不用固定规范的微扰论

巴利希　　吴咏时
(中国科学院理论物理研究所
意大利弗罗斯卡蒂国立实验室)　(中国科学院理论物理研究所)

摘　　要

本文建议从趋向平衡的 Langevin 方程出发，建立量子场论的微扰展开．文中证明了这种表述可用于规范理论，无需固定规范就能正确算出规范不变的量．文中还给出了简单例子的计算细节，并讨论了 Langevin 方程的微扰解趋向平衡的速率．

一、引　　言

规范场理论的通常微扰论处理，需要引入规范固定项．在非 Abel 规范理论中，一般会导致 Faddeev-Popov 鬼[1]，并在非微扰的处理中造成 Gribov 不确定性[2]．但对格点规范理论，就不需要固定规范，而且由于规范群的紧致性，这里所有非规范不变的量其期望值都等于零[3]．

本文对连续统规范理论建立一种无需固定规范的新型微扰论．我们的量子化方案在非微扰的区域也能适用，且避免了 Gribov不确定性．此外，在计算的一切阶段上尽可能地尊重所论问题的对称性，也是它的一个优点．下面将会见到：若规范群的荷 e 不为零，则诸如带电场的传播子这样的量将是零．非规范不变的量作为 e 的函数，当 $e=0$ 时和 $e\neq 0$ 时的行为有很大的不同．这一不连续性，将在其微扰展开中反映为某种新型无穷大的出现．但是，规范不变量的微扰展开仍和通常的完全一样．

我们的处理是以非平衡态统计力学中的 Langevin 方程为基础[4]．它作为一种随机演化方程，与近来格点规范理论中进行计算机模拟的 Monte Carlo 程序[5]有密切的联系[1)]．在微扰论框架中，研究这些随机的构造性程序趋向平衡的速率，是很有意义的．本文中我们也将研究这个问题．

二、Langevin 方程

考虑一欧氏的标量场理论．通常我们总是要计算关联函数，例如 $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$，这里尖括号表示温度 $T(\beta=1/kT)$ 下的统计平均值：

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle=\frac{\int d[\phi]\phi(x)\phi(y)\exp\{-\beta V(\phi)\}}{\int d[\phi]\exp\{-\beta V(\phi)\}}. \tag{2.1}$$

本文 1980 年 6 月 30 日收到．

1) 某些情形下，Monte Carlo 程序可看做是时间离散化了的 Langevin 方程．

把这个问题推广一下，也许更方便．除欧氏空间坐标 x 外，再引进一"时间"变数 t，并认为场 ϕ 也是 t 的函数（若 x 对应四维欧氏空间，t 就是第五维）．设系统与温度为 T 的热库耦合，则长时间后它将达到平衡分布．如果知道场 $\phi(x, t)$ 的运动方程，就可以用它算出 $\phi(x,t)$ 的长时间行为，从而算出平衡分布和关联函数 (2.1)式．

这种最简单的演化方程，就是 Langevin 方程[4]：

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\delta V}{\delta\phi(x,t)} + \eta(x,t), \tag{2.2}$$

其中 $\eta(x, t)$ 是 Gauss 型随机变数：$\langle\eta(x,t)\rangle = 0$，

$$\langle\eta(x,t)\eta(y,t')\rangle = 2\beta^{-1}\delta(x-y)\delta(t-t')$$
$$= \frac{\int d[\eta]\eta(x,t)\eta(y,t')\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\int d^Dxdt\eta^2(x,t)\right\}}{\int d[\eta]\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\int d^Dxdt\eta^2(x,t)\right\}}, \tag{2.3}$$

$$\langle\eta(x_1,t_1)\eta(x_2,t_2)\eta(x_3,t_3)\eta(x_4,t_4)\rangle_{\text{连通部份}} = 0. \tag{2.4}$$

