微分方程I(2019年10月9日)

一(10分$\times$6) 求解下列方程：

(1) $(5-x)dy=(5-x+y)dx$

(2) $(ye^x+2e^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy=0$

(3) $ydx-xdy=0$

(4) $\frac{dx}{dt}=x^2$，其中$t\geq 0, x>0$

(5) $(y+2x-4x^2+x^3)dx-2xdy=0$，其中$x>0$

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x-y}$

二(10分$\times$2):

(1)求解

$$y=x\frac{dy}{dx}+(\frac{dy}{dx})^2.$$

(2)利用参数法求解

$$y[1+(\frac{dy}{dx})^2]=2R,$$

其中$R>0$为常数。将方程的解表示为参数θ的形式，其中θ使得$\frac{dy}{dx}=\cot\frac{\theta}{2}$。

三(10分$\times$2):

(1)求曲线族$\{y^2=2bx, b\in\mathbb{R}\}$满足的一阶微分方程；

(2) 求xy平面上与曲线族$\{y^2=2bx, b\in\mathbb{R}\}$正交的曲线。

解答：

(1) $(5-x)dy=(5-x+y)dx$

解：变形为

$$(5-x+y)dx+(x-5)dy=0.$$

$$P_y=1=Q_x,$$

因此为恰当方程，

$$d(xy+5x-5y-\frac{1}{2}x^2)=0,$$

$$xy+5x-5y-\frac{1}{2}x^2=C,$$

$$(x-5)y=\frac{1}{2}x^2-5x+C.$$

(2)$(ye^x+2e^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy=0$

解：$P_y=Q_x=e^x+2y$，因此为恰当方程。找$\Phi(x,y)$使得

$$\Phi_x=ye^x+2e^x+y^2,\quad \Phi_y=e^x+2xy,$$

由后者

$$\Phi=ye^x+xy^2+f(x),$$

由前者$f(x)=2e^x$，因此

$$\Phi(x,y)=ye^x+xy^2+2e^x=C.$$

(3) $ydx-xdy=0$

解：$x\equiv 0, y\equiv 0$为特解。此外，化为变量分离形式的方程

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

因此解为

$$y=Cx,\quad \text{or}\quad x\equiv 0.$$

(4) $\frac{dx}{dt}=x^2$，其中$t\geq 0, x>0$

解：化为

$$d(\frac{1}{x})=-dt,$$

因此
$$\frac{1}{x}=C-t,$$
解为
$$x=\frac{1}{C-t},\quad C>0,t\in[0,C).$$

(5) $(y+2x-4x^2+x^3)dx-2xdy=0$，其中$x>0$

解：化为一阶线性方程
$$y'-\frac{1}{2x}y=1-2x+\frac{1}{2}x^2.$$
因此，方程有积分因子
$$\mu(x)=x^{-\frac{1}{2}}.$$
因此
$$d(x^{-\frac{1}{2}}y)=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C,$$
$$y=2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3+Cx^{\frac{1}{2}}.$$

另解：$P_y\neq Q_x$ 考虑分组
$$(ydx-2xdy)+(2x-4x^2+x^3)dx=0,$$
因此对前者求积分因子$\mu(x)$，
$$\mu(x)=-2\mu-2x\mu'(x),$$
因此有积分因子
$$\mu(x)=x^{-\frac{3}{2}}.$$
乘以积分因子之后化为
$$d(-2x^{-\frac{1}{2}}y)+x^{-\frac{3}{2}}(2x-4x^2+x^3)dx=0,$$
$$y=2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3+Cx^{\frac{1}{2}}.$$

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{3x-y}$

解：令$y=xu$，则
$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{3-u},$$
$$6\arctan u-\ln(1+u^2)=2\ln|x|+C,$$

$$x^2+y^2=r^2=Ce^{6\arctan\frac{y}{x}},\quad C>0$$

$$r=Ce^{3\theta},\quad C>0.$$

二(1)

$$y=x\frac{dy}{dx}+(\frac{dy}{dx})^2.$$

解：令$p=\frac{dy}{dx}$。对x求导得

$$(x+2p)\frac{dp}{dx}=0,$$

因此

$$p=-\frac{x}{2},$$

或

$$p=C.$$

代回方程分别得到特解

$$y=-\frac{x^2}{4},$$

和通解

$$y=Cx+C^2.$$

(2)

$$y[1+(\frac{dy}{dx})^2]=2R$$

解：令$\frac{dy}{dx}=\cot\frac{\theta}{2}$，则令

$$y=R(1-\cos\theta),$$

则

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{R\sin\theta d\theta}{\cot\frac{\theta}{2}}=R(1-\cos\theta)d\theta,$$

所以通解的参数形式为

$$\begin{cases} x(\theta)=R(\theta-\sin\theta)+C, \\ y(\theta)=R(1-\cos\theta). \end{cases}$$

三(1)求曲线族$\{y^2=2bx,b\in\mathbb{R}\}$满足的一阶微分方程；

解：对x求导得

$$b=yy',$$

代入方程得

$$2xy'=y^2.$$

(2) 求xy平面上与曲线族$\{y^2=2bx, b\in\mathbb{R}\}$正交的曲线。

解：设$y=\varphi(x)$为一条正交曲线，则由$y^2=2bx$的斜率$y'=\frac{b}{y}$

$$\varphi'(x)=-\frac{\varphi}{b},$$

又有

$$\varphi^2(x)=2bx,$$

因此

$$\varphi'(x)=-\frac{2x}{\varphi},$$

$$\frac{1}{2}\varphi^2(x)+x^2=C>0.$$

另解：由$y^2=2bx$可得

$$ydy=bdx,$$

因此该曲线族它满足方程

$$y^2=2xy\frac{dy}{dx},$$

即

$$y=2x\frac{dy}{dx}.$$

因此正交轨线满足

$$y=2x(-\frac{dx}{dy}).$$

即

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}.$$

$$x^2+\frac{1}{2}y^2=C>0.$$