{(2n+1)(n+2)^2},\ d_2 = e_2 = \frac{n\alpha}{n+2},$$

$$d_4 = \frac{n}{2n+1}(3 - \frac{7n+2}{n+2}\alpha),\ e_4 = \frac{n(3+\alpha)}{2n+1},\ \beta = 1-\alpha,$$

代入到恒等式(3.6)中，得

$$\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}\left\{u^{\beta}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u} + d_2 u^{\alpha}\right)(D_i + E_i)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. + n\sqrt{-1}u_0(d_4 D_i + e_4 E_i - 3G_i)\right]\right\}_{,\bar{i}}\\
=&d_1 u^{-2}\sum_{i,j,k=1}^{n}|D_{ij}u_{\overline{k}} + E_{i\overline{k}}u_j|^2\\
&+ d_2 u^{\alpha-1}\sum_{i,j=1}^{n}\left[|D_{ij}|^2 + |E_{i\overline{j}}|^2 + 2\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right] + \mathbf{Q}_1,
\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中 $\mathbf{Q}_1$ 为如下二次型：

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1 =&d_1\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2 + d_1\sum_{i=1}^{n}|E_i|^2 + 3\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2 - d_4\operatorname{Re}D_iG^i - e_4\operatorname{Re}E_iG^i\\
&+ \varDelta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}D_iu^i + \varTheta_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}E_iu^i + \varXi_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re}G_iu^i\\
&+ 2d_1\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4},
\end{aligned}$$

其对应的矩阵为

$$Q_1 = \begin{pmatrix}
d_1 & 0 & -\frac{d_4}{2} & \frac{\varDelta_1}{2}\\
0 & d_1 & -\frac{e_4}{2} & \frac{\varTheta_1}{2}\\
-\frac{d_4}{2} & -\frac{e_4}{2} & 3 & \frac{\varXi_1}{2}\\
\frac{\varDelta_1}{2} & \frac{\varTheta_1}{2} & \frac{\varXi_1}{2} & 2d_1\alpha(1-\frac{n\alpha}{n+2})
\end{pmatrix},$$

其中系数为

$$\Delta_1=\frac{2n^2\alpha[(4n+5)\alpha-3n-6]}{(2n+1)(n+2)^2}(1-\frac{n\alpha}{n+2}),$$

$$\Theta_1=-\frac{6n^2\alpha(\alpha+n+2)}{(2n+1)(n+2)^2}(1-\frac{n\alpha}{n+2}),\ \Xi_1=\frac{6n\alpha}{2n+1}(1-\frac{n\alpha}{n+2}).$$

当然，也可以通过在 $\mathbb{H}^n$ 上重写恒等式(2.8)的方式得到(3.7).

根据第2章的讨论，当 $\alpha\in(1,\frac{n+2}{n})$ 时，$d_1>0$，$d_2>0$，且 Q_1 正定. 因此根据恒等式(3.7)，存在 $\delta>0$ 只依赖于 n,α，使得

$$\begin{aligned}&u^{\alpha-1}\operatorname{Re}\left\{u^{1-\alpha}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^{\alpha}\right)(D_i+E_i)+n\sqrt{-1}u_0(d_4D_i+e_4E_i-3G_i)\right]\right\}_{,\bar{i}}\\ \geqslant&\delta u^{\alpha-1}\left[\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]+\delta\left[\sum_{i=1}^n(|D_i|^2+|E_i|^2+|G_i|^2)+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right].\end{aligned}$$

在上式两侧同时乘以 $u^{1-\alpha}\eta^{\gamma}$，并在 $\mathbb{H}^n$ 上积分，根据散度定理，得

$$\begin{aligned}&\delta\int\left[\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\eta^{\gamma}\\&+\delta\int u^{1-\alpha}\left[\sum_{i=1}^n(|D_i|^2+|E_i|^2+|G_i|^2)+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right]\eta^{\gamma}\\ \leqslant&-\gamma\int\operatorname{Re}u^{1-\alpha}\left[\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^{\alpha}\right)(D_i+E_i)\right.\\&\left.+n\sqrt{-1}u_0(d_4D_i+e_4E_i-3G_i)\right]\eta^{\gamma-1}\eta_{,\bar{i}},\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 $\gamma>1$ 且只依赖于 n,α. 由 Young 不等式，

$$\begin{aligned}&-\gamma\int\operatorname{Re}u^{1-\alpha}\left(d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u}+d_2u^{\alpha}\right)(D_i+E_i)\eta^{\gamma-1}\eta_{,\bar{i}}\\ \leqslant&\frac{\delta}{3}\int u^{1-\alpha}\sum_{i=1}^n(|D_i|^2+|E_i|^2)\eta^{\gamma}+\frac{\delta}{3}\int\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)\eta^{\gamma}\\&+C(n,\alpha)\int(u^{-1-\alpha}|\nabla_b u|^4+|\nabla_b u|^2)\eta^{\gamma-2}|\nabla_b\eta|^2\\ \leqslant&\frac{\delta}{3}\int u^{1-\alpha}\left[\sum_{i=1}^n(|D_i|^2+|E_i|^2)+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right]\eta^{\gamma}+C(n,\alpha)\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}|\nabla_b\eta|^6\\&+\frac{\delta}{3}\int\left[\sum_{i,j=1}^n(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\eta^{\gamma}+C(n,\alpha)\int u^2\eta^{\gamma-4}|\nabla_b\eta|^4,\end{aligned}$$

$$-\gamma\int\operatorname{Re}u^{1-\alpha}\cdot n\sqrt{-1}u_0(d_4D_i+e_4E_i-3G_i)\eta^{\gamma-1}\eta_{,\bar{i}}$$

$$\leqslant\frac{\delta}{3}\int u^{1-\alpha}\sum_{i=1}^{n}(|D_i|^2+|E_i|^2+|G_i|^2)\eta^{\gamma}+C(n,\alpha)\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}|\nabla_b\eta|^2.$$

将上述两式代入(3.8)，结合截断函数的性质，得

$$\begin{aligned}&\delta\int\left[\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\eta^{\gamma}\\&+\delta\int u^{1-\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n}(|D_i|^2+|E_i|^2+|G_i|^2)+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right]\eta^{\gamma}\\&\leqslant C(n,\alpha)R^{-6}\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}+C(n,\alpha)R^{-4}\int u^2\eta^{\gamma-4}+C_1R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

通过量纲分析，考虑如下恒等式以处理(3.9)中的 C_1 项，它可以通过引理2.3的第三个等式（或者 G_i 的定义）直接计算得到：

$$\begin{aligned}u^{\alpha-1}\operatorname{Re}(u^{1-\alpha}\cdot n\sqrt{-1}u_0u_i)_{,\bar{i}}=&-\operatorname{Re}G_iu_{\bar{i}}+\frac{\alpha}{n+2}u^{\alpha-1}|\nabla_b u|^2\\&+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}-n^2u_0^2.\end{aligned}$$

在上式两侧同时乘以 $u^{1-\alpha}\eta^{\gamma-2}$，并在 $\mathbb{H}^n$ 上积分，得

$$\begin{aligned}n^2\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}=&(\gamma-2)\int\operatorname{Re}u^{1-\alpha}\cdot n\sqrt{-1}u_0u_i\eta^{\gamma-3}\eta_{,\bar{i}}-\int u^{1-\alpha}\operatorname{Re}G_iu_{\bar{i}}\eta^{\gamma-2}\\&+\frac{\alpha}{n+2}\int|\nabla_b u|^2\eta^{\gamma-2}+\frac{n\alpha}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha-1\right)\int u^{-1-\alpha}|\nabla_b u|^4\eta^{\gamma-2}.\end{aligned}$$

使用 Young 不等式估计上式右侧，得

$$\begin{aligned}&C_1R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}\\&\leqslant\frac{C_1}{2}R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}+\frac{\delta}{2}\int u^{1-\alpha}\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2\eta^{\gamma}+C(n,\alpha)R^{-4}\int u^{1-\alpha}|\nabla_b u|^2\eta^{\gamma-4}\\&\quad+C(n,\alpha)R^{-2}\int|\nabla_b u|^2\eta^{\gamma-2}+C(n,\alpha)R^{-2}\int u^{-1-\alpha}|\nabla_b u|^4\eta^{\gamma-2}\\&\leqslant\frac{C_1}{2}R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}+\frac{\delta}{3}\int u^{1-\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right]\eta^{\gamma}+\frac{\delta}{3}\int\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\eta^{\gamma}\\&\quad+C(n,\alpha)R^{-6}\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}+C(n,\alpha)R^{-4}\int u^2\eta^{\gamma-4}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

在(3.10)中解出 $C_1R^{-2}\int u^{1-\alpha}u_0^2\eta^{\gamma-2}$，并将其代入(3.9)，得

$$\begin{aligned}&\delta\int\left[\sum_{i,j=1}^{n}(|D_{ij}|^2+|E_{i\bar{j}}|^2)+\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2}\right]\eta^\gamma\\&+\delta\int u^{1-\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n}(|D_i|^2+|E_i|^2+|G_i|^2)+\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4}\right]\eta^\gamma\\\leqslant&C_2R^{-6}\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}+C_3R^{-4}\int u^2\eta^{\gamma-4},\end{aligned}\tag{3.11}$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小待定，且只依赖于 n,α. 直接使用方程(1.3)和 Young 不等式，得到 C_2、C_3 两项的关系：

$$R^{-6}\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}\leqslant\varepsilon R^{-4}\int u^2\eta^{\gamma-4}+C(n,\alpha)R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}\int\eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}},$$

$$\begin{aligned}&R^{-4}\int u^2\eta^{\gamma-4}=-R^{-4}\int u^{2-\alpha}\Delta_b u\eta^{\gamma-4}\\=&(2-\alpha)R^{-4}\int u^{1-\alpha}|\nabla_b u|^2\eta^{\gamma-4}+(\gamma-4)R^{-4}\int u^{2-\alpha}\eta^{\gamma-5}\operatorname{Re}u_i\eta_{,\bar{i}}\\\leqslant&\varepsilon\int u^{-3-\alpha}|\nabla_b u|^6\eta^\gamma+C_4R^{-6}\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}.\end{aligned}$$

取定 $\varepsilon>0$ 同时满足 $\dfrac{\varepsilon^2C_2}{1-\varepsilon C_4}<\dfrac{\delta}{3}$ 和 $\dfrac{\varepsilon C_3}{1-\varepsilon C_4}<\dfrac{\delta}{3}$，那么根据上述两式，

$$C_2R^{-6}\int u^{3-\alpha}\eta^{\gamma-6}\leqslant\frac{\delta}{3}\int u^{-3-\alpha}|\nabla_b u|^6\eta^\gamma+C(n,\alpha)R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}\int\eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}},\tag{3.12}$$

$$C_3R^{-4}\int u^2\eta^{\gamma-4}\leqslant\frac{\delta}{3}\int u^{-3-\alpha}|\nabla_b u|^6\eta^\gamma+C(n,\alpha)R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}\int\eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}.\tag{3.13}$$

将(3.12)和(3.13)代入(3.11)，得

$$\int u^{-3-\alpha}|\nabla_b u|^6\eta^\gamma\leqslant C(n,\alpha)R^{-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}\int\eta^{\gamma-\frac{4\alpha}{\alpha-1}}.$$

取 $\gamma=\dfrac{4\alpha}{\alpha-1}+1$，根据截断函数的性质，以及 $|B_R|=C(n)R^{2n+2}$，得

$$\int_{B_R}u^{-3-\alpha}|\nabla_b u|^6\leqslant C(n,\alpha)R^{2n+2-\frac{4\alpha}{\alpha-1}},$$

其中 $2n+2-\dfrac{4\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{(2n-2)\alpha-(2n+2)}{\alpha-1}<-\dfrac{4}{n(\alpha-1)}<0,$ 这迫使 u 为常数，进而方程(1.3)在 $1<\alpha<\dfrac{n+2}{n}$ 时无正解.

如果 $\alpha\leqslant1$，需要使用 Serrin 技术才可以得到 Liouville 型定理，具体如下：取 a,b 为待定常数，在方程(1.3)两侧同时乘以 $u^a\eta^b$ 并分部积分，得

$$\int u^{a+\alpha}\eta^b-a\int u^{a-1}|\nabla_b u|^2\eta^b=b\int u^a\eta^{b-1}\nabla_b u\cdot\nabla_b\eta.\tag{3.14}$$

当 $a<0$ 时，根据均值不等式，

$$b\int u^a\eta^{b-1}\nabla_b u\cdot\nabla_b\eta\leqslant-\frac{a}{2}\int u^{a-1}|\nabla_b u|^2\eta^b-\frac{b^2}{2a}\int u^{a+1}\eta^{b-2}|\nabla_b\eta|^2.$$

将其代入(3.14)，得

$$\int u^{a+\alpha}\eta^b\leqslant-\frac{b^2}{2a}\int u^{a+1}\eta^{b-2}|\nabla_b\eta|^2. \tag{3.15}$$

如果 $\alpha<0$，取 $a<-1$，那么由 Young 不等式，

$$-\frac{b^2}{2a}\int u^{a+1}\eta^{b-2}|\nabla_b\eta|^2\leqslant\frac{1}{2}\int u^{a+\alpha}\eta^b+C(a,b)\int\eta^{b-\frac{2(a+\alpha)}{\alpha-1}}|\nabla_b\eta|^{\frac{2(a+\alpha)}{\alpha-1}}.$$

将上式代入(3.15)，根据截断函数的性质，当取定 $b=\dfrac{2(a+\alpha)}{\alpha-1}+1$ 时，

$$\int u^{a+\alpha}\eta^b\leqslant C(n,a)R^{2n+2-\frac{2(a+\alpha)}{\alpha-1}}.$$

由于 $\alpha<1$，只要取定 a 充分小，使得 $2n+2-\dfrac{2(a+\alpha)}{\alpha-1}<0$，通过令 $R\to\infty$，即可得到矛盾.