若给出 $t=0$ 时的初始条件（下面将假设 $\phi(x,0)=0$，$V(0)=0$），则方程(2.2)的解可用 η 唯一地表达，记为 $\phi^\eta(x,t)$．随机的关联函数定义为 $\langle\phi^\eta(x,t)\phi^\eta(x',t')\rangle$，这里尖括号表示对 η 的平均值（在不致混淆时，$\phi^\eta(x,t)$ 常简记为 $\phi(x,t)$）[1)]．如文献[4]所证，几率分布 $P(\phi,t)$ 满足 Fokker-Planck 方程（其中已令 $\beta=1$）：

$$\frac{d}{dt}P(\phi,t) = \frac{\delta^2 P}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left[P\frac{\delta V}{\delta\phi(x)}\right]$$
$$= -2\exp\left(-\frac{1}{2}V(\phi)\right)\hat{H}\left[P(\phi,t)\exp\left(\frac{1}{2}V(\phi)\right)\right], \tag{2.5}$$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)^2} + U(\phi), \quad U = \frac{1}{8}\left(\frac{\delta V}{\delta\phi}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\delta^2 V}{\delta\phi^2}. \tag{2.6}$$

统计力学中有个著名的定理[4]：等时的非平衡关联函数在长时间后趋于平衡的关联函数，即

$$\langle\phi(x,t)\phi(x',t)\rangle \xrightarrow{t\to\infty} \langle\phi(x)\phi(x')\rangle. \tag{2.7}$$

此定理可用多种方法证明．这里给出一种简单的证明，它适用于 ϕ 只定义在一点，即 ϕ 是数 q 而非函数的情形（一维量子力学）．这时有

$$\hat{H} = \frac{1}{2}p^2 + U(q). \tag{2.8}$$

若 $V(q)$ 在无穷远处增长足够快，则 $\hat{H}$ 有离散谱．用 $\phi_n(q)$ 和 λ_n 表示它的本征函数和本征值：

$$\hat{H}\phi_n(q) = \lambda_n\phi_n(q) \qquad (\lambda_{i+1} > \lambda_i), \tag{2.9}$$

则等时的关联函数 $\langle q(t)^K\rangle$（K 为正整数）可表为：

$$\langle q(t)^K\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\exp(-2\lambda_n t)\int dq q^K\phi_n(q)\phi_0(q). \tag{2.10}$$

易证 $\exp\left(-\frac{1}{2}V(q)\right)$ 是 $\hat{H}$ 的本征函数，相应的 $\lambda_0 = 0$；它就是 $\hat{H}$ 的基态，因为它没有零点．

1) 我们的记号不很严格，严格的记号需用 Ito 微分规则[4]．

故对大 t 有

$$\langle q(t)^K\rangle = \frac{\int dq q^K \exp(-V(q))}{\int dq \exp(-V(q))} + O(e^{-2\lambda_1 t}), \tag{2.11}$$

即长时间后达到平衡分布 $\exp(-V(q))$，对它的偏离指数式衰减． 注意，指数 λ_1 可写为一 Schrödinger 算子的本征值．因此 λ_1 必定是 V 的连续函数．

对一般的情形可做同样的论证．这时有

$$H = \int d^D x \left\{\frac{1}{2}\pi(x)^2 + U(\phi(x))\right\}, \quad [\pi(x), \phi(y)] = -i\delta(x-y), \tag{2.12}$$

而相应的 Schrödinger 泛函方程是:

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)^2} + U(\phi(x))\right\}\psi[\phi] = \lambda\psi[\phi], \tag{2.13}$$

它对应于 $\lambda_0 = 0$ 的解正是波泛函

$$\psi_0[\phi(x)] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^D x V(\phi(x))\right\}. \tag{2.14}$$

可见，量子场论的泛函积分表述可用抛物型的非线性随机方程所代替[1)]．用 Langevin 方程的这一表述对微扰的和非微扰的处理都能适用．

三、微 扰 论 图

以 ϕ^3 场论为例，说明 Langevin 方程的微扰图规则:

$$V(\phi) = \int d^D x \left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \frac{1}{3}g\phi^3(x)\right\}, \tag{3.1}$$

相应的 Langevin 方程是

$$\begin{cases}\dot\phi = \partial^2\phi - m^2\phi + g\phi^2 + \eta, \\ \langle\eta(x,t)\eta(x',t')\rangle = 2\delta(x-x')\delta(t-t').\end{cases} \tag{3.2}$$

