2019年秋季学期 微分方程I 第二次小测

出题人: 张永兵　整理人: 吴天

---

1. (8分×6)求解下列方程(组):

(1) $y''-2y'+y=0.$

(2) $\begin{cases} y''-y=4\mathrm{e}^{-x},\ x\in(0,1) \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{cases}$

(3) $y''+\dfrac{1}{4x^2}y=0,\ x>1.$

(4) $\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=2x+y. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dot{x}=y-5\cos t, \\ \dot{y}=2x+y. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dot{x}=3x-2y+\dfrac{1}{2}z, \\ \dot{y}=x+\dfrac{1}{2}z, \\ \dot{z}=2x-4y+z. \end{cases}$

2. (8分×2)求下列方程的通解.

(1) $y''=\sqrt{1+(y')^2}.$

(2) $2yy''-(y')^2=1.$

3. (8分×2)判断如下系统零解的稳定性并给出证明.

(1) $\begin{cases} \dot{x}=-x-y^3 \\ \dot{y}=x-y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dot{x}=y-f(x) \\ \dot{y}=-g(x) \end{cases}$, 其中$f(x),g(x)$连续, 且当$x\neq 0$时, $xf(x)>0$, $xg(x)>0$.

4. (8分+8分+4分=20分).

(1) 求方程$y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$的奇解$y=y(x)$.

(2) 求如下一族(由$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$给出)$xy$平面上的参数曲线的包络

$$\begin{cases} x(t)=t\cos\theta, \\ y(t)=t\sin\theta-5t^2. \end{cases}$$

(3) 设$F(x,y,p)$及偏导数F_y,F_p连续. 设$y\varphi(x)$是$F(x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0$的奇解. 证明: $F_p'(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0$.

2019年秋季学期 微分方程I 第二次小测 参考答案

这是一份参考答案, 内容如有谬误、遗漏、不明晰, 请联系我.

---

1. (1) 十分简单, 特征根为二重根1. 参考答案: $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$.

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{D}^2-1}(4\mathrm{e}^{-x})=\dfrac{-2}{\mathrm{D}+1}(\mathrm{e}^{-x})=-2\mathrm{e}^{-x}\dfrac{1}{\mathrm{D}}(1)=-2x\mathrm{e}^{-x}$为无初值的特解.

$\therefore$通解为$y=C_1\mathrm{e}^x+(C_2-2x)\mathrm{e}^{-x}$. 代入初值条件, 得到参考答案: $y=\mathrm{e}^x-(1+2x)\mathrm{e}^{-x}$.

(3) $4x^2y''+y=0$, 这是一个Euler方程, 设$x=\mathrm{e}^t$, $\dot y=xy'$, $\ddot y=x^2y''+xy'$. 因此$4\ddot y-4\dot y+y=0$.

参考答案: $y=(C_1+C_2\ln x)\sqrt{x}$.

(4) 观察到$2\dot x-\dot y=-(2x-y)$, 因此$2x-y=C_1\mathrm{e}^{-t}$. 代入第一个方程: $\dot x=2x-C_1\mathrm{e}^{-t}$.

$-C_1\dfrac{1}{\mathrm{D}-2}(\mathrm{e}^{-t})=\dfrac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-t}$是它的一个特解, 因此通解为$x=\dfrac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{2t}$, 进而$y=-\dfrac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-t}+2C_2\mathrm{e}^{2t}$.

参考答案: $x=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{2t},\ y=-C_1\mathrm{e}^{-t}+2C_2\mathrm{e}^{2t}$.

(5) 设$A=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\mathrm{D}-A}\begin{pmatrix}-5\cos t\\0\end{pmatrix}=\dfrac{\mathrm{D}+A}{\mathrm{D}^2-A^2}\begin{pmatrix}-5\cos t\\0\end{pmatrix}=\dfrac{\mathrm{D}+A}{-I-A^2}\begin{pmatrix}-5\cos t\\0\end{pmatrix}$

$$=(\mathrm{D}+A)\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\cos t\\0\end{pmatrix}=(\mathrm{D}+A)\begin{pmatrix}2\cos t\\-\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sin t-\cos t\\\sin t+3\cos t\end{pmatrix}$$

是方程的一个特解, 因此利用(4), 通解为: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\sin t-\cos t\\\sin t+3\cos t\end{pmatrix}$.