如果 $\alpha=1$，直接选取 $a=-1$，$b=2$，代入(3.15)，得

$$C(n)R^{2n+2}\leqslant\int\eta^2\leqslant2\int|\nabla_b\eta|^2\leqslant C(n)R^{2n}.$$

令 $R\to\infty$，立刻得到矛盾.

综上所述，当 $\alpha<\dfrac{n+2}{n}$ 时，方程(1.3)无正解. ∎

3.4　回答 Jerison-Lee 之问：命题3.1、命题3.2的证明

本节通过详细讨论，得到所有正定的 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型恒等式，且它的右侧仅由含有不变张量的项组成. 借此恒等式，能够回答 Jerison-Lee 之问.

3.4.1　$\{(0,0),2,6,+\}$ 型不变张量恒等式

若恒等式除向量场的散度外均由含不变张量的项组成，则称其为不变张量恒等式. 想要回答 Jerison-Lee 之问，需要先找到所有 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型不变张量的恒等式，然后在此基础上考虑正定性.

首先，尝试寻找除(3.6)外由不变张量组成向量场的 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型不变张量恒等式. 注意到 $\mathbb{H}^n$ 上有如下三阶导数交换恒等式：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}[u_{jk,\bar{i}}u_{\bar{j}}u_{\bar{k}}u_i-u_{j\bar{k},\bar{i}}u_{\bar{j}}u_ku_i]\\=&\mathrm{Re}[u_{j\bar{i},k}u_{\bar{j}}u_{\bar{k}}u_i+2\sqrt{-1}u_{j0}u_{\bar{j}}|\nabla_bu|^2-u_{j\bar{k},\bar{i}}u_{\bar{j}}u_ku_i]\\=&\mathrm{Re}[u_{\bar{i}j,k}u_{\bar{j}}u_{\bar{k}}u_i+4\sqrt{-1}u_{0i}u_{\bar{i}}|\nabla_bu|^2-u_{j\bar{k},\bar{i}}u_{\bar{j}}u_ku_i]\\=&4|\nabla_bu|^2\,\mathrm{Re}\sqrt{-1}u_{0i}u_{\bar{i}}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

(3.16)在 CR 流形上之所以没被考虑，是因为在交换过程中会产生 Webster 曲率，而在只假定了 Ricci 曲率下界条件的情况下，无法处理出现的 Webster 曲率项，因此恒等式(3.16)只在空间形式（即截面曲率为常值的流形）上才可能好用.

应用(3.16)，构建 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型恒等式：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}[u_{jk}u_{\bar j}u_{\bar k}u_i - u_{j\bar k}u_{\bar j}u_k u_i]_{,\bar i}\\
=&\operatorname{Re}[u_{jk,\bar i}u_{\bar j}u_{\bar k}u_i - u_{j\bar k,\bar i}u_{\bar j}u_k u_i] + \operatorname{Re} u_{jk}u_{\bar j\bar i}u_{\bar k}u_i + \operatorname{Re} u_{jk}u_{\bar j}u_{\bar k\bar i}u_i\\
&- \operatorname{Re} u_{j\bar k}u_{\bar j\bar i}u_k u_i - \operatorname{Re} u_{j\bar k}u_{\bar j}u_{k\bar i}u_i + u_{jk}u_{\bar j}u_{\bar k}u_{i\bar i} - \operatorname{Re} u_{j\bar k}u_{\bar j}u_k u_{i\bar i}\\
=&4|\nabla_b u|^2 \operatorname{Re}\sqrt{-1}u_{0i}u_{\bar i} + 2\sum_j |u_{jk}u_{\bar k}|^2 - \operatorname{Re} u_{j\bar k}u_k u_{\bar j\bar i}u_i - \sum_k |u_{j\bar k}u_{\bar j}|^2\\
&- 2\operatorname{Re}\sqrt{-1}u_0 u_{i\bar j}u_{\bar i}u_j + \Delta_b u \operatorname{Re} u_{ij}u_{\bar i}u_{\bar j} + \operatorname{Re} n\sqrt{-1}u_0 u_{ij}u_{\bar i}u_{\bar j}\\
&- \Delta_b u \operatorname{Re} u_{i\bar j}u_{\bar i}u_j - n\operatorname{Re}\sqrt{-1}u_0 u_{i\bar j}u_{\bar i}u_j\\
=&2u^2\sum_{i=1}^n |D_i|^2 - u^2\sum_{i=1}^n |E_i|^2 - u^2 \operatorname{Re} D_i E_{\bar i} + \frac{4}{n}|\nabla_b u|^2 \operatorname{Re} G_i u_{\bar i}\\
&+ \operatorname{Re}\left[\frac{3(n+3)}{n}|\nabla_b u|^2 + \frac{n-1}{n}u\Delta_b u + (n+1)\sqrt{-1}uu_0\right] D_i u_{\bar i}\\
&- \left[3|\nabla_b u|^2 + \frac{n+2}{n}u\Delta_b u\right] E_i u_{\bar i} + \frac{9n+5}{n^2}\frac{|\nabla_b u|^6}{u^2} + \frac{4}{n^2}\frac{|\nabla_b u|^4\Delta_b u}{u}\\
&- \frac{n+1}{n^2}|\nabla_b u|^2(\Delta_b u)^2 + (n+1)|\nabla_b u|^2 u_0^2.
\end{aligned}
$$

由引理2.3，将上式的向量场中 u_{jk} 和 $u_{j\bar k}$ 换成不变张量：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}[D_{jk}u_{\bar j}u_{\bar k}u_i - E_{j\bar k}u_{\bar j}u_k u_i]_{,\bar i}\\
=&\operatorname{Re}[u_{jk}u_{\bar j}u_{\bar k}u_i - u_{j\bar k}u_{\bar j}u_k u_i]_{,\bar i} + \operatorname{Re}\left[-\frac{3}{n}\frac{|\nabla_b u|^4}{u}u_i + \frac{1}{n}\Delta_b u|\nabla_b u|^2 u_i + \sqrt{-1}u_0|\nabla_b u|^2 u_i\right]_{,\bar i}\\
=&2u^2\sum_{i=1}^n |D_i|^2 - u^2\sum_{i=1}^n |E_i|^2 - u^2\operatorname{Re} D_i E_{\bar i} + \frac{3}{n}|\nabla_b u|^2 \operatorname{Re} G_i u_{\bar i}\\
&+ \operatorname{Re}\left[\frac{3(n+1)}{n}|\nabla_b u|^2 + u\Delta_b u + n\sqrt{-1}uu_0\right] D_i u_{\bar i} - \left[\frac{3(n+2)}{n}|\nabla_b u|^2 + \frac{n+1}{n}u\Delta_b u\right] E_i u_{\bar i},
\end{aligned}
$$

引进 u 的幂次，以得到与恒等式(3.6)具有相同量纲的恒等式：

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta-1}(D_j u_{\bar j} - E_j u_{\bar j})u_i]_{,\bar i}\\
=&2\sum_{i=1}^n |D_i|^2 - \sum_{i=1}^n |E_i|^2 - \operatorname{Re} D_i E_{\bar i} + \frac{3}{n}\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re} G_i u_{\bar i}\\
&+ \operatorname{Re}\left[(\beta + \frac{n+3}{n})\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} - u^{\frac{2}{n}} + \frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right] D_i u_{\bar i}\\
&- \left[(\beta + \frac{n+6}{n})\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} - \frac{n+1}{n}u^{\frac{2}{n}}\right]\operatorname{Re} E_i u_{\bar i},
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

现在，所有由不变张量构成向量场的 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型不变张量恒等式已经完全由(3.6)和(3.17)给出，下面需要寻找由非不变张量构成向量场的不变张量恒等式. 根据量纲分析，考察如下恒等式：

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta-3}|\nabla_b u|^4 u_i]_{,\bar{i}} \\
=&2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}(\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}} + E_i u_{\bar{i}}) + (\beta + \frac{n+2}{n})\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4} - \frac{n+2}{n}u^{\frac{2}{n}-2}|\nabla_b u|^4,
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta+\frac{2}{n}-1}|\nabla_b u|^2 u_i]_{,\bar{i}} \\
=&u^{\frac{2}{n}}(\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}} + E_i u_{\bar{i}}) + (\beta + \frac{n+3}{n})u^{\frac{2}{n}-2}|\nabla_b u|^4 - \frac{n+1}{n}u^{\frac{4}{n}}|\nabla_b u|^2,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta-2}|\nabla_b u|^2\cdot n\sqrt{-1}u_0 u_i]_{,\bar{i}} \\
=&-\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}D_i u_{\bar{i}} - \frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}} + \frac{1}{n}\frac{|\nabla_b u|^6}{u^4} \\
&+\frac{1}{n}u^{\frac{2}{n}-2}|\nabla_b u|^4 - n(n+1)\frac{|\nabla_b u|^2 u_0^2}{u^2},
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta+\frac{4}{n}+1}u_i]_{,\bar{i}} = (\beta + \frac{n+4}{n})u^{\frac{4}{n}}|\nabla_b u|^2 - u^{\frac{2n+6}{n}},
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta+\frac{2}{n}}\cdot n\sqrt{-1}u_0 u_i]_{,\bar{i}} \\
=&-u^{\frac{2}{n}}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}} + \frac{1}{n}u^{\frac{2}{n}-2}|\nabla_b u|^4 + \frac{1}{n}u^{\frac{4}{n}}|\nabla_b u|^2 - n^2 u^{\frac{2}{n}}u_0^2,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta-1}n^2u_0^2 u_i]_{,\bar{i}} \\
=&-2\operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}G_i u_{\bar{i}} + n(n\beta+n+2)\frac{|\nabla_b u|^2 u_0^2}{u^2} - n^2 u^{\frac{2}{n}}u_0^2.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

这些恒等式是线性无关的，且它们在线性组合意义下，可以代表所有 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型非不变张量向量场的散度. 取它们的线性组合

$$
(3.18)+(3.19)-(n\beta+n+2)\times(3.20)+(n+1)\times(3.21)-(n+1)\times(3.22),
$$

以消去右侧所有非不变张量构成的项，进而得到恒等式

$$
\begin{aligned}
&u^{-\beta}\operatorname{Re}\left\{u^{\beta-1}\left[\frac{|\nabla_b u|^4}{u^2} + u^{\frac{2}{n}}|\nabla_b u|^2 - (n\beta+n+2)\frac{|\nabla_b u|^2\cdot n\sqrt{-1}u_0}{u}\right.\right. \\
&\qquad\left.\left. + (n+1)u^{\frac{n+2}{n}}\cdot n\sqrt{-1}u_0 - (n+1)n^2u_0^2\right]u_i\right\}_{,\bar{i}} \\
=&\operatorname{Re}\left[2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + u^{\frac{2}{n}} + (n\beta+n+2)\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]D_i u_{\bar{i}} + \left[2\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} + u^{\frac{2}{n}}\right]E_i u_{\bar{i}} \\
&+\operatorname{Re}\left[(n\beta+n+2)\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} - (n+1)u^{\frac{2}{n}} + 2(n+1)\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]G_i u_{\bar{i}}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

注　在线性组合过程中，由于 $u^{\frac{2n+6}{n}}$ 项是只在 $u^{-\beta}\operatorname{Re}[u^{\beta+\frac{4}{n}+1}u_i]_{,\bar{i}}$ 中出现的，直接导致该恒等式不被使用. 此外，恒等式(3.6)在 $n=1$ 时，与(2.9)在临界指标 $\alpha=3$ 时限制在 $\mathbb{H}^n$ 上的恒等式是一样的，这也从另一个角度给出了第2章情形 3 中考察恒等式(2.9)的理由.