先讨论 $g = 0$ 的情形．此时方程(3.2)的解是

$$\phi(x,t) = \int_0^t d\tau \int d^D y G(x-y, t-\tau)\eta(y,\tau), \tag{3.3}$$

$$G(x,t) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\exp\{-t(k^2+m^2) + ik\cdot x\}\theta(t), \tag{3.4}$$

这里 $G(x,t)$ 是推迟 Green 函数．它满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}G(x,t) = (\partial^2 - m^2)G(x,t) + \delta(x)\delta(t), \\ G(x,t) = 0 \qquad (\text{当 } t<0 \text{ 时}).\end{cases} \tag{3.5}$$

解(3.3)式容易算出关联函数

$$D(x-x';t,t') \equiv \langle\phi(x,t)\phi(x',t')\rangle = 2\int_0^\infty d\tau \int d^D y G(x-y, t-\tau)G(x'-y, t'-\tau). \tag{3.6}$$

---

1) 文[6]证明，也可用椭圆型非线性随机方程实现同样目的．

在动量空间中，我们有(设 $t' \leqslant t$)：

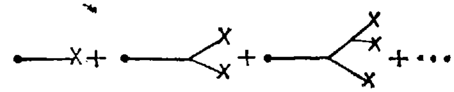
$$D(k;\, t,\, t') = \frac{1}{k^2 + m^2} \exp[-(k^2 + m^2)(t - t')]\{1 - \exp[-2(k^2 + m^2)t']\}. \tag{3.7}$$

当 $t = t' \to \infty$ 时，上式给出平衡的结果 $1/(k^2 + m^2)$.

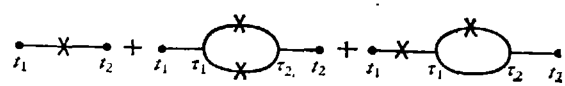
当 $g \neq 0$ 时，方程(3.2)可写为积分方程形式：

$$\phi(x, t) = \int_0^t d\tau \int d^D y G(x - y,\, t - \tau)[\eta(y,\, \tau) + g\phi(y,\, \tau)^2]. \tag{3.8}$$

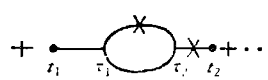
若用直线表示 G、用叉表示 η，用点表示 ϕ，且对每个三线顶角赋予因子 g，并对所有叉和顶角的时间与坐标积分，则(3.8)式的迭代解可图示为：

$\phi =$  (3.9)

在计算 $\langle\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle$ 时，对 η 平均将给出零结果，如果图中的叉不两两重合的话. 故到 g^2 阶有

$\langle\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle =$ 

(a)　　(b)　　(c)

 (3.10)

(d)

(这里未画蝌蚪图)在动量空间中，(3.10)式中(a)部分给出自由传播子(3.7)式，而(b)，(c)，(d)部分的贡献分别为：

$$\begin{aligned} b = g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 G(k;\, t_1 - \tau_1)G(k;\, t_2 - \tau_2) \\ \times D(k_1;\, \tau_1, \tau_2)D(k - k_1; \tau_1, \tau_2), \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} c + d = g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \{ [D(k;\, t_1,\, \tau_1)G(k_1;\, \tau_2 - \tau_1)G(k;\, t_2 - \tau_2) \\ + D(k; t_2,\, \tau_2)G(k_1;\, \tau_1 - \tau_2)G(k;\, t_1 - \tau_1)]D(k - k_1;\, \tau_1,\, \tau_2) \\ + \text{互换 } k_1 \rightleftarrows k - k_1 \text{ 得到的项}\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

简单的计算即可验证：对大的等时 $(t_1 = t_2 \to \infty)$，有

$$b = g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_1^2 + m^2)(k_2^2 + m^2)(k^2 + m^2)(k^2 + k_1^2 + k_2^2 + 3m^2)}, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} c + d = g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m^2)(k^2 + k_1^2 + k_2^2 + 3m^2)} \\ \times \left(\frac{1}{k_1^2 + m^2} + \frac{1}{k_2^2 + m^2} \right), \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$b + c + d = g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2(k_1^2 + m^2)(k_2^2 + m^2)}, \tag{3.15}$$

其中 $k_2 = k - k_1$. 这正是 Feynman 图规则给出的二阶结果.

