中国科学技术大学2017-2018学年第一学期
(数学分析(B1)期末考试试卷参考解答)

一、(本题 10 分) 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 $n+1$ 个实数, $x_0 \in \mathbb{R}$, 求 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足

$$P_n^{(k)}(x_0) = a_k,\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

解 由 Taylor 展开, 有

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(x-x_0)^k.$$

二、 (本题 24 分, 每小题 6 分) 求积分和不定积分

(1) 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)dx \\ &= -\ln|\cos\frac{x}{2}| + \ln|\sin\frac{x}{2}| + C\end{aligned}$$

注: 若遗漏 C, 则扣 1 分.

(2) 计算 $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

解 令 $t = \sqrt[3]{x}$, $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$,

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int e^t 3t^2dt = 3t^2e^t - 6\int e^t t dt \\ &= 3t^2e^t - 6te^t + 6e^t + C \\ &= 3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + C\end{aligned}$$

注: 若遗漏 C, 则扣 1 分.

(3) 计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,dx$

解

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \left(\arctan x - \frac{\arctan x}{1+x^2}\right)\,dx \\
&= \int_0^1 \arctan x\,dx - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \\
&= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \frac{\pi^2}{32} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}
\end{aligned}$$

(4) 计算 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx.$

解 作变换 $x=-t$,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+e^{-t}}\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

三、(本题 14 分, 每小题 7 分) 求解下面的微分方程:

(1) 求 $y''' + y'' + y' + y = 0$ 实的通解.

解 特征方程为 $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$. 有特征根 $\lambda = -1, i, -i$.

(.......1分)

因此原方程有实函数解 $y_1(x) = e^{-x}$, 和一对复函数解 e^{ix}, e^{-ix}. (.......2分)

因而 $y_2(x) = \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ 和 $y_3(x) = \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ 是实函数解. (.......2分)

由于 $\{e^{-x}, \sin x, \cos x\}$ 线性无关, 故, 它是原方程的基本解组. 于是原方程的通解为

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x,$$

其中 C_1, C_2, C_3 是独立常数. (.......2分)

(2) 求 $\begin{cases} y' + 2xy = 4x, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解.

解 因为

$$(e^{x^2} y)' = e^{x^2}(y' + 2xy) = 4xe^{x^2} \qquad (.......2分)$$

所以

$$e^{x^2} y = \int 4xe^{x^2}\, dx = 2e^{x^2} + C. \qquad (.......3分)$$

由此

$$y(x) = 2 + Ce^{-x^2}.$$

因为 $y(0) = 0$, 所以 $C = -2$. 故, $y = 2 - 2e^{-x^2}$. (........2分)

四、 (本题 10 分) 设 $f(x)$ 是在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上非负单调递增的连续函数. 求证:

$$x\int_0^x f(t)\sin t\,dt \geqslant (1-\cos x)\int_0^x f(t)\,dt, \quad (0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}).$$

证明 设 $g(x)=\frac{1-\cos x}{x}$. 令

$$h(x)=\int_0^x f(t)\sin t\,dt - g(x)\int_0^x f(t)\,dt.$$

只需证明 $h(x)\geqslant 0$. (......2分)

显然 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上可导, 且

$$h'(x)=f(x)\sin x - g'(x)\int_0^x f(t)\,dt - g(x)f(x).$$

易知 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增可导, 且, $xg'(x)+g(x)=\sin x$. 由 f 的递增性, 有

$$g'(x)\int_0^x f(t)\,dt + g(x)f(x) \leqslant g'(x)xf(x)+g(x)f(x)=f(x)\sin x.$$

故, $h'(x)\geqslant 0$. 这说明 $h(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上递增. 因为 $h(0)=0$, 所以 $h(x)\geqslant 0$.

