Bosenization (玻色化)

$$\begin{cases} \text{Fermi}-\text{Bosen duality} \\ \text{Haldane} + \text{Bosenization.} \end{cases}$$

H_F. Interaction. Thirring model.
↓ map / exactly;
H_B. Sine-Gordan model.

1. Jordan-Wigner 变换:

意义: Spin - Fermion 之间的关系;

Spin, Fermion 完全不同的统计关系;

玻色统计关系.

String (弦).

$$\begin{cases} c_i c_j = -c_j c_i \\ \sigma_i \sigma_j = +\sigma_j \sigma_i \end{cases}$$

$$\sigma_i^+ = \exp\left[i\pi \sum_{j=-\infty}^{i-1} c_j^+ c_j \right] c_i^+ = U c_i^+$$

$$\begin{cases} \Phi = \pi \int_{-\infty}^{x} \rho(x)\, dx \\ \sigma_i^+ \sigma_{i'}^+ = \sigma_{i'} \sigma_i \Rightarrow \psi_i \psi_j = e^{i\theta} \psi_j \psi_i \end{cases}$$

1d, XY model

XXZ model

2. 什么样的相互作用会打开 Gap？

1) 超导配对：

$$\int dx\, \psi^+(x)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^+(x)$$

令 $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ik_F\cdot x}\psi_R + e^{-ik_F\cdot x}\psi_L\right)$

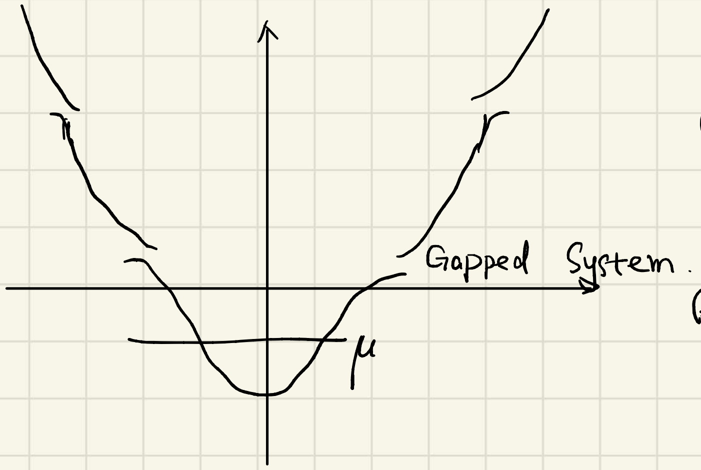
$$\Rightarrow \int dx\, \frac{1}{2}\left(e^{-ik_F\cdot x}\psi_R^+ + e^{ik_F\cdot x}\psi_L^+\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(e^{-ik_F\cdot x}\psi_R^+ + e^{+ik_F\cdot x}\psi_L^+\right)$$

$$= \frac{k_F}{2}\left(\psi_R^+\psi_L^+ - \psi_L^+\psi_R^+\right)$$

$$= k_F\,\psi_R^+\psi_L^+$$

2) 能带.

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - \mu + A\cos(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$



基本结果.

① 如果 μ 不在 Gap 中

无论如何调节 A，都是 Gapless.

②. Gap 中. $\pm k_F$ 散射导致 Gap.

$\psi_L^+\psi_R + h.c.$

$$\int dx\, A\cos x\, \psi^+\psi$$

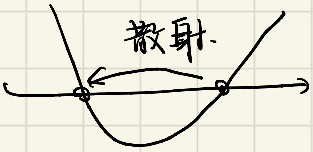
其中：$\int dx\, \underbrace{A\cos x}_{\text{fast}}\, \underbrace{\left[\psi_R^+\psi_R + \psi_L^+\psi_L\right]}_{\text{slow}} = 0.$

$$\int dx\, A\cos x\left[e^{-2ik_F\cdot x}\psi_R^+\psi_L + e^{2ik_F\cdot x}\psi_L^+\psi_R\right] \xrightarrow{\text{if}} = 0$$

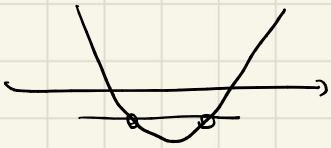
if $2k_F = 1 \Rightarrow \cos x\, e^{-ix} = \underbrace{\frac{1}{2} - \cos x - i\sin x}$

自己推一下哈～.

IF $2k_F = 1$. 打开 Gap.



IF $2k_F \neq 1$. Gapless.



③ 可能用外场激发某些散射.
导致相变.