回到恒等式的讨论. 取 a,b 为待定常数，考察 $(3.6)+a\times(3.17)+b\times(3.23)$，得到 $\{(0,0),2,6,+\}$ 型不变张量恒等式，满足

$$
\begin{aligned}
&[(3.6)+a\times(3.17)+b\times(3.23)]\text{的右侧}\\
=&\left[d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+d_2u^{\frac{2}{n}}\right]\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2+(d_1+2a)\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2+\left[e_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+e_2u^{\frac{2}{n}}\right]\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2\\
&+(e_1-a)\sum_{i=1}^{n}|E_i|^2+\mu\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2+(d_1+e_1-a)\operatorname{Re}D_iE_{\bar{i}}-d_4\operatorname{Re}D_iG_{\bar{i}}\\
&-e_4\operatorname{Re}E_iG_{\bar{i}}+\operatorname{Re}\left[\widetilde{\Delta}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\widetilde{\Delta}_2u^{\frac{2}{n}}+\widetilde{\Delta}_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]\operatorname{Re}D_iu_{\bar{i}}\\
&+\left[\widetilde{\Theta}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\widetilde{\Theta}_2u^{\frac{2}{n}}\right]E_iu_{\bar{i}}+\operatorname{Re}\left[\widetilde{\Xi}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\widetilde{\Xi}_2u^{\frac{2}{n}}+\widetilde{\Xi}_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]\operatorname{Re}G_iu_{\bar{i}},
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

其中系数为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_1&=(\beta+\frac{n+3}{n})d_1-\frac{n-1}{n}e_1+\frac{1}{n}d_4+(\beta+\frac{n+3}{n})a+2b,\\
\widetilde{\Delta}_2&=-\frac{1}{n}d_1+(\beta+\frac{n+4}{n})d_2-\frac{n-1}{n}e_2+\frac{1}{n}d_4-a+b,\\
\widetilde{\Delta}_4&=\frac{1}{n}d_1+(\beta+\frac{n+3}{n})d_4+\frac{n-1}{n}e_4+\frac{1}{n}\mu+a+(n\beta+n+2)b,\\
\widetilde{\Theta}_1&=-\frac{n+2}{n}d_1+(\beta+\frac{n+2}{n})e_1+\frac{1}{n}e_4-(\beta+\frac{n+6}{n})a+2b,\\
\widetilde{\Theta}_2&=-\frac{1}{n}e_1-\frac{n+2}{n}d_2+(\beta+\frac{n+3}{n})e_2+\frac{1}{n}e_4+\frac{n+1}{n}a+b,\\
\widetilde{\Xi}_1&=\frac{n+2}{n}d_1-\frac{n-1}{n}e_1-\frac{1}{n}\mu+\frac{3}{n}a+(n\beta+n+2)b,\\
\widetilde{\Xi}_2&=\frac{n+2}{n}d_2-\frac{n-1}{n}e_2-\frac{1}{n}\mu-(n+1)b,\\
\widetilde{\Xi}_4&=\frac{n+2}{n}d_4+\frac{n-1}{n}e_4-\beta\mu+2(n+1)b.
\end{aligned}
$$

3.4.2　$n \geqslant 2$：命题3.1的证明

由于方程(1.3)在的解在临界指标情形下不是常数，所有不变张量必须是固定的，这就使得所有不变张量不能与非不变张量进行配方，即所有不变张量与非不变张量产生的交叉项系数为 0. 需要系数为 0 的交叉项具体罗列如下：

$$\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}},\ \ u^{\frac{2}{n}}\operatorname{Re} D_i u_{\bar{i}},\ \ \operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u} D_i u_{\bar{i}},\ \ \frac{|\nabla_b u|^2}{u^2} E_i u_{\bar{i}},$$

$$u^{\frac{2}{n}} E_i u_{\bar{i}},\ \ \frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}},\ \ u^{\frac{2}{n}}\operatorname{Re} G_i u_{\bar{i}},\ \ \operatorname{Re}\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u} G_i u_{\bar{i}}.$$

以上面的某个 D_i 项为例，如果其系数不为 0，要想得到正定的恒等式，必须要产生形如 $D_{ij} + c\dfrac{u_i u_j}{u}$ 的平方，进而 $D_{ij} + c\dfrac{u_i u_j}{u} = 0$，这里 $c \neq 0$. 然而作为不变张量，$D_{ij} = 0$，这会迫使 u 只能为常数.

因此，令(3.24)中 $\widetilde{\Delta}_l, \widetilde{\Theta}_l, \widetilde{\Xi}_l = 0$. 固定 d_l, μ, a, b，并通过 $\widetilde{\Xi}_l = 0$ 解出 e_l：

$$e_1 = \frac{(n+2)d_1 - \mu + 3a + n(n\beta + n + 2)b}{n-1},$$

$$e_2 = \frac{(n+2)d_2 - \mu - n(n+1)b}{n-1},$$

$$e_4 = \frac{-(n+2)d_4 + n\beta\mu - 2n(n+1)b}{n-1}.$$

将 e_l 代入 $\widetilde{\Delta}_1 - \widetilde{\Delta}_4$，得 $0 = \widetilde{\Delta}_1 - \widetilde{\Delta}_4 = \beta(d_1 - d_4 + a - 2nb - \mu)$.

如果 $\beta = 0$，固定 d_1, μ, a, b，并通过 $\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{\Delta}_2 = 0$ 解出 d_2, d_4：

$$d_2 = d_1 + na - n(n+1)b,\ \ d_4 = -d_1 - na + n^2 b - \mu.$$

将 d_2, d_4, e_l, β 代入 $\widetilde{\Theta}_l$，得

$$\widetilde{\Theta}_1 = \frac{2[2(n+2)d_1 + 6a + n^2 b]}{n(n-1)},\ \widetilde{\Theta}_2 = \frac{2(n+2)[2d_1 + (3n-1)a - n(3n+4)b]}{n(n-1)}.$$

固定 b，从 $\widetilde{\Theta}_l = 0$ 中解出 d_1, a：$d_1 = -\dfrac{n(n+3)b}{2(n-1)}$，$a = \dfrac{n(n+1)b}{n-1}$. 为了保证(3.24)的正定性，$\dfrac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2$ 和 $u^{\frac{2}{n}}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2$ 的系数必须具有相同符号，即 $d_1 d_2 \geqslant 0$. 将 d_1, a 代入 d_2，得 $d_2 = \dfrac{n}{2}b$，于是结合 $d_1 d_2 \geqslant 0$ 知 $b = 0$. 类似地，$u^{\frac{2}{n}}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2$ 和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2$ 项系数同号，即 $e_2\mu \geqslant 0$. 将 $d_2 = b = 0$ 代入 e_2，得 $e_2 = -\dfrac{\mu}{n-1}$，这迫使 $\mu = 0$. 此时，所有待定系数为 0，导致恒等式(3.24)退化为 $0 = 0$.

如果 $\beta \neq 0$，那么 $d_4 = d_1 + a - 2nb - \mu$. 将 d_4, e_l 代入 $\widetilde{\Delta}_l$：

$$\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{\Delta}_4 = \frac{1}{n}[(n\beta + 2)d_1 + (n\beta + n + 1)a - (n\beta + n + 2)nb],$$

$$\widetilde{\Delta}_2 = \frac{1}{n}[(n\beta+2)d_2 - (n-1)a + n^2 b].$$

如果 $\beta \neq 0$ 且 $\beta \neq -\dfrac{2}{n}$，通过 $\widetilde{\Delta}_l = 0$ 解出 d_1, d_2：

$$d_1 = \frac{-(n\beta+n+1)a + (n\beta+n+2)nb}{n\beta+2},\ d_2 = \frac{(n-1)a - n^2 b}{n\beta+2}.$$

将 d_l, e_l 代入 $\widetilde{\Theta}_l$：

$$\widetilde{\Theta}_1 = \frac{(n\beta+n+4)[-2(n-1)a + (n\beta+2n+2)nb]}{n(n-1)},$$

$$\widetilde{\Theta}_2 = -\frac{(n+2)(n\beta+4)[-2(n-1)a + (n\beta+2n+2)nb]}{n(n-1)(n\beta+2)},$$

于是 $a = \dfrac{(n\beta+2n+2)nb}{2(n-1)}$. 为了保证(3.24)的正定性，$u^{\frac{2}{n}} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |D_{ij}|^2$、$u^{\frac{2}{n}} \sum\limits_{i,j=1}^{n} |E_{i\bar{j}}|^2$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n} |G_i|^2$ 的系数必须符号相同，即使 d_2, e_2, μ 同号. 将 a 代入 d_2, e_2，得 $d_2 = \dfrac{n}{2}b$，$e_2 = -\dfrac{2\mu + n^2 b}{2(n-1)}$，这迫使 $b = \mu = 0$. 此时，所有待定系数为 0，导致恒等式(3.24)再次退化为 $0 = 0$.

通过上述讨论可知，当 $n \geqslant 2$ 时，必须有 $\beta = -\dfrac{2}{n}$. 此时，重写 d_4, e_l：

$$d_4 = d_1 - \mu + a - 2nb,\ e_1 = \frac{(n+2)d_1 - \mu + 3a + n^2 b}{n-1},$$

$$e_2 = \frac{(n+2)d_2 - \mu - n(n+1)b}{n-1},\ e_4 = \frac{-(n+2)d_1 + n\mu - (n+2)a + 2nb}{n-1}.$$

将上述结果和 $\beta = -\dfrac{2}{n}$ 代入 $\widetilde{\Delta}_l, \widetilde{\Theta}_l$：

$$\widetilde{\Delta}_1 = -\widetilde{\Delta}_2 = \widetilde{\Delta}_4 = -\frac{n-1}{2(n+2)}\widetilde{\Theta}_1 = \frac{n-1}{n}a - nb,$$

$$\widetilde{\Theta}_2 = \frac{(n+2)}{n(n-1)}[-2d_1 + 2d_2 + (n-3)a - n^2 b].$$

固定 d_1, a，并通过 $\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{\Theta}_2 = 0$ 解出 d_2, b：$d_2 = d_1 + a$，$b = \dfrac{n-1}{n^2}a$，于是

$$\beta = -\frac{2}{n},\ b = \frac{n-1}{n^2}a,\ d_2 = d_1 + a,\ d_4 = d_1 - \frac{n-2}{n}a - \mu,\ e_1 = \frac{(n+2)(d_1+a) - \mu}{n-1},$$

$$e_2 = \frac{(n+2)d_1 + (2+\frac{1}{n})a - \mu}{n-1},\ e_4 = \frac{-(n+2)d_1 - (n+\frac{2}{n})a + n\mu}{n-1}.$$

将上述讨论得到的系数，代入到恒等式(3.24)，得到了一个只有三个待定系数 $\{d_1, a, \mu\}$ 组成的恒等式，即为(3.4).

考察(3.4)的正定性，首先需要 $\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2$、$u^{\frac{2}{n}}\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2$、$\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2$ 和 $u^{\frac{2}{n}}\sum_{i,j=1}^{n}|E_{i\bar{j}}|^2$ 的系数非负，即(3.5)和 $\mu \geqslant 0$. 为了将不变张量之间的交叉项与平方项形成的二次型的正定性研究到最佳，对(3.4)右侧的项应用引理2.2，然后写成二次型，正好对应于矩阵 $\boldsymbol{B}$. 而 $\boldsymbol{B}_{11} = \mu$ 导致 $\boldsymbol{B}$ 的半正定性蕴含了 $\mu \geqslant 0$，进而命题3.1得证. ∎

注　注意到 $\mu \neq 0$，且 d_1, a, μ 成比例的情况下，恒等式本质是一样的，因此不妨设 $\mu = 3$，那么正定性条件(3.5)和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 半正定确定了 d_1 和 a 的一个范围，这可以用图3.1表示出来. 下面给出图像和其中一些重要点的坐标.