这个例子显示出(2.7)式到 g^2 阶的正确性.(2.7)式在 ϕ^3 场论情形下到任意阶的正确性,除上节的一般考虑外,也可完全用图式来证明[7].

四、一个简单的例子

在本节我们将演示:在标准的微扰处理不能直接应用而必须修改的情形下,如何可以用 Langevin 方程来构造微扰展开式.以下列位势为例:

$$V(\boldsymbol{q}) = -\frac{1}{2}\mu^2\boldsymbol{q}^2 + \frac{1}{4}g(\boldsymbol{q}^2)^2, \tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{q}$ 为 n 维矢量,而 $\boldsymbol{q}^2 = \sum_{i=1}^{n}(q^i)^2$.

如果要在对 g 的微扰论中计算

$$\langle \boldsymbol{q}^2\rangle \propto \int d[\boldsymbol{q}]\boldsymbol{q}^2 \exp\{-V(\boldsymbol{q})\}, \tag{4.2}$$

我们首先要找出 $V(\boldsymbol{q})$ 的极小值.容易看出,极小值位于 $|\boldsymbol{q}|^2 = \mu^2/g$ 处.取极小值点为 $\boldsymbol{q} = (\sqrt{\mu^2/g}, 0, \cdots, 0) \equiv \boldsymbol{q}_0$.若令 $\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}_0$,并在(4.2)式中将指数展为 $\tilde{\boldsymbol{q}}$ 的幂级数,则将得发散积分.记

$$\boldsymbol{q} = (\sqrt{\mu^2/g} + \tilde{q}_L, \boldsymbol{q}_T) \qquad (\boldsymbol{q}_T \text{ 为 } (n-1) \text{ 维矢量}). \tag{4.3}$$

并将 $V(\boldsymbol{q})$ 的下列表达式代入(4.2)式中,

$$V(\boldsymbol{q}) = \mu^2\tilde{q}_L^2 + \sqrt{\mu^2 g}\,\tilde{q}_L(\tilde{q}_L^2 + \boldsymbol{q}_T^2) + \frac{g}{4}(\tilde{q}_L^2 + \boldsymbol{q}_T^2)^2 - \frac{\mu^4}{4g}. \tag{4.4}$$

由此可见,对 g 的零阶,(4.2)式中 $\boldsymbol{q}_T$ 的积分没有阻尼因子.假如在 $V(\boldsymbol{q})$ 中加一正常化项 $h\boldsymbol{q}_T^2$,并在计算的最后令 $h\to 0$,则在 g 的一阶就会得到不正确的结果.正确的做法是应当做非线性变换,换到变数 $r = (\boldsymbol{q}^2)^{1/2}$ 和 $(n-1)$ 维球的角坐标.于是可得

$$\langle \boldsymbol{q}^2\rangle = \frac{\int dr\,r^{n+1}\exp\left\{-\left(-\frac{1}{2}\mu^2r^2 + \frac{1}{4}gr^4\right)\right\}}{\int dr\,r^{n-1}\exp\left\{-\left(-\frac{1}{2}\mu^2r^2 + \frac{1}{4}gr^4\right)\right\}}. \tag{4.5}$$

我们来证明:从 Langevin 方程可以得到正确的结果,而无需做非线性变换.考虑 g 的一阶.(4.4)式相应的 Langevin 方程是:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_L = -2\mu^2\tilde{q}_L - \sqrt{\mu^2 g}(3\tilde{q}_L^2 + \boldsymbol{q}_T^2) + O(g) + \eta_L, \\ \dot{\boldsymbol{q}}_T = \boldsymbol{\eta}_T + O(g^{1/2}). \end{cases} \tag{4.6}$$

由此容易算出

$$\langle q_T^i(t) q_T^j(t')\rangle = 2\delta_{ij}\cdot \min(t, t'). \tag{4.7}$$

我们要计算 $\langle \boldsymbol{q}^2\rangle$.易知,到 g 的一阶必有

$$\langle \boldsymbol{q}^2\rangle = \mu^2/g + 2\sqrt{\mu^2/g}\langle\tilde{q}_L\rangle + \langle\tilde{q}_L^2\rangle + \langle\boldsymbol{q}_T^2\rangle = \mu^2/g + A(n-1) + B. \tag{4.8}$$