☆ Gap 打开 $\Leftrightarrow$ 相变;

3. Interacting Boson model.

1) phonon 激发;

2) 前面传论区别: { 无 $\pm k_F$. / 有 Interaction.

| 提供材料: (BEC) $\Rightarrow$ 声子激发谱 (d=3) $\Rightarrow$ $\varphi = \underbrace{\varphi_0}_{\text{Condensate}} + \underbrace{\delta\varphi}_{\text{excitation}}$

| 今天: 1d. $\psi = e^{i\theta}\sqrt{n}$. density-phase 表象;

意义: | ① Interaction $\Rightarrow$ 改变声速. $\varepsilon = v|k|$;

| ② n和 θ 表象下处理. $\Rightarrow$ 流体描述;

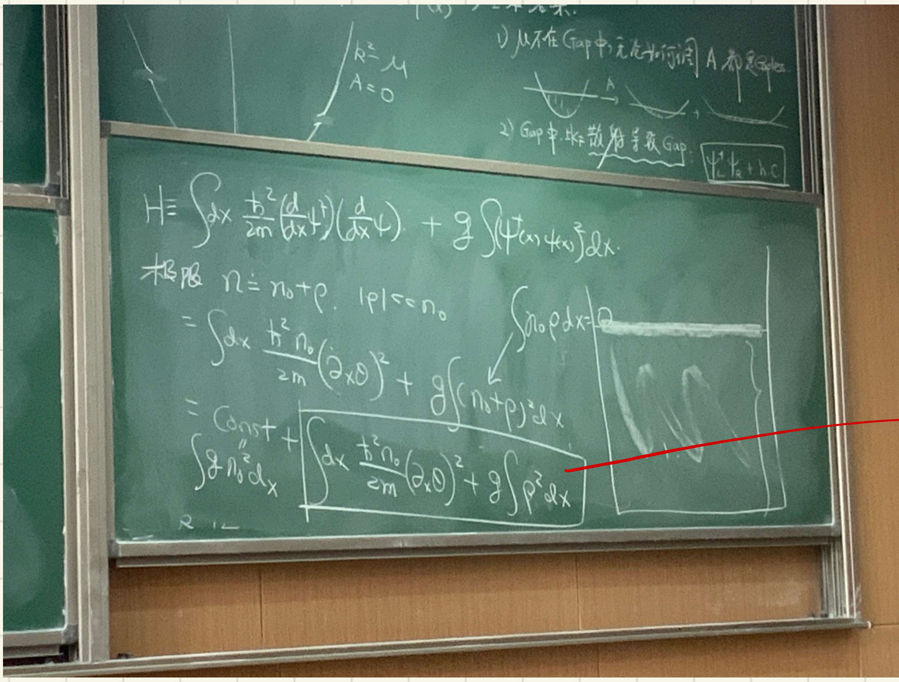
近似:
$n = n_0 + \rho$.

和以前的处理不同. (Textbook 中. n和 θ 是数);

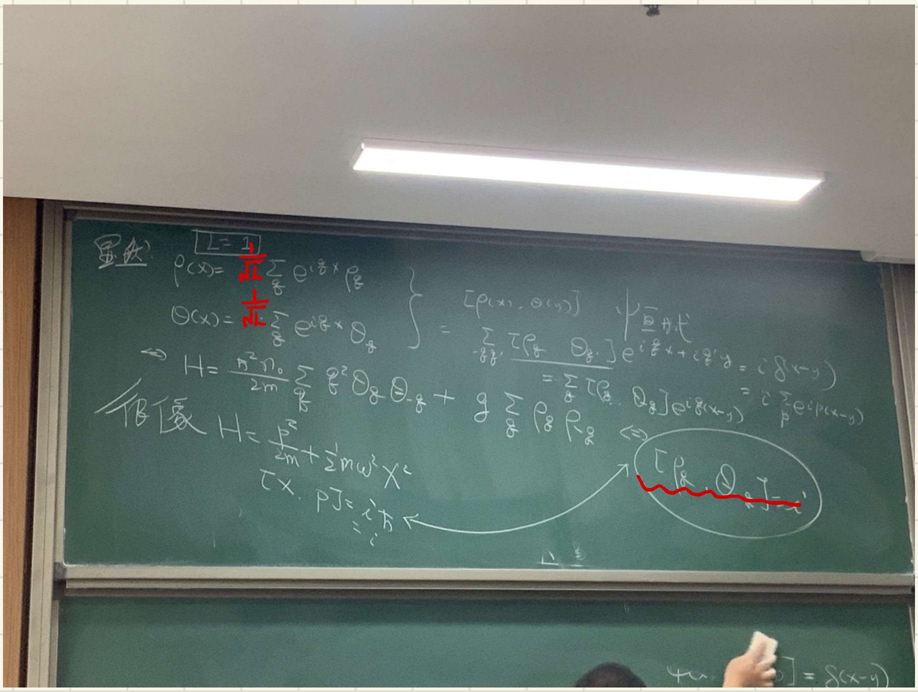
$\psi = e^{i\theta}\sqrt{n}$. ψ 为 Boson;

$[\psi(x), \psi^+(y)] = \delta(x-y)$.

$[n(x), \theta(y)] = i\delta(x-y)$. & $\psi = e^{i\theta}\sqrt{n}$ 构成一个完整的描述;



可以再有一项密度变化的修正项；



$[\rho_q, \rho_{q'}] = 0$

$[\theta_q, \theta_{q'}] = 0$

$[\rho_q, \theta_q^*] = i.$

$q^2 \theta_q \theta_{-q}$

$= (-q)^2 \theta_{-q} \theta_q$

坐标；　　动量；

$$H = \sum_{q>0} \frac{\hbar^2 n_0 q^2}{2m} \theta_q^* \theta_q + 2g \rho_q^* \rho_q$$

谐振子.

对角化 ⇒ $\omega_q = c|q|$ ；（c 即 v）

讨论：

g 不打开 gap.

但改变"声速" v