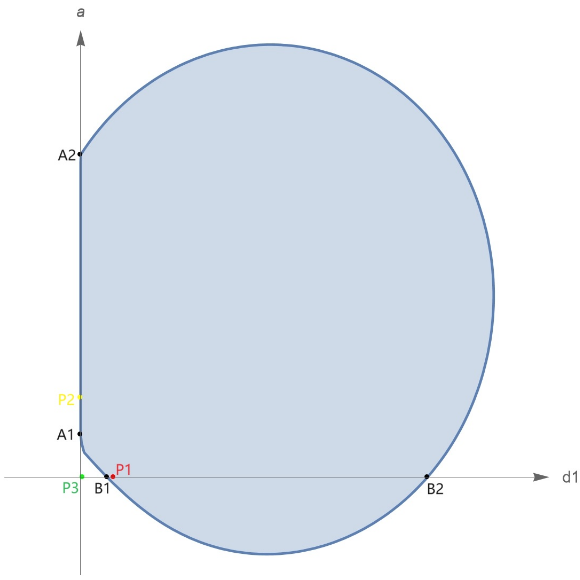

图 3.1　当恒等式(3.4)正定时，d_1 和 a 的范围

$$\text{P1} = (1, 0),\quad \text{P2} = \left(0, \frac{3n}{n+2}\right),\quad \text{P3} = \left(\frac{1}{n}, 0\right),\quad \text{A1} = \left(0, \frac{3n}{2n+1}\right),$$

$$\begin{aligned}\text{A2} = \Bigg(0,\ & \frac{2\sqrt{n(73n^7+538n^6+1435n^5+134n^4-1439n^3-120n^2+292n+48)}}{3n^4-2n^3-5n^2+26n+8} \\ & \times \cos\left\{\frac{1}{3}\arccos\left[\sqrt{n}(595n^{10}+7017n^9+30666n^8+55019n^7-7692n^6\right.\right. \\ & \qquad -82095n^5-12345n^4+38598n^3+2556n^2-6920n-1440) \\ & \left.\left.\quad \times (73n^7+538n^6+1435n^5+134n^4-1439n^3-120n^2+292n+48)^{-3/2}\right]\right\} \\ & + \frac{n(10n^3+35n^2+4)}{(n+2)(3n^3-8n^2+11n+4)}\Bigg),\end{aligned}$$

$$\text{B1} = \left(\frac{\sqrt{468n^4+1380n^3+n^2-1500n+612}}{3n^2+8n+4}\cos\frac{\theta-2\pi}{3}+\frac{24n^2+43n-18}{2(n+2)(3n+2)}, 0\right),$$

$$\mathrm{B2}=\left(\frac{\sqrt{468n^4+1380n^3+n^2-1500n+612}}{3n^2+8n+4}\cos\frac{\theta}{3}+\frac{24n^2+43n-18}{2(n+2)(3n+2)},0\right),$$

$$\theta=\arccos\frac{9936n^6+44172n^5+32202n^4-66149n^3-35622n^2+54756n-15336}{(468n^4+1380n^3+n^2-1500n+612)^{\frac{3}{2}}},$$

其中P1、P2、P3分别对应 Jerison-Lee 恒等式(3.1)、(3.2)、(3.3)，A1、A2、B1、B2为范围的边界与坐标轴的交点. 从图中可以立刻看出，恒等式(3.1)、(3.2)是正定的，而(3.3)不是.

3.4.3　$n=1$：命题3.2的证明

当 $n=1$ 时，恒等式(3.17)退化为 $u^{-\beta}[u^{\beta-1}|\nabla_b u|^2 D_1]_{,\bar{1}}$，这正是(3.6)中的 d_1 项，因此不妨令恒等式(3.24)中的 $a=0$，在 $n=1$ 的时候化为

$$\begin{aligned}&\left[(3.6)+b\times(3.23)\right]\text{ 的右侧}\Big|_{n=1}\\&=\left[d_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+d_2u^{\frac{2}{n}}\right]\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}|^2+d_1\sum_{i=1}^{n}|D_i|^2+\mu\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2-d_4\operatorname{Re}D_iG_{\bar{i}}\\&+\operatorname{Re}\left[\widetilde{\Delta}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\widetilde{\Delta}_2u^{\frac{2}{n}}+\widetilde{\Delta}_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]\operatorname{Re}D_iu_{\bar{i}}\\&+\operatorname{Re}\left[\widetilde{\Xi}_1\frac{|\nabla_b u|^2}{u^2}+\widetilde{\Xi}_2u^{\frac{2}{n}}+\widetilde{\Xi}_4\frac{n\sqrt{-1}u_0}{u}\right]\operatorname{Re}G_iu_{\bar{i}},\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中系数为

$$\widetilde{\Delta}_1=(\beta+4)d_1+d_4+2b,\ \widetilde{\Delta}_2=-d_1+(\beta+5)d_2+d_4+b,$$

$$\widetilde{\Delta}_4=d_1+(\beta+4)d_4+\mu+(\beta+3)b,\ \widetilde{\Xi}_1=3d_1-\mu+(\beta+3)b,$$

$$\widetilde{\Xi}_2=3d_2-\mu-2b,\ \widetilde{\Xi}_4=3d_4-\beta\mu+4b.$$

固定 β,μ,b，通过 $\widetilde{\Xi}_l=0$ 解出 d_l：

$$d_1=\frac{\mu+(\beta+3)b}{3},\ d_2=\frac{\mu+2b}{3},\ d_4=\frac{\beta\mu+4b}{3}.$$

将它们代入 $\widetilde{\Delta}_l$：

$$\widetilde{\Delta}_1=\frac{2(\beta+2)\mu+(\beta^2+7\beta+22)b}{3},$$

$$\widetilde{\Delta}_2=\frac{2(\beta+2)\mu+(\beta+14)b}{3},$$

$$\widetilde{\Delta}_4=\frac{(\beta+2)^2\mu+4(2\beta+7)}{3}.$$

考察 $\widetilde{\Delta}_1-\widetilde{\Delta}_2=0$，得 $(\beta+2)(\beta+4)b=0$.

如果 $\beta=-4$，那么 $\widetilde{\Delta}_1=\dfrac{-4\mu+10b}{3}=0$，$\widetilde{\Delta}_4=\dfrac{4\mu-4b}{3}=0$，于是 $\mu=b=0$，进而 $d_l=0$，这意味着恒等式退化为 $0=0$. 如果 $\beta\neq-2$ 且 $\beta\neq-4$，那么 $b=0$，进而 $\widetilde{\Delta}_1=0$ 推出 $\mu=0$，恒等式再次退化.

通过上述讨论可知，当 $n=1$ 时，必须有 $\beta=-2$. 此时，$\widetilde{\Delta}_2=0$ 推出 $b=0$，进而所有参数可化为

$$d_1=d_2=\frac{\mu}{3},\ d_4=-\frac{2}{3}\mu,\ \beta=-2,\ b=0,$$

这正对应了经典 Jerison-Lee 恒等式(3.1)在 $n=1$ 的情形. ∎

注 命题3.2的证明是不能通过直接在命题3.1中令 $n=1$ 得到的，因为命题3.1的证明中出现过 $n-1$ 在分母的项. 因此，命题3.2需要单独证明.

第 4 章　球面上的 σ_k（次）临界指标方程

本章使用传统的分部积分方法，研究球面上 σ_k（次）临界指标方程解的分类，并通过证明命题4.13来证明定理1.7. 本章默认出现在 σ_k 中的 k 处的值为自然数，v 为方程(1.8)的 k-允许解.

4.1　基本对称多项式

本节介绍基本对称多项式的定义以及若干关于基本对称多项式的常用结论，这些结论将在后续的证明中用到.

定义 4.1　$\forall 1 \leqslant k \leqslant n$，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$，定义 k 次基本对称多项式

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}.$$

为了方便，置 $\sigma_0 = 1$，$\sigma_k = 0$，$\forall k > n$.

记 $\sigma_k(\lambda | i_1, \cdots, i_l) = \sigma_k(\lambda)|_{\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_l} = 0}$. Gårding 锥定义为

$$\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sigma_i(\lambda) > 0,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

以下命题给出一些众所周知的结论. 虽然很多文献都有相关的结论，但是为了结构的完整性，这里列举出了大部分的命题的证明过程.

命题 4.1 ([17])　设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$，$0 \leqslant k \leqslant n$，则

(1) $\sigma_k(\lambda) = \sigma_k(\lambda|i) + \lambda_i \sigma_{k-1}(\lambda|i)$，$\forall 1 \leqslant i \leqslant n$；

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{k-1}(\lambda|i) = k\sigma_k(\lambda)$；

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_k(\lambda|i) = (n-k)\sigma_k(\lambda)$；

(4) $\dfrac{\partial \sigma_{k+1}(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \sigma_k(\lambda|i)$；

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sigma_{k-1}(\lambda|i) = \sigma_1(\lambda)\sigma_{k+1} - (k+2)\sigma_{k+2}(\lambda)$；

(6) Γ_k 是凸锥，且 $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_n$；

(7) $\sigma_k(\lambda)$ 关于 λ_i 对称，且 $\Gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_i > 0,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

证明　请参考文献 [17].　■

引理 4.2 ([17])　取 $f(x, y) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} c_j x^{m-j} y^j$，其中 c_0 和 c_m 不为零. 如果方程

$f(x,y)=0$ 的所有非零根满足 $\dfrac{x}{y}\in\mathbb{R}$，那么方程 $\partial_x f(x,y)=0$ 和 $\partial_y f(x,y)=0$ 的非零根也满足 $\dfrac{x}{y}\in\mathbb{R}$.

证明　固定 $y\in\mathbb{R}$，f 是关于 x 的 m 次多项式且有 m 个实根，根据 Rolle 定理，方程 $\partial_x f(x,y)=0$ 有 $m-1$ 个实根. 类似地，对于固定的 x, 方程 $\partial_y f(x,y)=0$ 也有 $m-1$ 个实根. ∎

命题 4.3 ([17]，Newton 不等式)　设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$，$0\leqslant k\leqslant n$，则

$$(n-k+1)(k+1)\sigma_{k-1}(\lambda)\sigma_{k+1}(\lambda)\leqslant k(n-k)\sigma_k^2(\lambda).$$

特别地，$\sigma_{k-1}(\lambda)\sigma_{k+1}(\lambda)\leqslant\sigma_k^2(\lambda)$.

证明　首先假设 $\sigma_j(\lambda)\neq 0$，$\forall j\leqslant n$. 构造二元函数

$$f(x,y)=\prod_{i=1}^{n}(x+\lambda_i y)=\sum_{j=0}^{n}\sigma_j(\lambda)x^{n-j}y^j.$$

记 $g(x,y)=\partial_x^{n-k-1}\partial_y^{k-1}f(x,y)$，那么

$$g(x,y)=(n-k+1)(n-k)\sigma_{k-1}(\lambda)x^2+2(n-k)k\sigma_k(\lambda)xy+(k+1)k\sigma_{k+1}(\lambda)y^2$$

由引理4.2，$g(x,y)=0$ 的非零根满足 $\dfrac{y}{x}\in\mathbb{R}$，于是其判别式非负：

$$(n-k+1)(k+1)\sigma_{k-1}(\lambda)\sigma_{k+1}(\lambda)\leqslant k(n-k)\sigma_k^2(\lambda).$$

对于存在某些 $\sigma_j(\lambda)=0$ 的情况，可以通过上式取极限得到. ∎

命题 4.4 ([17]，MacLaurin 不等式)　设 $\lambda\in\varGamma_k$，$1\leqslant l\leqslant k\leqslant n$，那么

$$\left(\frac{\sigma_k(\lambda)}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\left(\frac{\sigma_l(\lambda)}{C_n^l}\right)^{\frac{1}{l}}.$$

证明　只需证明 $k=l+1$ 时结论成立即可. 由 Newton 不等式，

$$\frac{\sigma_2(\lambda)}{C_n^2}=\sigma_0(\lambda)\frac{\sigma_2(\lambda)}{C_n^2}\leqslant\left(\frac{\sigma_1(\lambda)}{C_n^1}\right)^2,$$

于是 $k=2$，$l=1$ 时结论成立.

对于 $j>1$，假设 $k=j$ 和 $l=j-1$ 时结论成立. 由 Newton 不等式，

$$\frac{\sigma_{j+1}(\lambda)}{C_n^{j+1}}\left(\frac{\sigma_j(\lambda)}{C_n^j}\right)^{\frac{j-1}{j}}\leqslant\frac{\sigma_{j+1}(\lambda)}{C_n^{j+1}}\frac{\sigma_{j-1}(\lambda)}{C_n^{j-1}}\leqslant\left(\frac{\sigma_j(\lambda)}{C_n^1}\right)^2$$

于是 $\left(\dfrac{\sigma_{j+1}(\lambda)}{C_n^{j+1}}\right)^{\frac{1}{j+1}}\leqslant\left(\dfrac{\sigma_j(\lambda)}{C_n^j}\right)^{\frac{1}{j}}$，命题得证. ∎

命题 4.5 ([17])　设 $\lambda \in \Gamma_k$，$1 \leqslant l \leqslant k \leqslant n$，那么

$$\frac{\sigma_k(\lambda)/C_n^k}{\sigma_{k-1}(\lambda)/C_n^{k-1}} \leqslant \frac{\sigma_l(\lambda)/C_n^l}{\sigma_{l-1}(\lambda)/C_n^{l-1}}.$$

证明　只需证明 $k = l + 1$ 时结论成立即可. 由 Newton 不等式，

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_k(\lambda)/C_n^k}{\sigma_{k-1}(\lambda)/C_n^{k-1}} =&\frac{\sigma_k(\lambda)/C_n^k \cdot \sigma_{k-2}(\lambda)/C_n^{k-2}}{\sigma_{k-1}(\lambda)/C_n^l \cdot \sigma_{k-2}(\lambda)/C_n^{k-2}}\\ \leqslant&\frac{(\sigma_{k-1}(\lambda)/C_n^{k-1})^2}{\sigma_{k-1}(\lambda)/C_n^{k-1} \cdot \sigma_{k-2}(\lambda)/C_n^{k-2}} = \frac{\sigma_{k-1}(\lambda)/C_n^{k-1}}{\sigma_{k-2}(\lambda)/C_n^{k-2}}.\end{aligned}$$