若 $n=1$,总是不难得到正确结果,故只需计算正比于 $(n-1)$ 的项.对于 $g^{1/2}$ 阶的 $\tilde{q}_L$,我们有

$$\tilde{q}_L(t) = $$  (4.9)

$$= \mu g^{1/2}\int_0^t dt'\langle \boldsymbol{q}_T^2(t')\rangle \exp[-2\mu^2(t-t')]$$

$$= -(n-1)\sqrt{g/\mu^2}(t-1/2\mu^2), \tag{4.10}$$

其中实线代表 $\tilde{q}_L$ 的推迟传播子，虚线代表 $\boldsymbol{q}_T$ 的传播子；上式中已略去 $t\to\infty$ 时为零的项. (4.8) 式中正比于 $(n-1)$ 的项,不难由 (4.7)、(4.9) 式算出为：

$$-2(n-1)(t-1/2\mu^2)+2(n-1)t=(n-1)/\mu^2. \tag{4.11}$$

可见,$\langle\tilde{q}_L\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{q}_T^2\rangle$ 中正比于 t 的项彼此抵销;剩下的有限项与用鞍点法从(4.5)式所得的结果一致.

当然也可把非线性变换用于 Langevin 方程. 设 $n=2$, 过渡到变数 $r(t)$ 和 $\theta(t)$, Langevin 方程化为[1]:

$$\begin{cases}\dot{r} = -\dfrac{d}{dr}[V(r)+\ln r]+\eta_r,\\ \dot{\theta}=\eta_\theta,\end{cases} \tag{4.12}$$

$$\langle\eta_r(t)\eta_r(t')\rangle = 2\delta(t-t'),\ \langle\eta_\theta(t)\eta_\theta(t')\rangle = \frac{2}{r^2}\delta(t-t'). \tag{4.13}$$

显然，r 的演化与 θ 的演化无关，$r(t)$ 对 g 的微扰展开在任何时刻都是均匀的. 这一事实是问题所具有的对称性的后果. 它意味着,对于对称不变的量,趋向平衡是很快的.

事实上,考虑 $\psi=\exp\left[\dfrac{1}{2}V(\boldsymbol{q})\right]P(\boldsymbol{q},t)$ 的 Fokker-Planck 方程. 不难看出,ψ 的"S 波分量"

$$\psi_S(r,t)=\int d\theta\psi(r,\theta,t). \tag{4.14}$$

满足如下的径向方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(r,t)=\hat{H}_S\psi_S(r,t). \tag{4.15}$$

正是 $\hat{H}_S$ 的本征值 λ_1 控制着球对称量趋向平衡的速率. 由于 λ_1 是耦合常数的连续可微函数，故可预期是对 g 和时间 t 均匀地趋向平衡的.

然而,我们根本不需要做这一非线性变换. 在任一时刻 t, Langevin 方程的解总是有限的(这里 t 起着正常化参数作用), 因而可直接从方程(4.6)出发自动导出正确结果. 当然, 如要在微扰论中计算 $\langle q_T^2\rangle=\langle r^2\sin^2\theta\rangle$,就会导致发散:

$$\langle q_T^2\rangle \simeq t+t^2g+\cdots, \tag{4.16}$$

这说明 $\langle q_T^2\rangle$ 仅当 $t\gg 1/g$ 才达到平衡值. 因此,在很快地趋向平衡的量(其 $\lambda_1\sim O(1)$)和很慢地趋于平衡的量(其 $\lambda_1\sim O(1/g)$)之间有重大差别;只有前一种量,即球对称的量才能在微扰论中正确地算出. 例如,我们可以得到

1) 做非线性变换时,如果不小心,就会漏掉 $\ln r$ 项.

$$\langle q\rangle \sim O(\exp(-ig)). \tag{4.17}$$

由上可见,本文的处理方式的一大优点是能在微扰论中(对球对称量)自动给出正确结果,而无需明显地虑及非线性变换.

