ϕ^4

SG / Bosonization

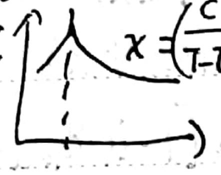
Disorder - related.

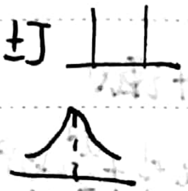
无序：Brown motion

1905 Einstein.

1957 Anderson localization   J. phys. F. 5. 965 (1975)

1975 Edward / Anderson ⇒ spin Glass.

CuMn Alloy  $\chi = \left(\frac{C}{T-T_0}\right)$ Curie-Weiss law.

$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ $P(J_{ij}) = \begin{cases} \pm J \\ \\ \end{cases}$ 

随机经典

无序多体模型，Repliatrick 复本

Sir Sam Edwards. 1928-2015.

① $\boxed{\text{spin glasses}}$
② polymer   Edwards model
③ KPZ model $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\phi = \rho\nabla^2\phi + \dots}$

经典

sherington, kirkpatriek. PRL, 1975 SK model

严格可解 model，$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$. 问题：$S(T=0) < 0$.

Parisi ⇒ Repliatrick sys breaking (RSB) 1979-1983

推广

sachdov, Ye, 1993, PRL, $\hat{H} = \sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}\vec{S}_i\vec{S}_j$

$\chi \propto \frac{1}{T\ln^2(T)}$, $\chi \propto \ln(\omega)$

完全随机项

2015, kitaev, KITP, $\hat{H} = -\sum_{ijkl} J_{ijkl}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l$

$\gamma = c + c^+$ or $\gamma = i(c - c^+)$

2016. PRD Maldacena, standford.

Remarks on Sachdov-Ye-kitaev model

$\Rightarrow$ 与 高温超导 strange metal

Blackhole

Hakwing entropy

gravity 有关.

关键知识：1) Repliatrick

2) RSB

3) 无序 $\Rightarrow$ 中心极限定理 / 大数 $\to$ $X=\frac{1}{N}(X_1+\cdots X_N) \sim N(\mu, \frac{6^2}{N})$

无序 $\Rightarrow$ 平均 $\Rightarrow$ 平均是什么的平均？

$Z=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})=e^{-\beta F}$

1) $\bar{Z}=\int \mathrm{Tr}(e^{-\beta H})\cdot P(\xi)d\xi=\overline{e^{-\beta F}} \neq e^{-\beta \bar{F}}$ 无序 $\begin{cases} C_V=\frac{\partial \bar{F}}{\partial T} \\ S= \end{cases}$

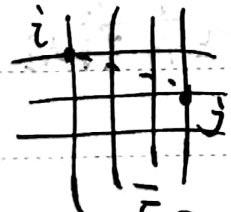
2) $F=-\frac{1}{\beta}\ln Z$ ， $\bar{F}=-\frac{1}{\beta}\int \ln(Z) P(\xi)d\xi$ ， $\bar{F}\Rightarrow \begin{cases} C_V \\ S \end{cases}$

P.de.Gennes. $\ln Z=\lim_{n\to 0}\frac{Z^n-1}{n}$ parisi

$+B(\nabla^2\phi)^2$ 则 $\bar{F}=-\frac{1}{\beta}\lim_{n\to 0}\int \frac{Z^n-1}{n}P(\xi)d\xi$. $(Z=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}))$.

① $\hat{H}=-\frac{1}{2}\sum_{ij}J_{ij}6_i6_j$ ， $6_i=\pm 1$. n份copy有相同无序J_{ij}

$Z=\mathrm{Tr}e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij}J_{ij}6_i6_j}$



$Z^n=\mathrm{Tr}e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij}\sum_{\alpha=1}^{n}J_{ij}6_i^\alpha 6_j^\alpha}$

eg: $Z=\int e^{-x^2}dx \Leftrightarrow Z^n=\int e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx_1\cdots dx_n$

$\bar{F}=-\frac{1}{\beta}\lim_{n\to 0}\frac{\overline{Z^n}-1}{n}$

$\overline{Z^n}=\mathrm{Tr}(e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij}J_{ij}\sum_{\alpha=1}^{n}6_i^\alpha 6_j^\alpha})P(J_{ij})dJ_{ij}$

假设 $\int\mathrm{Tr}=\mathrm{Tr}(\int)$ （是否可换，相变点附近可能不对）.

$$\overline{Z^n} = \mathrm{Tr}\left[\int e^{\frac{1}{2}\beta \sum_{ij}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha\right) J_{ij}} P(J_{ij})\, dJ_{ij}\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\prod_{ij} \int e^{\frac{1}{2}\beta\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha\right) J_{ij}} P(J_{ij})\, dJ_{ij}\right]$$