∎

命题 4.6 ([24]，广义 Newton-MacLaurin 不等式)　设 $\lambda \in \Gamma_k$，$0 \leqslant l < k \leqslant n$，$0 \leqslant s < r \leqslant n$，$r \leqslant k$，$s \leqslant l$，那么

$$\left[\frac{\sigma_k(\lambda)/C_n^k}{\sigma_l(\lambda)/C_n^l}\right]^{\frac{1}{k-l}} \leqslant \left[\frac{\sigma_r(\lambda)/C_n^r}{\sigma_s(\lambda)/C_n^s}\right]^{\frac{1}{r-s}},$$

等号成立当且仅当 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n > 0$. 特别地，

$$k(n-l+1)\sigma_k(\lambda)\sigma_{l-1}(\lambda) \leqslant l(n-k+1)\sigma_{k-1}(\lambda)\sigma_l(\lambda).$$

证明　所证结论等价于如下不等式：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\sigma_k(\lambda)/C_n^k}{\sigma_{k-1}(\lambda)/C_n^{k-1}} \cdots \frac{\sigma_r(\lambda)/C_n^r}{\sigma_{r-1}(\lambda)/C_n^{r-1}} \cdots \frac{\sigma_{l+1}(\lambda)/C_n^{l+1}}{\sigma_l(\lambda)/C_n^l}\right]^{r-s}\\ &\qquad\leqslant \left[\frac{\sigma_r(\lambda)/C_n^r}{\sigma_{r-1}(\lambda)/C_n^{r-1}} \cdots \frac{\sigma_{l+1}(\lambda)/C_n^{l+1}}{\sigma_l(\lambda)/C_n^l} \cdots \frac{\sigma_{s+1}(\lambda)/C_n^{s+1}}{\sigma_s(\lambda)/C_n^s}\right]^{k-l}\end{aligned}$$

根据广义 Newton-MacLaurin 不等式，这是可以直接得到的.　∎

对于 n 阶对称矩阵 $A = (a_{ij})$，定义 $\sigma_k(A) = \sigma_k(\lambda(A))$，其中 $\lambda(A) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 A 的 n 个特征值构成的向量. 定义 k 阶 Newton 张量

$$T^k = \sigma_k I - \sigma_{k-1} A + \cdots + (-1)^k A^k = \sigma_k I - T^{k-1} A$$

和迹零的 Newton 张量 $L^k := \dfrac{n-k}{n}\sigma_k I - T^k$，即 $\mathrm{tr}\, L^k = 0$. 规定 $T_{ij}^0 = \delta_{ij}$.

引理 4.7　上述记号有如下结论成立：

(1) $T_{ij}^k = \dfrac{\partial \sigma_{k+1}(A)}{\partial a_{ij}}$;

(2) $(n-k)\sigma_k = \mathrm{tr}\, T^k$;

(3) $(k+1)\sigma_{k+1} = \mathrm{tr}\, A T^k$;

(4) $\mathrm{tr}\, L^k = 0$;

(5) 如果 $\sigma_1(A), \cdots, \sigma_k(A) > 0$, 那么 T^m 正定，$\forall 1 \leqslant m \leqslant k-1$.

证明　详细证明请参考文献 [7][22]. ∎

命题 4.8　如果 $1 \leqslant k \leqslant n$，$\lambda(A) \in \Gamma^k$，那么

$$|T_{ij}^{k-1} x_i y_j| \leqslant C_(n,k)\sigma_{k-1}|x||y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

证明　对于实对称矩阵 $A = (a_{ij})$，考虑其正交相似对角化：

$$A = P \cdot \operatorname{diag} \lambda(A) \cdot P^T,$$

其中 P 为正交矩阵，那么

$$\left(\frac{\partial \sigma_k(\lambda(A))}{\partial a_{ij}}\right)_{i,j=1}^n = P \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{\partial \sigma_k(\lambda(A))}{\partial \lambda_i}\right)_{i=1}^n \cdot P^\top.$$

由 $\lambda(A) \in \Gamma_k$ 知，矩阵 $\operatorname{diag}\left(\dfrac{\partial \sigma_k(\lambda(A))}{\partial \lambda_i}\right)_{i=1}^k$ 正定，因此 $\left(\frac{\partial \sigma_k(\lambda(A))}{\partial a_{ij}}\right)_{i,j=1}^n$ 正定，进而 T^{k-1} 正定.

设 T^{k-1} 的特征值为 $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_n)$，满足 $0 < \tilde{\lambda}_1 \leqslant \cdots \leqslant \tilde{\lambda}_n$，于是

$$\tilde{\lambda}_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_n = \operatorname{tr} T^{k-1} = (n-k+1)\sigma_{k-1},$$

$$|T_{ij}^{k-1} x_i y_j| \leqslant (T_{ij}^{k-1} x_i x_j)^{\frac{1}{2}} (T_{ij}^{k-1} y_i y_j)^{\frac{1}{2}} \leqslant \tilde{\lambda}_n |x||y| \leqslant (n-k+1)\sigma_{k-1}|x||y|.$$

∎

4.2　准备工作：σ_k 的近散度结构

称 v 是方程(1.8)的 k-允许解，如果 $A \in \Gamma^k$，其中 A 为 Schouten 张量，即

$$A = v\nabla^2 v + \frac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2)g.$$

在 $\mathbb{S}^n$ 的幺正标架下，记 $A_{ij} = v v_{ij} + \dfrac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2) g_{ij}$ 为 Schouten 张量的分量表示. 定义 $E_{ij} = L_{ij}^1 = v v_{ij} - \dfrac{1}{n} v \Delta v g_{ij}$.

本章在讨论方程(1.8)的解时，始终考虑 k-允许解，且将 $\sigma_i(A)$ 简记为 σ_i.

接下来的引理在本章是最为关键的. 我们给出了纯分析的证明，该证明不同于 M. González[10] 的证明，她的证明用到了 J. A. Viaclovsky[27] 中的几何结论. σ_k 没有散度结构，只有近散度结构，而近散度结构本在我们的讨论中起到了关键作用. 下面的引理对近散度公式的导出十分重要.

引理 4.9　$\forall 1 \leqslant q \leqslant k$，

$$\partial_i(T_{ij}^q) = (q-n)\sigma_q v_j v^{-1} + n T_{ij}^q v_i v^{-1} + (\mu - 1)(n-q) T_{ij}^{q-1} v_i v.$$

证明　通过数学归纳法证明本引理，证明分成三步：

• **第一步：** $T^q_{il}v_mv_{mi}=T^q_{im}v_iv_{ml}$.

由 T^q 的定义，

$$\begin{aligned}T^q_{il}v_mv_{mi}=&T^q_{il}v_m(v^{-1}A_{mi}-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)g_{mi})\\=&v^{-1}A_{mi}T^q_{il}v_m-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)T^q_{il}v_i\\=&v^{-1}(g_{ml}\sigma_{q+1}-T^{q+1}_{ml})v_m-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)T^q_{il}v_i\\=&v^{-1}v_l\sigma_{q+1}-T^{q+1}_{ml}v_mv^{-1}-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)T^q_{il}v_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T^q_{im}v_iv_{ml}=&T^q_{im}v_i(v^{-1}A_{ml}-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)g_{ml})\\=&v^{-1}A_{ml}T^q_{im}v_i-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)T^q_{il}v_i\\=&v^{-1}(g_{il}\sigma_{q+1}-T^{q+1}_{il})v_i-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)T^q_{il}v_i\\=&v^{-1}v_l\sigma_{q+1}-T^{q+1}_{il}v_iv^{-1}-\frac{1}{2}v^{-1}(\mu v^2-|\nabla v|^2)T^q_{il}v_i,\end{aligned}$$

因此第一步得证.

• **第二步：** 引理对 $q=1$ 成立.

由 (S^n,g_c) 上幺正标架下的导数交换公式 $v_{jji}=v_{ijj}-(n-1)v_i$，

$$\begin{aligned}\partial_j(T^1_{ij})=&\partial_j(\sigma_1g_{ij}-A_{ij})=(\sigma_1)_{,i}-(A_{ij})_{,j}\\=&v_i\Delta v+v(\Delta v)_{,i}+n\mu vv_i-nv_jv_{ji}-v_jv_{ij}-vv_{ijj}-\mu vv_i+v_jv_{ji}\\=&v_i\Delta v+v(\Delta v)_{,i}+(n-1)\mu vv_i-nv_jv_{ji}-vv_{jji}-(n-1)vv_i\\=&v_i\Delta v-nv_jv_{ji}+(\mu-1)(n-1)vv_i.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&(1-n)\sigma_1v_iv^{-1}+nT^1_{ij}v_jv^{-1}\\=&(1-n)\sigma_1v_iv^{-1}+n(\sigma_1g_{ij}-A_{ij})v_jv^{-1}\\=&\sigma_1v_iv^{-1}-nA_{ij}v_jv^{-1}\\=&(v\Delta v+\frac{n}{2}(\mu v^2-|\nabla v|^2))v_iv^{-1}-n(vv_{ij}+\frac{1}{2}(\mu v^2-|\nabla v|^2)g_{ij})v_jv^{-1}\\=&v_i\Delta v-nv_jv_{ji}.\end{aligned}$$

于是 $\partial_i(T^1_{ij})=(1-n)\sigma_1v_jv^{-1}+nT^1_{ij}v_iv^{-1}+(\mu-1)(n-1)v_jv$.

• **第三步：** 假设引理对 q 成立，验证引理对 $q+1$ 也成立.

由 T^q 的定义和引理4.7(1)，有

$$
\begin{aligned}
&\partial_i(T_{il}^{q+1}) = \partial_i(\sigma_{q+1}g_{il} - T_{im}^q A_{ml}) = (\sigma_{q+1})_l - T_{im}^q(A_{ml})_{,i} - (T_{im}^q)_{,i}A_{ml}\\
=&T_{mj}^q(A_{mj})_l - T_{im}^q(A_{ml})_{,i} - (T_{im}^q)_{,i}A_{ml}\\
=&T_{mj}^q(vv_{mj} + \frac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2)g_{mj})_l - T_{im}^q(vv_{ml} + \frac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2)g_{ml})_{,i}\\
&- ((q-n)\sigma_q v_m v^{-1} + nT_{im}^q v_i v^{-1} + (\mu-1)(n-q)T_{im}^{q-1}v_i v)A_{ml}\\
=&T_{mj}^q v_{mj}v_l + T_{mj}^q v_{mjl}v + \mu vv_l \sum T_{jj}^q - v_i v_{il}\sum T_{jj}^q - T_{im}^q v_i v_{ml} - T_{im}^q v_{mli}v\\
&- \mu vv_i T_{il}^q + T_{il}^q v_j v_{ji} + (n-q)\sigma_q v^{-1}v_m(vv_{ml} + \frac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2)g_{ml})\\
&- n(\sigma_{q+1}g_{il} - T_{il}^{q+1})v_i v^{-1} - (n-q)(\mu-1)T_{im}^{q-1}A_{ml}v_i v.
\end{aligned}
$$

再由第一步的 $T_{il}^q v_m v_{mi} = T_{im}^q v_i v_{ml}$，

$$
\begin{aligned}
&\partial_i(T_{il}^{q+1})\\
=&-n\sigma_{q+1}v_l v^{-1} + nT_{il}^{q+1}v_i v^{-1} + T_{mj}^q v_{mj}v_l + \frac{1}{2}(n-q)\sigma_q v^{-1}v_l(\mu v^2 - |\nabla v|^2)\\
&+ T_{mj}^q v_{mjl}v - T_{im}^q v_{mli}v + \mu vv_l \Sigma T_{jj}^q - \mu vv_i T_{il}^q - (n-q)(\mu-1)T_{im}^{q-1}A_{ml}v_i v\\
=&-n\sigma_{q+1}v_l v^{-1} + nT_{il}^{q+1}v_i v^{-1} + (q+1)\sigma_{q+1}v_l v^{-1} - vv_l\Sigma T_{jj}^q + T_{jl}^q v_j v\\
&+ \mu vv_l\Sigma T_{jj}^q - \mu vv_i T_{il}^q - (n-q)(\mu-1)T_{im}^{q-1}A_{ml}v_i v\\
=&(q+1-n)\sigma_{q+1}v_l v^{-1} + nT_{il}^{q+1}v_i v^{-1} + (\mu-1)(n-q-1)T_{il}^q v_i v.
\end{aligned}
$$

于是第三步得证. ∎

通过引理4.9，立刻可以得到 σ_k 的近散度结构公式.

