求方程近似解的方法举例

—举例数学专业的计算问题

21 少年班 1 班 胡文悦

简述

线性方程组的近似解求解往往比较复杂；由于一般性的一元多项式方程能否根式解等价于这个多项式对应的对称群是否为可解群。故由群论知识可知五次以上的高次代数方程没有通项公式，求解其近似解的方法有必要性；类似地，超越方程同样无法解出其精确根。

所以为解决实际问题，需要采用数值分析的方法，其研究目标是找出找出比较简洁、误差比较小、花费时间比较少的计算方法。求解方程常用迭代法，选择适当的迭代公式使值快速收敛，近似误差小。迭代的过程中，也需要计算机的广泛参与来快速的出符合需要的高精度近似值。

求解线性方程组的近似解

雅克比迭代是迭代法中比较早且较简单的一种。

设矩阵 Ax=b，A 非奇异且对角元不为零，可以写成$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$等形式，改写成$\begin{cases} x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-\dots-a_{1n}x_n) \\ \cdots\cdots \\ x_n=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x_2-\dots-a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases}$

选取初始向量$x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$，反复带入方程组右端可以得到

$$\begin{cases} x_1^{k+1}=\dfrac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^k-\dots-a_{1n}x_n^k) \\ \cdots\cdots \\ x_n=\dfrac{1}{a_{nn}}(b_{1n}-a_{n1}x_1^k-\dots-a_{n,n-1}x_{n-1}^k) \end{cases}$$

Gauss–Seidel 迭代可以应用于对角线上具有非零元素的任何矩阵，但只能在矩阵是对角线主导的或对称的和正定的情况下，保证收敛。其迭代结果如下所示。

$$x_i^{k+1}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\,x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\,x_j^k)$$

雅可比迭代收敛速度很慢的情况下，通常高斯-赛德尔方法也不会很快。超松弛迭代法就对上述方法进行了优化。

我们讨论 Gauss–Seidel 迭代在第 k+1 次迭代的x_i改变量r_i^k，在其之前加一个松弛因子 ω，可以得到$x_i^{k+1}=x_i^k+\frac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\,x_j^{k+1}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\,x_j^k)$，合并$x_i^k$就能得到$x_i^{k+1}=（1-\omega）x_i^k+\frac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\,x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\,x_j^k)$。该方法的速度则快很多，但是松弛因子的选取比较困难。

二分法、牛顿迭代法与割线法

二分法的本质是折半搜索空间。如果有函数 f（x），它在区间[a, b]上递增或者递减，并且 f（a）f（b）＜0，可以用二分法来求近似解。即获取 a 和 b 的中点 c。检验 f（c）的正负性，确定新的 a 和 b。重复上述过程，缩减区间的长度到足够小，就能找到一个足够近似的解。这个过程就是不断的二分迭代。

牛顿迭代法的本质是用切线逼近。我们要求 f（X）的根，找一个 Xn 点，在 f（Xn）处进行求导取得了切线。显然只要这个切线的斜率不为 0，则一定可以获得它和 x 轴的交点。将这个交点作为下一个取值 Xn+1 的点。重复上述过程进行迭代，很快就可以得到一个足够接近的解。

但是并非所有函数运用牛顿迭代法都能收敛，但如果能够收敛，其求近似的速率快于二分法。

当导数 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$不好计算时，可以采用割线法，即用割线代 $\dfrac{f(x_1)-f(x_0))}{x_1-x_0}$ 替切线，其迭代方程为 $p_n=p_{n-1}+\dfrac{f(p_{n-1})(p_{n-1}-p_{n-2})}{f(p_{n-1})-f(p_{n-2})}$

牛顿迭代法的优化

由于并非所有函数都能使用牛顿迭代法计算，故我们探索一种使每次迭代都渐近收敛的方法。

设一元 n 次方程f_n（x）即$x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^na_n=0$具有 n 个正实数根，求最大解的近似解。令$x_{n,0}=a_1$为零次近似解，$x_{n,1}=x_{n,0}(1-a_1)$为一次近似解，将其代入原方程，略去$a_1$二次及以上高次幂项，解得$a_1=a_1(x_{n,0})$，则一次近似解为
$x_{n,1}=x_{n,0}(1-a_1(x_{n,0}))$。由于余项未能一次消除完，需重复上述过程，将
$x_{n,i}=x_{n,i-1}(1-a_i)(i=2,3,\ldots K)$ 代入f_n（x）可以求得（m+1）次近似解。
设$x_{n,m+1}=x_{n,m}(1-a_{m+1})$，代入原方程消去$(a_{m+1})^2$及更高次项，得到
$(x_{n,m})^n(1-na_{m+1})-a_1(x_{n-m})^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}x_{n,m}(1-a_{m+1})+(-1)^na_n=0$

获得所需的近似解$x_{n,m+1}$

提取出f_n（x）最大解的因式后，重复上述操作，就能依次求出每一个解。

求解多元非线性方程组

在求解多元非线性方程组中，如果可以计算单变量情况下函数导数对应的雅可比矩阵，则可以使用牛顿法。

设初始向量x_0， $x_{k+1}=x_k-(dF(x_k))^{-1}F(x_k),k=0,1,2,\ldots$令 $x_{k+1}=x_k-s$ ，其中 s 是 $dF(x_k)s=F(x_k)$ 的解，在每步中使用高斯消去 $n^3/3$ 次的乘法步骤如下

$$\mathrm{d}F(x_k)s=-F(x_k)$$

$$x_{k+1}=x_k+s$$

如果没有雅可比矩阵，我们构造近似的雅可比矩阵，从而进行迭代，这就是 Broyden 方法。

设A_i是第$\boldsymbol{i}$步可以得到的雅可比矩阵的最优近似，并被用于生成 $x_{i+1} = x_i - A_i^{-1}F(x_i)$

由于

$$\mathrm{A}_{\mathrm{i+1}}\delta_{\mathrm{i+1}} = \Delta_{i+1}$$
$$\delta_{i+1} = x_{i+1} - x_i$$
$$\Delta_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

满足上述条件的矩阵为： $A_{i+1} = A_i + \frac{(\Delta_{i+1} - A_i\delta_{i+1})\delta_{i+1}^T}{\delta_{i+1}^T\delta_{i+1}}$

总结

篇幅有限，仅能列举部分内容，但我们已经能窥见计算在数学学科中的独特意义。即当数学理论无法解决某些问题时，可以用计算的方法无限逼近寻找实际生活需要的近似解。