Sam Edwards: ① spin glasses ② polymer (Edwards model)

③ kpz eq $\frac{\partial}{\partial t}\phi = P\nabla^2\phi + B(\nabla^2\phi)^2 + \xi$

经典 | 1975 SK. model 严格可解 model:

$H = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\,\sigma_i\sigma_j$ 问: $S(T=0)<0$

Replica sym breaking (RSB)

量子 Sachdev, Ye. 1993 PRL $\sum_{ij} J_{ij}\,\vec{S_i}\cdot\vec{S_j}$

$\chi \propto \frac{1}{T\ln^2(T)}$, $\chi \propto \ln(\omega)$

2015 kitaev, ~~KF~~ $H = -\sum_{ijkl} J_{ijkl}\,\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l$ $\gamma = C + C^+$, $\gamma = i(C - C^+)$

2016 PRD. Maldacena, Stanford Remarks on SYK model

⇓

strange metal	Blackhole
Hawking-entropy	gravity

关键知识: 1) Replica trick 2) RSB 3) 无序 ⇒ 中心|大数

$X = \frac{1}{N}(X_1 + \cdots + X_N) \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$

无序 ⇒ 平均 ⇒ 平均是什么的平均?

$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) = e^{-\beta F}$

1) $\overline{Z} = \int \mathrm{Tr}(e^{-\beta H})\,P(\xi)\,d\xi = \overline{e^{-\beta F}} \simeq e^{-\beta \overline{F}} \Rightarrow \overline{F} \Rightarrow$ | $C_V = \frac{\partial \overline{F}}{\partial T}$ | $S = \cdots$

2) $F = -\frac{1}{\beta}\ln Z$ $\ln Z = \lim_{n\to 0}\frac{Z^n - 1}{n}$

$\overline{F} = \frac{1}{\beta}\int \ln(Z)\,P(\xi)\,d\xi \Rightarrow -\frac{1}{\beta}\lim_{n\to 0}\int \frac{Z^n-1}{n}P(\xi)\,d\xi$ $(Z = \mathrm{Tr}(e^{\beta H}))$

$H = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ $\sigma_i = \pm 1$ $Z = \mathrm{Tr}\, e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j}$

$Z^n = \mathrm{Tr}\, e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij}\sum_{\alpha=1}^{n} J_{ij}\sigma_i^\alpha\sigma_j^\alpha}$

$Z = \int e^{-x^2}dx \Longleftrightarrow Z^n = \int e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n$

$\overline{F} = -\frac{1}{\beta}\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}(\overline{Z^n} - 1)$ $\overline{Z^n} = \int \mathrm{Tr}\left(e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij} J_{ij}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_i^\alpha\sigma_j^\alpha}\right)P(J_{ij})\,dJ_{ij}$

假设 $\int \mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}\int$ (相变点附近可能不对)

$= \mathrm{Tr}\left[\int e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_i^\alpha\sigma_j^\alpha\right)J_{ij}}P(J_{ij})\,dJ_{ij}\right]$

$= \mathrm{Tr}\left[\prod_{ij}\int e^{\frac{1}{2}\beta\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_i^\alpha\sigma_j^\alpha\right)J_{ij}}P(J_{ij})\,dJ_{ij}\right]$

Date. / /

$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{-\frac{x^2}{2J^2}}$ $\quad X_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha$

$\int P(J_{ij}) e^{\frac{1}{2}\beta X_{ij} J_{ij}} dJ_{ij} = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{-\frac{J_{ij}^2}{2J^2} + \frac{1}{2}\beta X_{ij} J_{ij}} dJ_{ij}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{-\frac{1}{2J^2}(J_{ij}^2 - \beta X_{ij} J^2 J_{ij})} dJ_{ij} = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{\left(-\frac{(J_{ij} - \frac{1}{2}\beta J^2 X_{ij})^2}{2J^2} + \frac{1}{2J^2}\frac{1}{4}\beta^2 J^2 X_{ij}^2\right)} = e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 X_{ij}^2} = e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 (\sum_\alpha \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha)^2}$

$\overline{Z^n} = Tr \prod_{ij} e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 (\sum_\alpha \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha)^2} = Tr\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{ij} (\sum_\alpha \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha)^2}$

$= Tr\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{ij} \sum_\alpha \sum_\beta \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \sigma_i^\beta \sigma_j^\beta} = Tr\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{\alpha\beta} (\sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta)(\sum_j \sigma_j^\alpha \sigma_j^\beta)}$

$= Tr\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{\alpha\beta} (\sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta)^2}$

典型特点：1) 只有 i 格点有关 2) $X \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

$H = -\frac{J}{2N} \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad Tr(e^{-\beta H}) = Tr\left[e^{\frac{1}{2}\frac{J\beta}{N}(\sum_i \sigma_i)^2 + \beta h (\sum_i \sigma_i)}\right]$

平均 $\sigma_i \longrightarrow \int P(m) e^{\frac{1}{2}\frac{J\beta}{N} m^2 + \beta h m} dm$ $\quad (m = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i,\ m \simeq N(0, N\sigma^2))$

$\int P(m) e^{\frac{1}{2}\frac{J\beta}{N} m^2} dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \int e^{-\frac{m^2}{2A} + \frac{1}{2}\frac{J\beta}{N} m^2} dm$

① $\int e^{-(\ )m^2} dm \longrightarrow$ finite

② $+ \longrightarrow \infty$

---

① $\ln Z = \frac{Z^n - 1}{n}$ ② $\int Tr(\ \ ) dJ_{ij} P(J) = Tr(\int P(J) \cdots dJ)$

③ $\sum_{ij} \sum_\alpha \longleftrightarrow \sum_\alpha (\sum_i \sum_j)$. Hilbert 空间 $\Rightarrow$ 简单