假设分布 $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{-\frac{x^2}{2J^2}}$

eg: $\int e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$ 令 $A = \frac{1}{2J^2}$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2J^2}} dx = \sqrt{2\pi J^2}$$

$$\int P(J_{ij}) e^{\frac{1}{2}\beta X_{ij} J_{ij}} dJ_{ij} \qquad X_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{-\frac{J_{ij}^2}{2J^2} + \frac{1}{2}\beta X_{ij} J_{ij}} dJ_{ij}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{-\frac{1}{2J^2}\left(J_{ij}^2 - \beta X_{ij} J^2 J_{ij}\right)} dJ_{ij}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} e^{\left[-\frac{(J_{ij} - \frac{1}{2}\beta J^2 X_{ij})^2}{2J^2} + \frac{1}{2J^2}\frac{1}{4}\beta^2 J^4 X_{ij}^2\right]} dJ_{ij}$$

$$= e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 X_{ij}^2}$$

$$= e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \left(\sum_\alpha \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha\right)^2}$$

则 $\overline{Z^n} = \mathrm{Tr} \prod_{ij} e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \left(\sum_\alpha \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha\right)^2}$

$$= \mathrm{Tr}\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{ij}\left(\sum_\alpha \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha\right)^2} \qquad \left(\sum_i X_i\right)^2 = \sum X_i X_j$$

$$= \mathrm{Tr}\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{ij}\sum_\alpha \sum_\beta \sigma_i^\alpha \boxed{\sigma_j^\alpha \sigma_j^\beta} \sigma_i^\beta}$$

$$= \mathrm{Tr}\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{\alpha\beta}\left(\sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta\right)\left(\sum_j \sigma_j^\alpha \sigma_j^\beta\right)}$$

$$= \mathrm{Tr}\, e^{\frac{1}{8}\beta^2 J^2 \sum_{\alpha\beta}\left(\sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta\right)^2}$$

典型特点 1) 只与i格点有关
2) $X = \frac{1}{N}\sum_{i}^{n} X_i$

② $\hat{H} = -\frac{J}{2N}\sum_{ij}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \sigma_i$

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) = \mathrm{Tr}\left[e^{\frac{1}{2}\frac{J\beta}{N}\left(\sum_i \sigma_i\right)^2 + \beta h\left(\sum_i \sigma_i\right)}\right]$$

2^N 平均 $\sigma_i \longrightarrow \int P(m) e^{\frac{1}{2}\frac{J\beta}{N}m^2 + \beta h m} dm$. —d积分

$m = \sum_i^N \sigma_i \qquad m \simeq N(0, N\sigma^2)$

平均值 方差

DATE

定义 $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{\alpha}\sigma_i^{\beta} = m^{\alpha\beta} \simeq N(\ ?\ ,\ ?\ )$

$\int p(m) e^{\frac{1}{2}\frac{J\beta}{N}m^2} dm$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \int e^{-\frac{m^2}{2A} + \frac{1}{2}\frac{J\beta}{N}m^2} dm.$ $\begin{cases} \int e^{-(\ )m^2} dm \to \text{finite} \\ \int e^{(\ )m^2} dm \to \infty \end{cases}$

*类似相变

n次变换：

① $\ln Z = \frac{Z^n - 1}{n}$

② $\int Tr(\ )\, dJ_{ij} P(J_{ij})$ $Tr(\int P(J_{ij})\, dJ_{ij}$

③ $\sum\sum \leftrightarrow \sum(\sum\sum)$ 大数定理 / 中心极限定理.

Hilbert 空间 ⇒ 简单.

问题：实用主义.

| SK model Quenched disorder
| Parisi Anealed disorder

无序 概率. 随机过程. ⇒ 核心：中心极限 / 大数定理.

Brown 运动 → Black-shoes eq → Anderson localization. 单体

相互作业 Edwards-Anderson, Shrington-kirkpatrick eq (sk).

Sachdov, Ye, kitaev 2015 ⇒ SYK model $\chi \propto (\frac{1}{T-\theta})$

Heisenberg model $\hat{H} = \sum_{ij} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ $\ln Z = \lim_{n\to 0}(\frac{Z^n - 1}{n})$

$H = \sum_{ijkl} J_{ijkl} \underbrace{r_i r_j r_k r_l}_{\text{strong matter}} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\langle J\rangle = 0 \\ \langle J_\alpha J_\beta\rangle \propto \delta_{\alpha\beta}(\frac{1}{N})\end{array}}$ $\sum\int = \int\sum$

Many body localization / Random matrix

KPZ eq (Nobel 2019) 随机微分方程