(6) 设$A=\begin{pmatrix}3&-2&\frac12\\1&0&\frac12\\2&-4&1\end{pmatrix}$, A的特征值为2和$1\pm\mathrm{i}$. 2对应的特征向量: $(2,1,0)^T$, $1+\mathrm{i}$对应的特征向量: $(1,1,2\mathrm{i})^T$.

参考答案: $(x,y,z)^T=C_1\mathrm{e}^{2x}(2,1,0)^T+C_2\mathrm{e}^x(\cos x,\cos x,-2\sin x)^T+C_3\mathrm{e}^x(\sin x,\sin x,2\cos x)^T$.

2. (1) $\dfrac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\mathrm{d}x$, 因此$\operatorname{arcsinh}y'=x+C$. 参考答案: $y=\cosh(x+C_1)+C_2$.

(2) 对x求导: $2yy'''=0$, 且$y=0$不是解, 因此$y'''=0$, $y''=C_1$, $y'=C_1x+C_2$. 将它们代回原方程:

$$2C_1y=1+(C_1x+C_2)^2.$$

经检验, 它是方程的解. 参考答案: $y=\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2x+\dfrac{C_2^2}{2C_1}-1$.

3. (1) 取$V(x,y)=2x^2+y^4$, 则$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-4x^2-4y^4<0\ (x^2+y^2\neq0)$. 渐近稳定.

(2) 取$V(x,y)=\dfrac12y^2+\displaystyle\int_0^x g(s)\mathrm{d}s$, 则$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-f(x)g(x)\leqslant0$, 因此零解是稳定的.

但是由方程知: $x\equiv0$时, $y\equiv0$, 无法构成轨线, 因此$V(t)$是严格递减的, 零解渐近稳定.

4. (1)$F(x,y,p)=xp+\sqrt{1+p^2}-y$, 列出$p$-判别式:

$$\begin{cases}F(x,y,p)=xp+\sqrt{1+p^2}-y=0\\F_p'(x,y,p)=x+\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0\end{cases}$$

解得: $p=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y=\sqrt{1-x^2}$. 对于这个解, 检查:

$$\begin{cases}F_y'(x,y,p)=-1\neq0\\F_{pp}''(x,y,p)=(1+p^2)^{-\frac32}\neq0\end{cases}$$

因此, $y=\sqrt{1-x^2}$是方程的奇解.

(2)$V(x,y,\theta)=(y+5x^2\sec^2\theta)^2-x^2\tan^2\theta$, 不妨变换曲线族参数: $C=\sec^2\theta\in(1,+\infty)$, 则

$$V(x,y,C)=(y+5Cx^2)^2-Cx^2+x^2.$$

考察C-判别式: $\begin{cases} V(x,y,C)=(y+5Cx^2)^2-Cx^2+x^2=0 \\ V'_C(x,y,C)=10x^2(y+5Cx^2)-x^2=0 \end{cases}$, 因此$y=-5x^2+\dfrac{1}{20}$.

刚刚的方程可以解出: $x=\pm\dfrac{1}{10\sqrt{C-1}}$, $y=\dfrac{C-2}{20(C-1)}$. 代入非蜕化性条件检验:

$$\begin{cases} (x'(C),y'(C))=(\mp\dfrac{1}{20(C-1)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{1}{20(C-1)^2})\neq(0,0) \\ (V'_x,V'_y)=(20Cx(y+5Cx^2)-2Cx+2x,2(y+5Cx^2)) \end{cases}$$

其中如果$(V'_x,V'_y)=(0,0)$, 则$y+5Cx^2=0$, 从而代入$V'_x=0$有: $C=1$, 矛盾!

$\therefore y=\dfrac{C-2}{20(C-1)}$满足非蜕化性条件, 因此, 它是曲线族的包络.

(3)参考丁同仁107页定理4.1.