引理 4.10 (近散度结构公式)

$$
\begin{aligned}
k\sigma_k(A) =&v\partial_j(T_{ij}^{k-1}v_i) - nT_{ij}^{k-1}v_i v_j + \frac{n-k+1}{2}\sigma_{k-1}(\mu v^2 + |\nabla v|^2)\\
&- (\mu-1)(n-k+1)T_{ij}^{k-2}v_i v_j v^2.
\end{aligned}
$$

证明

$$
\begin{aligned}
k\sigma_k(A) =&T_{ij}^{k-1}A_{ij} = vT_{ij}^{k-1}v_{ij} + \frac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2)\sum T_{jj}^{k-1}\\
=&v\partial_j(T_{ij}^{k-1}v_i) - vv_i\partial_j(T_{ij}^{k-1}) + \frac{1}{2}(n-k+1)(\mu v^2 - |\nabla v|^2)\sigma_{k-1}\\
=&v\partial_j(T_{ij}^{k-1}v_i) - vv_i\Big[(k-1-n)\sigma_{k-1}v_i v^{-1} + nT_{ji}^{k-1}v_j v^{-1}\\
&+ (\mu-1)(n-k+1)T_{ji}^{k-2}v_j v\Big] + \frac{1}{2}(n-k+1)(\mu v^2 - |\nabla v|^2)\sigma_{k-1}\\
=&v\partial_j(T_{ij}^{k-1}v_i) - nT_{ij}^{k-1}v_i v_j + \frac{n-k+1}{2}\sigma_{k-1}|\nabla v|^2
\end{aligned}
$$

$$+\frac{n-k+1}{2}\sigma_{k-1}\mu v^2-(\mu-1)(n-k+1)T_{ij}^{k-2}v_iv_jv^2.$$

∎

在计算恒等式时，下面的结论更加常用.

推论 4.11　$\forall 1\leqslant q\leqslant k$，

$$\partial_j(L_{ij}^q)=\frac{n-q}{n}\partial_i(\sigma_q)+nL_{ij}^qv_jv^{-1}-(\mu-1)(n-q)T_{ij}^{q-1}v_jv.$$

证明　由 $L_{ij}^k=\dfrac{n-k}{n}\sigma_kg_{ij}-T_{ij}^k$，

$$\begin{aligned}\partial_j(L_{ij}^k)=&\frac{n-k}{n}\partial_i(\sigma_k)-\partial_j(T_{ij}^k)\\=&\frac{n-k}{n}\partial_i(\sigma_k)-((k-n)\sigma_kv_iv^{-1}+nT_{ij}^kv_jv^{-1}+(\mu-1)(n-k)T_{ij}^{k-1}v_jv)\\=&\frac{n-k}{n}\partial_i(\sigma_k)+nL_{ij}^kv_jv^{-1}-(\mu-1)(n-k)T_{ij}^{k-1}v_jv.\end{aligned}$$

∎

最后给出刻画恒等式主项正性的引理.

引理 4.12　对应方程(1.8)的 k-允许解 v，有

$$\sum_{i,j=1}^{n}L_{ij}^sE_{ij}\geqslant 0,\ \forall 1\leqslant s\leqslant k,\tag{4.2}$$

等号成立当且仅当 $E=0$.

证明　注意到 $\sigma_1=v\Delta v+\dfrac{n}{2}(\mu v^2-|\nabla v|^2)$，$A_{ij}-\dfrac{1}{n}\sigma_1g_{ij}=E_{ij}$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}L_{ij}^sE_{ij}=&\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{n-s}{n}\sigma_sg_{ij}-T_{ij}^s)E_{ij}=-\sum_{i,j=1}^{n}T_{ij}^sE_{ij}\\&=-\sum_{i,j=1}^{n}T_{ij}^s(A_{ij}-\frac{1}{n}\sigma_1g_{ij})=-\sum_{i,j=1}^{n}T_{ij}^sA_{ij}+\frac{1}{n}\sigma_1\sum_{i,j=1}^{n}T_{ij}^sg_{ij}\\&=\frac{n-s}{n}\sigma_1\sigma_s-(s+1)\sigma_{s+1}\end{aligned}$$

如果 $\sigma_{k+1}(A_{ij})\leqslant 0$, 则已经完成证明. 如果 $\sigma_{k+1}(A_{ij})>0$，那么 $\lambda(A)\in\Gamma^{k+1}$，由广义 Newton-Maclaurin 不等式：$\sigma_{s+1}\leqslant\dfrac{n-s}{n(s+1)}\sigma_1\sigma_s$，等号成立当且仅当 $E=0$.　∎

4.3　定理的证明

根据前面的准备工作，本节先得到恒等式，并用它完成定理 1.7 的证明.

命题 4.13　设 $k \geqslant 2$，那么存在常数 $d_{k-s}, c_{k-s}, e_{k-s}, h_{k-s}$，使得

$$
\begin{aligned}
0 = &\int L^k_{ij} E_{ij} v^{-\delta} + \left(\frac{n-k}{n}\beta - \frac{k(n+2)}{2n}(n+1-\delta)\right)\int \sigma_k |\nabla v|^2 v^{-\delta} \\
&+ (1+n-\delta)\sum_{s=1}^{k} d_{k-s}\int \sigma_{k-s}|\nabla v|^{2(s+1)} v^{-\delta} \\
&+ \mu(1+n-\delta)\sum_{s=1}^{k} c_{k-s}\int \sigma_{k-s}|\nabla v|^{2s} v^{2-\delta} \\
&+ \mu(1+n-\delta)\sum_{s=1}^{k} e_{k-s}\int T^{k-s}_{ij} v_i v_j |\nabla v|^{2(s-1)} v^{2-\delta} \\
&- (\mu-1)(1+n-\delta)\sum_{s=1}^{k-1} h_{k-s}\int T^{k-s-1}_{ij} v_i v_j |\nabla v|^{2s} v^{2-\delta} \\
&- (\mu-1)(n-k)\int T^{k-1}_{ij} v_i v_j v^{2-\delta}.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

如果 $n > 2k$，$\beta > 0$，δ 小于且靠近 $n+1$，那么 $d_{k-s}, c_{k-s}, e_{k-s}, h_{k-s} > 0$.

证明　由 $\operatorname{tr} L^k = 0$，

$$
\int L^k_{ij} E_{ij} v^{-\delta} = \int L^k_{ij}(v v_{ij} - \frac{\Delta v}{n} v g_{ij}) v^{-\delta} = \int L^k_{ij} v_{ij} v^{1-\delta}.
$$

由分部积分和引理4.11，

$$
\begin{aligned}
&\int L^k_{ij} E_{ij} v^{-\delta} = -\int (L^k_{ij})_{,j} v_i v^{1-\delta} - (1-\delta)\int L^k_{ij} v_i v_j v^{-\delta} \\
= &-\int \left(\frac{n-k}{n}\partial_i(\sigma_k) + n L^k_{ij} v_j v^{-1} - (\mu-1)(n-k) T^{k-1}_{ij} v_j v\right) v_i v^{1-\delta} \\
&- (1-\delta)\int L^k_{ij} v_i v_j v^{-\delta} \\
= &-\frac{n-k}{n}\int \partial_i(\sigma_k) v_i v^{1-\delta} - (1+n-\delta)\int L^k_{ij} v_i v_j v^{-\delta} \\
&+ (\mu-1)(n-k)\int T^{k-1}_{ij} v_j v_i v^{2-\delta}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

使用 L^k 的定义，计算(4.4) 式的倒数第二项：

$$
\begin{aligned}
&\int L^k_{ij} v_i v_j v^{-\delta} = \int (-\frac{k}{n}\sigma_k g_{ij} + T^{k-1}_{il} A_{lj}) v_i v_j v^{-\delta} \\
= &-\frac{k}{n}\int \sigma_k |\nabla v|^2 v^{-\delta} + \int T^{k-1}_{il}\left(v v_{lj} + \frac{1}{2}(\mu v^2 - |\nabla v|^2) g_{lj}\right) v_i v_j v^{-\delta} \\
= &-\frac{k}{n}\int \sigma_k |\nabla v|^2 v^{-\delta} + \int T^{k-1}_{il} v_{lj} v_i v_j v^{1-\delta} \\
&+ \frac{\mu}{2}\int T^{k-1}_{ij} v_i v_j v^{2-\delta} - \frac{1}{2}\int T^{k-1}_{ij} v_i v_j |\nabla v|^2 v^{-\delta}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

由引理4.10，

$$\begin{aligned}
&\int T_{il}^{k-1} v_{lj} v_i v_j v^{1-\delta} = \frac{1}{2}\int T_{ij}^{k-1}(|\nabla v|^2)_{,j} v_i v^{1-\delta} \\
=&-\frac{1-\delta}{2}\int T_{ij}^{k-1} v_i v_j |\nabla v|^2 v^{-\delta} - \frac{1}{2}\int (T_{ij}^{k-1} v_i)_{,j} |\nabla v|^2 v^{1-\delta} \\
=&-\frac{k}{2}\int \sigma_k |\nabla v|^2 v^{-\delta} - \frac{1+n-\delta}{2}\int T_{ij}^{k-1} v_i v_j |\nabla v|^2 v^{-\delta} \\
&+\frac{n-k+1}{4}\int \sigma_{k-1}|\nabla v|^4 v^{-\delta} + \frac{n-k+1}{4}\mu\int \sigma_{k-1}|\nabla v|^2 v^{2-\delta} \\
&-\frac{1}{2}(\mu-1)(n-k+1)\int T_{ij}^{k-2} v_i v_j |\nabla v|^2 v^{2-\delta}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

将(4.6)代入(4.5)，

$$\begin{aligned}
&\int L_{ij}^k v_i v_j v^{-\delta} \\
=&-\frac{n+2}{2n}k\int \sigma_k |\nabla v|^2 v^{-\delta} - \frac{2+n-\delta}{2}\int T_{ij}^{k-1} v_i v_j |\nabla v|^2 v^{-\delta} \\
&+\frac{n-k+1}{4}\int \sigma_{k-1}|\nabla v|^4 v^{-\delta} + \frac{\mu}{2}\int T_{ij}^{k-1} v_i v_j v^{2-\delta} \\
&+\frac{n-k+1}{4}\mu\int \sigma_{k-1}|\nabla v|^2 v^{2-\delta} - \frac{1}{2}(\mu-1)(n-k+1)\int T_{ij}^{k-2} v_i v_j |\nabla v|^2 v^{2-\delta}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

置 $B_{k-s} = -\frac{s+1+n-\delta}{s+1}\int T_{ij}^{k-s} v_i v_j |\nabla v|^{2s} v^{-\delta} + \frac{n-k+s}{2(s+1)}\int \sigma_{k-s}|\nabla v|^{2(s+1)} v^{-\delta}$, $s = 1, \cdots, k-2$，那么

$$\begin{aligned}
B_{k-s} =&\widetilde{d}_{k-s}\int \sigma_{k-s}|\nabla v|^{2(s+1)} v^{-\delta} + \tilde{c}_{k-s-1} B_{k-s-1} \\
&+\mu \tilde{c}_{k-s-1} g_{s+1}\int \sigma_{k-s-1}|\nabla v|^{2(s+1)} v^{2-\delta} \\
&+\mu \tilde{c}_{k-s-1} f_{s+1}\int T_{ij}^{k-s-1} v_i v_j |\nabla v|^{2s} v^{2-\delta} \\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-s-1}\widetilde{h}_{s+1}\int T_{ij}^{k-s-2} v_i v_j |\nabla v|^{2(s+1)} v^{2-\delta},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中

$$\widetilde{d}_{k-s} = -\frac{s+n+1-\delta}{s+1}\left(1+\frac{k-s}{2(s+1)}\right) + \frac{n-k+s}{2(s+1)},\ \tilde{c}_{k-s-1} = \frac{(s+n+1-\delta)(s+2)}{2(s+1)^2},$$

$$g_s = \frac{n-k+s}{2(s+1)},\ f_s = \frac{s}{s+1},\ \widetilde{h}_s = \frac{n-k+s}{s+1}.$$

由(4.8)式，

$$\begin{aligned}
&B_{k-1} \\
=&\widetilde{d}_{k-1}\int \sigma_{k-1}|\nabla v|^4 v^{-\delta} + \tilde{c}_{k-2}\Big[\widetilde{d}_{k-2}\int \sigma_{k-2}|\nabla v|^6 v^{-\delta} + \tilde{c}_{k-3} B_{k-3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu\tilde{c}_{k-3}g_3\int\sigma_{k-3}|\nabla v|^6v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-3}f_3\int T_{ij}^{k-3}v_iv_j|\nabla v|^4v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-3}\widetilde{h}_3\int T_{ij}^{k-4}v_iv_j|\nabla v|^6v^{2-\delta}\Bigg]+\mu\tilde{c}_{k-2}g_2\int\sigma_{k-2}|\nabla v|^4v^{2-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}f_2\int T_{ij}^{k-2}v_iv_j|\nabla v|^2v^{2-\delta}-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\widetilde{h}_2\int T_{ij}^{k-3}v_iv_j|\nabla v|^4v^{2-\delta}\\
=&\widetilde{d}_{k-1}\int\sigma_{k-1}|\nabla v|^4v^{-\delta}+\tilde{c}_{k-2}\widetilde{d}_{k-2}\int\sigma_{k-2}|\nabla v|^6v^{-\delta}+\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}\boldsymbol{B}_{k-3}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}g_3\int\sigma_{k-3}|\nabla v|^6v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}f_3\int T_{ij}^{k-3}v_iv_j|\nabla v|^4v^{2-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}g_2\int\sigma_{k-2}|\nabla v|^4v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-2}f_2\int T_{ij}^{k-2}v_iv_j|\nabla v|^2v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}\widetilde{h}_3\int T_{ij}^{k-4}v_iv_j|\nabla v|^6v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\widetilde{h}_2\int T_{ij}^{k-3}v_iv_j|\nabla v|^4v^{2-\delta}.
\end{aligned}
$$