(.......8分)

五、 (本题 12 分) 设 $u_n(x)=(-1)^n xe^{-nx}$. 证明: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛; (2) 对于任何 $x\in[0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 收敛; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

注: (1) 5分, (2) 2分, (3) 5分

证明 (1) 因为 $\sum_{n=1}^{m}(-1)^n$ 一致有界 (2分), 对任意 $x\in[0,1]$, 数列 $\{xe^{-nx}\}$ 单调递减, 且 xe^{-nx} 的最大值是 $\frac{1}{n}e^{-1}$, 这说明函数列 $\{xe^{-nx}\}$ 在 $[0,1]$ 上一致趋于 0, 所以由一致收敛的 Dirichlet 判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛 (3分).

(2) $x=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 显然收敛, 当 $x\in(0,1]$ 时, $0<e^{-x}<1$, 故, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 也收敛.

(3) 计算可得

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{x}{e^x-1}, & x\in(0,1].\end{cases} \qquad (........2分)$$

因为 $|u_n(x)|$ 连续, 而 $S(x)$ 不连续, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. (...3分)

六、 (本题 10 分) 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=2$ 处的 Taylor 级数展开, 并指出收敛集合.

Taylor 展开部分给 4 分. 一种硬算, 求在 $x=2$ 处的高阶导数, 另一种方法如下: 令 $x=2+y$,

$$\ln(1+x)=\ln(3+y)=\ln 3+\ln(1+\frac{y}{3})=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{y}{3}\right)^n$$
$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(x-2)^n.$$

收敛半径为 3. (.....2分)

在右端点 $x=5$ 处收敛. (.....2分)

在左端点 $x=-1$ 处发散. (.....2分)

七、 (本题 10 分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导, $x_0\in(a,b)$. 定义函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in(a,b)\setminus x_0,\\ f'(x_0), & x=x_0.\end{cases}$$

设 $g(x)$ 在 x_0 可导, 且 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导. 求证: $g'(x)$ 在 x_0 连续.

证明 函数 $g(x)$ 在 $x\neq x_0$ 时可导, 且由

$$f(x)=f(x_0)+g(x)(x-x_0),\ (x\neq x_0)$$

可得
$$\begin{cases}f'(x)=g'(x)(x-x_0)+g(x),\ (x\neq x_0)\\ f'(x_0)=g(x_0).\end{cases}$$
(........3分)

依定义

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)(x-x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

由此及 g 在 x_0 可导, 可推出 $\lim_{x\to x_0}g'(x)$ 存在. (.......3分)

由中值定理,

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}g'(\xi)\quad(\xi\in(x_0,x))$$
$$=\lim_{x\to x_0}g'(x)$$

证毕. (......4分)

八、（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1)\geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx.$$

证明　设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_1)|$, $m=\min\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_0)|$. 则有

$$\int_0^1 |f''(x)|\,dx \geqslant \left|\int_{x_0}^{x_1} f''(x)\,dx\right| = |f'(x_1)-f'(x_0)| \geqslant M-m.$$

另一方面, 有 $\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant M\int_0^1 dx = M$. 故, 只需证明

$$m \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

(.........2分)

若 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中有零点, 则 $m=0$. 此时 (2) 显然成立. 现在假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点, 不妨设 $f'(x)>0$, 因而 $f(x)$ 严格递增. 下面分两种情形讨论.

情形 1. $f(0)\geqslant 0$. 此时 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in[0,1])$. 由 $f'(x)=|f'(x)|\geqslant m$, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(x)-f(0))\,dx + f(0)\\ &\geqslant \int_0^1 (f(x)-f(0))\,dx = \int_0^1 f'(\xi)x\,dx \geqslant \int_0^1 mx\,dx = \frac{1}{2}m\end{aligned}$$

故, (2) 成立. (.........4分)

情形 2. $f(0)<0$. 此时有 $f(1)\leqslant 0$, 根据 f 的递增性, 有 $f(x)\leqslant 0$ $(x\in[0,1])$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= -\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(1)-f(x))\,dx - f(1)\\ &\geqslant \int_0^1 |f(1)-f(x)|\,dx = \int_0^1 |f'(\xi)|(1-x)\,dx \geqslant \int_0^1 m(1-x)\,dx = \frac{1}{2}m.\end{aligned}$$

此时, (2) 也成立. (.........4分)