将上式反复迭代：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_{k-1}\\
=&\widetilde{d}_{k-1}\int\sigma_{k-1}|\nabla v|^4v^{-\delta}+\tilde{c}_{k-2}\widetilde{d}_{k-2}\int\sigma_{k-2}|\nabla v|^6v^{-\delta}\\
&+\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}\widetilde{d}_{k-3}\int\sigma_{k-3}|\nabla v|^8v^{-\delta}+\cdots+\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_2\widetilde{d}_2\int\sigma_2|\nabla v|^{2(k-1)}v^{-\delta}\\
&+\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\boldsymbol{B}_1+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1g_{k-1}\int\sigma_1|\nabla v|^{2(k-1)}v^{2-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_2g_{k-2}\int\sigma_2|\nabla v|^{2(k-2)}v^{2-\delta}+\cdots+\mu\tilde{c}_{k-2}g_2\int\sigma_{k-2}|\nabla v|^4v^{2-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1f_{k-1}\int T_{ij}^1v_iv_j|\nabla v|^{2(k-2)}v^{2-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_2f_{k-2}\int T_{ij}^2v_iv_j|\nabla v|^{2(k-3)}v^{2-\delta}\\
&+\cdots+\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}f_3\int T_{ij}^{k-3}v_iv_j|\nabla v|^4v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-2}f_2\int T_{ij}^{k-2}v_iv_j|\nabla v|^2v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\widetilde{h}_{k-1}\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_2\widetilde{h}_{k-2}\int T_{ij}^1v_iv_j|\nabla v|^{2(k-2)}v^{2-\delta}\\
&-\cdots-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}\widetilde{h}_3\int T_{ij}^{k-4}v_iv_j|\nabla v|^6v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\widetilde{h}_2\int T_{ij}^{k-3}v_iv_j|\nabla v|^4v^{2-\delta}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

由 T^k 的定义和分部积分，可以得到 B_1：

$$
\begin{aligned}
B_1 =& -\frac{k+n-\delta}{k}\int T^1_{ij}v_iv_j|\nabla v|^{2(k-1)}v^{-\delta}+\frac{n-1}{2k}\int\sigma_1|\nabla v|^{2k}v^{-\delta}\\
=&(\frac{n-1}{2k}-\frac{n+k-\delta}{k})\int\sigma_1|\nabla v|^{2k}v^{-\delta}+\frac{k+n-\delta}{k}\int v_{ij}v_iv_j|\nabla v|^{2(k-1)}v^{1-\delta}\\
&+\frac{k+n-\delta}{2k}\mu\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}-\frac{k+n-\delta}{2k}\int|\nabla v|^{2(k+1)}v^{-\delta}\\
=&(\frac{n-1}{2k}-\frac{n+k-\delta}{k})\int\sigma_1|\nabla v|^{2k}v^{-\delta}+\frac{k+n-\delta}{2k^2}\int(|\nabla v|^{2k})_{,j}v_jv^{1-\delta}\\
&+\frac{k+n-\delta}{2k}\mu\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}-\frac{k+n-\delta}{2k}\int|\nabla v|^{2(k+1)}v^{-\delta}\\
=&(\frac{n-1}{2k}-\frac{n+k-\delta}{k})\int\sigma_1|\nabla v|^{2k}v^{-\delta}-\frac{k+n-\delta}{2k^2}\int\Delta v|\nabla v|^{2k}v^{1-\delta}\\
&-\left(\frac{k+n-\delta}{2k^2}(1-\delta)+\frac{k+n-\delta}{2k}\right)\int|\nabla v|^{2(k+1)}v^{-\delta}+\frac{k+n-\delta}{2k}\mu\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\sigma_1=v\Delta v+\frac{n}{2}\mu v^2-\frac{n}{2}|\nabla v|^2$，于是

$$
\begin{aligned}
B_1 =&\widetilde{d_1}\int\sigma_1|\nabla v|^{2k}v^{-\delta}+\widetilde{d_0}\int|\nabla v|^{2(k+1)}v^{-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_0g_k\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_0f_k\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta},
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

其中 $\widetilde{d_1}=\frac{n-1}{2k}-\frac{n+k-\delta}{k}-\frac{k+n-\delta}{2k^2}$,

$$
\widetilde{d_0}=-(\frac{k+n-\delta}{2k^2}\frac{n}{2}+\frac{k+n-\delta}{2k^2}(1-\delta)+\frac{k+n-\delta}{2k}).
$$

将(4.10)代入(4.9)，得

$$
\begin{aligned}
&B_{k-1}\\
=&\widetilde{d}_{k-1}\int\sigma_{k-1}|\nabla v|^4v^{-\delta}+\tilde{c}_{k-2}\widetilde{d}_{k-2}\int\sigma_{k-2}|\nabla v|^6v^{-\delta}\\
&+\cdots+\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\widetilde{d_1}\int\sigma_1|\nabla v|^{2k}v^{-\delta}+\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\widetilde{d_0}\int|\nabla v|^{2(k+1)}v^{-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\tilde{c}_0g_k\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1g_{k-1}\int\sigma_1|\nabla v|^{2(k-1)}v^{2-\delta}\\
&+\cdots+\mu\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}g_3\int\sigma_{k-3}|\nabla v|^6v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-2}g_2\int\sigma_{k-2}|\nabla v|^4v^{2-\delta}\\
&+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\tilde{c}_0f_k\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1f_{k-1}\int T^1_{ij}v_iv_j|\nabla v|^{2(k-2)}v^{2-\delta}\\
&+\cdots+\mu\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}f_3\int T^{k-3}_{ij}v_iv_j|\nabla v|^4v^{2-\delta}+\mu\tilde{c}_{k-2}f_2\int T^{k-2}_{ij}v_iv_j|\nabla v|^2v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\widetilde{h}_{k-1}\int|\nabla v|^{2k}v^{2-\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_2\widetilde{h}_{k-2}\int T_{ij}^{1}v_iv_j|\nabla v|^{2(k-2)}v^{2-\delta}\\
&-\cdots-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\tilde{c}_{k-3}\widetilde{h}_3\int T_{ij}^{k-4}v_iv_j|\nabla v|^{6}v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\tilde{c}_{k-2}\widetilde{h}_2\int T_{ij}^{k-3}v_iv_j|\nabla v|^{4}v^{2-\delta}.
\end{aligned}
$$

当 $2\leqslant s\leqslant k-1$ 时，取

$$
d_0=\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_1\widetilde{d}_0,\ d_{k-1}=\widetilde{d}_{k-1},\ d_{k-s}=\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_{k-s}\widetilde{d}_{k-s},
$$

当 $2\leqslant s\leqslant k$ 时，取

$$
c_{k-s}=\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_{k-s}g_s,\ e_{k-s}=\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_{k-s}f_s,\ h_{k-s}=\tilde{c}_{k-2}\cdots\tilde{c}_{k-s}\widetilde{h}_s,
$$

于是

$$
\begin{aligned}
B_{k-1}=&-\frac{2+n-\delta}{2}\int T_{ij}^{k-1}v_iv_j|\nabla v|^2v^{-\delta}+\frac{n-k+1}{4}\int\sigma_{k-1}|\nabla v|^4v^{-\delta}\\
=&\sum_{s=1}^{k}d_{k-s}\int\sigma_{k-s}|\nabla v|^{2(s+1)}v^{-\delta}+\mu\sum_{s=2}^{k}c_{k-s}\int\sigma_{k-s}|\nabla v|^{2s}v^{2-\delta}\\
&+\mu\sum_{s=2}^{k}e_{k-s}\int T_{ij}^{k-s}v_iv_j|\nabla v|^{2(s-1)}v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\sum_{s=2}^{k-1}h_{k-s}\int T_{ij}^{k-s-1}v_iv_j|\nabla v|^{2s}v^{2-\delta}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

对比(4.7)和(4.11)两式，有

$$
\begin{aligned}
&\int L_{ij}^{k}v_iv_jv^{-\delta}\\
=&-\frac{n+2}{2n}k\int\sigma_k|\nabla v|^2v^{-\delta}+B_{k-1}+\mu\frac{1}{2}\int T_{ij}^{k-1}v_iv_jv^{2-\delta}\\
&+\frac{n-k+1}{4}\mu\int\sigma_{k-1}|\nabla v|^2v^{2-\delta}\\
&-\frac{1}{2}(\mu-1)(n-k+1)\int T_{ij}^{k-2}v_iv_j|\nabla v|^2v^{2-\delta}\\
=&-\frac{n+2}{2n}k\int\sigma_k|\nabla v|^2v^{-\delta}+\sum_{s=1}^{k}d_{k-s}\int\sigma_{k-s}|\nabla v|^{2(s+1)}v^{-\delta}\\
&+\mu\sum_{s=1}^{k}c_{k-s}\int\sigma_{k-s}|\nabla v|^{2s}v^{2-\delta}+\mu\sum_{s=1}^{k}e_{k-s}\int T_{ij}^{k-s}v_iv_j|\nabla v|^{2(s-1)}v^{2-\delta}\\
&-(\mu-1)\sum_{s=1}^{k-1}h_{k-s}\int T_{ij}^{k-s-1}v_iv_j|\nabla v|^{2s}v^{2-\delta},
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

其中 $c_{k-1}=\dfrac{n-k+1}{4}$，$e_{k-1}=\dfrac{1}{2}$，$h_{k-1}=\dfrac{n-k+1}{2}$. 将(4.12)代入(4.4)，即可得到(4.3).

当 $\delta<n+1$ 时，$\tilde{c}_{k-s-1}>0$，$\forall 0\leqslant s\leqslant k-1$. 由 $n>2k$ 知，当 δ 小于 $n+1$ 且靠近 $n+1$ 时，$\widetilde{d}_{k-s}>0$，$\forall 1\leqslant s\leqslant k$，因此 $d_{k-s},c_{k-s},e_{k-s}>0$，且当 $\beta>0$ 时，$\dfrac{n-k}{n}\beta-\dfrac{k(n+2)}{2n}(n+1-\delta)>0$. ∎

定理 1.7 的证明.　在(4.3)中取 $\delta=n+1$，那么

$$0=\int L_{ij}^{k}E_{ij}v^{-n-1}+\frac{n-k}{n}\beta\int\sigma_k|\nabla v|^2v^{-n-1}-(\mu-1)(n-k)\int T_{ij}^{k-1}v_iv_jv^{1-n}.$$

由引理4.7(5) 和引理4.12，上式等号右边的每一项非负. 如果 $k<n$、$\beta>0$、$\mu\leqslant 1$ 或 $k<n$、$\beta=0$、$\mu<1$，则 $|\nabla v|=0$，进而 v 是常数. 如果 $k<n$、$\beta=0$、$\mu=1$，则 $E_{ij}=0$，于是存在 $t\geqslant 0$，$a\in\mathbb{S}^n$，使得

$$v(x)=S(n,k)^{-1}(\cosh t+\sinh t\langle a,x\rangle).$$

∎

在欧氏空间上，虽然恒等式是一样的，但是需要足够的好项以分部积分，因此不可以直接取 $\delta=n+1$，而要取 $\delta<n+1$ 且充分靠近 $n+1$. 不仅如此，在分部积分后的积分估计过程中，对于 k 会产生额外要求，进而目前只能得到 k 较小情况下的 Liouville 型定理，详情请参考文献 [9][20].

值得注意的是，不变张量技术目前尚未成功应用到 σ_k 次临界指标方程上，根本原因有二：1. 在尝试使用不变张量技术的过程中，在 $k\geqslant 2$ 时会出现三阶混合导数，进而导致无法进行下一步操作；2. 引理4.12只给出了主项的正性，而对应于 $k=1$ 的去处理过程，主项还需要参与配方，这个过程中能够更好地利用主项的正性，但是在 $k\geqslant 2$ 的时候无法做到. 如果能够成功解决上述两个问题，那么就有可能将不变张量技术发展到 σ_k 次临界指标方程，进而将 μ 的范围做到更大. 目前定理1.7中 $\mu\leqslant 1$ 的范围只相当于 $k=1$ 时的 $\lambda\leqslant\dfrac{n(n-2)}{4}$，这当然在次临界指标时无法达到 $\dfrac{n}{\alpha-1}$.

第 5 章　不变张量技术的总结与展望

分部积分法的目标是通过寻找向量场，建立其散度等于一些非负项之和的微分恒等式，进而得到所需的结论. 在对方程进行量纲分析后，可以确定不变张量由哪些项组成. 通过考察微分不变性，可以定出各项之间的线性组合系数，这也是正是不变张量名字的由来. 不变张量被成功得到后，需要的微分恒等式将会自然被推出. 本文正是使用了这套过程，解决了 CR 几何次临界指标方程的刚性猜想，建立理论框架回答了 1988 年 Jerison-Lee 提出的问题，得到一类实流形上半线性方程新的解分类结果，并给出了 Heisenberg 群次临界指标方程 Liouville 定理的新证明.

此外，本文还应用传统的分部积分方法，研究了球面上一类 σ_k 型次临界指标方程，并得到了相应的 Liuoville 型定理. 在研究的最后，分析了目前的不变张量技术无法应用到一般 σ_k 型算子的原因，如何攻克这个困难，是将来不变张量技术继续发展的研究方向之一.

本文对于二阶半线性方程的讨论十分深入，那么对于拟线性方程或者高阶方程，是否可以类似研究？截止到目前，笔者同合作者已经在欧氏空间上的拟线性方程 $\Delta_m u + u^p|\nabla u|^q = 0$，欧氏空间上的四阶方程 $\Delta^2 u = u^\alpha$，实流形上相应于 Q-曲率的四阶方程 $\Delta^2 u - \lambda_1 \Delta u + \lambda_2 u = u^\alpha$ 或 e^{4u} 等方程的研究中取得了若干进展. 不过想要继续深入研究，还可能需要更多未知工具的辅助，不过这不影响不变张量技术的发展潜力.

参 考 文 献

[1] Davide Barilari, Ugo Boscain, and Mario Sigalotti, editors. *Geometry, analysis and dynamics on sub-Riemannian manifolds. Vol. 1*. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016. Lecture notes from the IHP Trimester held at the Institut Henri Poincaré, Paris and from the CIRM Summer School "Sub-Riemannian Manifolds: From Geodesics to Hypoelliptic Diffusion" held in Luminy, Fall 2014.

[2] Marie-Françoise Bidaut-Véron and Laurent Véron. Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations. *Invent. Math.*, 106(3):489–539, 1991.

[3] Luis A. Caffarelli, Basilis Gidas, and Joel Spruck. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(3):271–297, 1989.

[4] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky, and Paul Yang. An a priori estimate for a fully nonlinear equation on four-manifolds. volume 87, pages 151–186. 2002. Dedicated to the memory of Thomas H. Wolff.

[5] Jean Dolbeault, Maria J. Esteban, and Michael Loss. Nonlinear flows and rigidity results on compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 267(5):1338–1363, 2014.

[6] Sorin Dragomir and Giuseppe Tomassini. *Differential geometry and analysis on CR manifolds*, volume 246 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.

[7] Lars Gàrding. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, 8:957–965, 1959.

[8] B. Gidas and J. Spruck. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(4):525–598, 1981.

[9] María del Mar González. Classification of singularities for a subcritical fully nonlinear problem. *Pacific J. Math.*, 226(1):83–102, 2006.

[10] María del Mar González. Removability of singularities for a class of fully non-linear elliptic equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 27(4):439–466, 2006.

[11] Mohammed Guedda and Laurent Véron. Local and global properties of solutions of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 76(1):159–189, 1988.

[12] David Jerison and John M. Lee. The Yamabe problem on CR manifolds. *J. Differential Geom.*, 25(2):167–197, 1987.

[13] David Jerison and John M. Lee. Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):1–13, 1988.

[14] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*,

17(1):37–91, 1987.

[15] Aobing Li and Yanyan Li. On some conformally invariant fully nonlinear equations. II. Liouville, Harnack and Yamabe. *Acta Math.*, 195:117–154, 2005.

[16] Yanyan Li. Conformally invariant fully nonlinear elliptic equations and isolated singularities. *J. Funct. Anal.*, 233(2):380–425, 2006.

[17] Gary M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

[18] Xi-Nan Ma and Qianzhong Ou. A Liouville theorem for a class semilinear elliptic equations on the Heisenberg group. *Adv. Math.*, 413:Paper No. 108851, 20, 2023.

[19] Morio Obata. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 6:247–258, 1971/72.

[20] Qianzhong Ou. Singularities and Liouville theorems for some special conformal Hessian equations. *Pacific J. Math.*, 266(1):117–128, 2013.

[21] Qianzhong Ou. On the classification of entire solutions to the critical p-laplace equation. *Preprint*, arXiv:2210.05141.

[22] Robert C. Reilly. On the Hessian of a function and the curvatures of its graph. *Michigan Math. J.*, 20:373–383, 1973.

[23] James Serrin and Henghui Zou. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities. *Acta Math.*, 189(1):79–142, 2002.

[24] Joel Spruck. Geometric aspects of the theory of fully nonlinear elliptic equations. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 283–309. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[25] Giorgio Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 110:353–372, 1976.

[26] Jérôme Vétois. A note on the classification of positive solutions to the critical p-laplace equation in $\mathbb{R}^n$. *Preprint*, arXiv:2304.02600.

[27] Jeff A. Viaclovsky. Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations. *Duke Math. J.*, 101(2):283–316, 2000.

[28] Xiaodong Wang. On a remarkable formula of Jerison and Lee in CR geometry. *Math. Res. Lett.*, 22(1):279–299, 2015.

[29] Xiaodong Wang. Uniqueness results on a geometric PDE in Riemannian and CR geometry revisited. *Math. Z.*, 301(2):1299–1314, 2022.

[30] Lu Xu. Semi-linear Liouville theorems in the Heisenberg group via vector field methods. *J. Differential Equations*, 247(10):2799–2820, 2009.

致　谢

岁月不居，时节如流. 自本科入学少年班学院算起，在科大已有九度春秋. 在这期间，我学到了知识、增长了见识、结交了朋友、丰富了经历，可谓收获颇丰.

我首次接触恩师麻希南教授，是在大二微分方程 I 的课上，印象很深的就是第一次课麻老师讲了对数梯度估计，这个通过巧妙构造和复杂计算得到的简洁结论，立刻吸引了擅长计算的我. 临近大三时，数学院的姚钧夫同学联系到了我，说想一起做个国创项目，钧夫同我讲他的班主任乐琻老师说："如果想做代数方向，可以找陈小伍老师；如果想做分析方向，可以找麻希南老师. " 钧夫让我选，对于代数那种很抽象的数学没有感觉的我毫不犹豫地选择了跟麻希南老师做国创项目. 于是我和钧夫几乎是以隔周一次的频率去找过麻老师数次，麻老师给了我们很多论文让我们选题，最终我们选择了无限维约化. 通过当时的学习，我更加深入地了解了偏微分方程这个方向，也渐渐意识到了这个领域可以发挥我善于计算的长处. 而麻老师高深的学术造诣、执着的学术追求以及指导学生认真负责的态度也吸引了我. 于是在本科毕业之际，我决定了跟随麻老师深造学习.

研究生阶段，麻老师给过我很多题目，但是最开始的几个题目均没有很好的思路. 直到我接触了使用分部积分技术研究解的分类问题开始，逐渐领会了以前该领域相关工作的精神，并形成了自己处理这类问题的一套方法，即本论文的核心主题——不变张量技术. 从最开始对各类已有的相关结果给出新证明，这个历时近一年的过程非常重要，因为不仅逐步地完善好了不变张量技术，还逐渐增长了信心. 2023 年 6 月，有了不变张量技术的充分发展，以及对于相关问题的认识、积累、领悟、沉淀，我终于开始正式使用不变张量技术尝试解决 Cauchy-Riemann 几何上次临界指标方程的刚性猜想，并于当月完成了 2 维以上的证明. 1 维的情况很是特殊，以至于暑假阶段我曾一度怀疑其正确性，但是在 9 月底，随着对于不变张量技术的更进一步认识，我终于通过分而置之的想法，根据不同情况使用不同的不变张量思想，解决了 1 维情形. 此后，我陆续使用不变张量技术和分部积分方法，同周晓得到了流形上一种四阶方程的 Liouville 型定理，同侍述军、王培合、朱华得到了球面上 σ_k-Yamabe 次临界方程的 Liouville 型定理. 现在，我同朱华在使用不变张量技术，进行带有梯度项的方程的解的分类研究，并已经取得了一定进展.

合适的才是最好的. 在我研究生阶段的科研道路上，麻希南老师根据我擅长计算的特点，向我提了这个非常适合我的问题，并且总能在合适的时机给予合适的指导，这令我受益匪浅. 我一直以来对于应用数学，尤其是计算数学感兴趣，以后也想解决更加具有应用前景的数学问题. 对此，麻老师也给予了我充分的支

持与鼓励，并安排机会让我同科大相关领域的专家、教授交流. 无论是学术成就、科研精神、传道授业还是为人处事，麻老师都是值得我一生追求、学习的榜样. 师母周琪老师为人随和大方，经常请我们一起吃饭聊天，在我们日常生活中提供了很多帮助，在此也深表感谢.

在计算数学的学习方面，刘利刚老师给了我很多支持和帮助. 通过跟他多次讨论交流，我对于计算数学领域有了更多的了解，并有机会同刘老师及他的学生合作完成了一篇论文. 还要感谢陈发来老师对于我在计算数学方面的指点. 在研究生阶段基础数学课程学习方面，还要感谢陈洪佳、陈世炳、梁永祺、刘世平、麻希南、夏波、俞建青、赵立丰（按拼音排序）等各位任课老师；正在旁听的应用数学课程中，感谢陈士祥、蒋琰、李新、刘利刚、徐岩、张举勇（按拼音排序）等各位任课老师. 此外，还要感谢我担任蜗壳学社版主，大学生数学竞赛教练员、决赛领队，科大课程助教期间得到的各位老师的帮助.

心无旁骛的学习离不开行政工作的保障. 感谢万宏艳、王莉两位老师，分别作为我硕士和博士阶段的班主任，是你们认真负责的工作让我能够更好地全身心投入到学习科研中，是你们的鼓励让我每次申报奖项时能够充满信心，是你们的支持让我每次组织班级活动时能够大展身手. 感谢郑芳老师，作为学院党委副书记、前任团委书记、研究生基础数学第二党支部书记，当我在院团委、党支部、班级团支部担任学生干部期间，无论在工作上还是学习生活中，您给了我很大的支持与鼓励. 还要感谢学院其他各位行政人员，有了你们的辛勤付出与服务，才让我们学业科研上无后顾之忧.

感谢自研究生入学以来，邓斌、贾晓含、高正焕、周俊东、张逸天、梅新群、林道问、吴汪哲、朱华、周晓、余宝、闫谨、周扬、李家欢、徐书凝等各位一同学习过的同门，他们坚定执着地攀登着数学的高峰，都值得我学习. 朱华是和我讨论最多的同门之一了，他年长我几岁，关系熟络后，我一般称呼他为华哥. 华哥已经是西南科技大学的老师，社会经历比我丰富多了. 在日常学习生活中，他经常会在各种各样的问题上给予我指导和帮助. 他有着丰富的学生工作经历，在我担任学生干部期间，华哥也为我提供了很多指导性建议. 凡此种种，都令我在为人处事、接人待物方面比曾经那个一心只读圣贤书的学生提升了很多. 周晓和我除了科研上的合作外，还经常一起打桥牌，他的技术很好，且从不因失误而大发雷霆，在他的带领下，我们斩获了不少在校生层面的国家级比赛奖项. 有趣的是，我和周晓最初的相识是在牌桌上，那时我们研一，聊天时才发现都是麻老师的学生. 除了桥牌，我们还经常一起交流音乐、探寻美食.

感谢在我研究生期间，张德凯师兄、高正焕师兄邀请我前往上海大学交流访问，曲阜师范大学的王培合教授、南京大学的韦韡师姐、宁波大学的陈传强师兄（长三角 PDE 论坛）、新疆师范大学的韩菲师姐、哈尔滨师范大学的侍述军师兄、

中南大学的胡烨耀副教授邀请我报告我的工作.

还要感谢在学院团委、学研两会、党支部、班级团支部、社团一起共事过的同学，没有你们的积极付出，不会有我任职期间获得过的成绩与奖项.

最后，感谢一直以来陪伴我并默默支持我的家人，感谢养育我的家乡齐齐哈尔，感谢勇往直前的自己，一切尽在不言中.

吴天　May 21, 2024

于中国科学技术大学

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. Shujun Shi, Peihe Wang, **Tian Wu**, Hua Zhu, *An Obata-type formula and the Liouville-type theorem for a class of k-Hessian equations on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. (2024), 已接收, 未见刊.
2. 麻希南, **吴天**, 不变张量技术在半线性椭圆与次椭圆偏微分方程解的分类中的应用, 中国科学: 数学 (2024), 已接收, 未见刊.

待发表论文

1. Xi-nan Ma, Qianzhong Ou, **Tian Wu**, *Jerison-Lee identities and Semi-linear subelliptic equations on CR manifolds*, arXiv:2311.16428.
2. **Tian Wu**, Hua Zhu, *A type of quasilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms*.