五、规 范 理 论

进而考虑规范理论.设欧氏的 Hamilton 量为:

$$V=\int d^Dx\left\{(D_\mu\phi^+)(D_\mu\phi)+\frac{1}{2}\,TrF_{\mu\nu}^2\right\}, \tag{5.1}$$

$$A_\mu=A_\mu^a\tau_a,\ F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^a\tau_a,\ Tr(\tau_a\tau_b)=\frac{1}{2}\,\delta_{ab},$$

$$D_\mu\phi=(\partial_\mu-ieA_\mu)\phi,\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ie[A_\mu,A_\nu].$$

相应的 Langevin 方程为:

$$\begin{cases}\dot\phi=D^2\phi+\eta_\phi,\ \dot\phi^+=D^2\phi^++\eta_\phi^+,\\ \dot A_\mu=D_\nu F_{\nu\mu}+J_\mu+\eta_\mu.\end{cases} \tag{5.2}$$

这里 η_ϕ 和 η_ϕ^+, η_μ 都是 Gauss 型随机变数,满足

$$\begin{cases}\langle\eta_\phi(x,t)\eta_\phi^+(x',t')\rangle=2\delta(x-x')\delta(t-t'),\\ \langle\eta_\mu(x,t)\eta_\nu(x',t')\rangle=2\delta_{\mu\nu}\delta(x-x')\delta(t-t')C_2,\end{cases} \tag{5.3}$$

其中 $C_2=\delta^{ab}\tau_a\tau_b$ 正比于单位矩阵, J_μ 是场 ϕ 的流.

首先考虑自由的 Abel 规范场.这时满足

$$\begin{cases}\dot A_\mu=\partial^2A_\mu-\partial_\mu\partial_\nu A_\nu+\eta_\mu, & (5.4)\\ A_\mu(x,t)|_{t=0}=0 & (5.5)\end{cases}$$

的解 $(t>0)$,在动量空间中可写为:

$$A_\mu(k,t)=\int_0^t dt'G_{\mu\nu}(k,t-t')\eta_\nu(k,t'), \tag{5.6}$$

其中推迟 Green 函数(只对 $t>t'$ 有定义)为:

$$G_{\mu\nu}(k,t-t')=\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\exp[-k^2(t-t')]+\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{5.7}$$

故对 η 平均后的 $\langle A_\mu(x,t)A_\nu(x',t')\rangle$ 在动量空间中是

$$D_{\mu\nu}(k;t,t')=\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2}\{\exp[-k^2|t-t'|]-\exp[-k^2(t+t')]\}$$
$$+2\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\min(t,t'). \tag{5.8}$$

若用图示,(5.7)式是不带叉的(推迟)传播子,而(5.8)式则是带一个叉的传播子.对大的等时 $(t=t'\to\infty)$ 有:

$$D_{\mu\nu}(k;t,t)=\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2}+2t\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{5.9}$$

这正是通常 Landau 规范中的 Feynman 传播子,再加上一正比于 t 的发散的纵向部分.事实上,可令

$$A_\mu(x,t)=A_\mu^T(x,t)+\partial_\mu\alpha(x,t), \tag{5.10}$$

$$\partial_\mu A^L_\mu(x, t) = 0. \tag{5.11}$$

这里 $A^T_\mu(x, t)$ 是规范不变的，而 $\alpha(x, t)$ 看来像是规范变换．不难求出，在动量空间中有：

$$\langle A^T_\mu(k, t) A^T_\nu(-k, t)\rangle = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2},$$

$$\langle \alpha(k, t)\alpha(-k, t)\rangle = \frac{2}{k^2}t. \tag{5.12}$$

这意味着：规范不变的量的演化是很快地趋向平衡，而系统在规范参数空间中经历随机行走．

现在来考虑 Abel 规范理论中等时的 $\phi^+\phi$ 传播子．标量 QED 的微扰论图规则和第三节中的图规则很类似．除了由(3.4)，(3.7)，(5.7)和(5.8)式给出的 ϕ 和 A_μ 的（不带叉和带叉的）传播子外，只须添加关于 $A\phi^+\phi$ 和 $AA\phi^+\phi$ 顶角的规则，而这些顶角规则和通常的 Feynman 图规则一样．下面只计算到 e^2 阶，且只保留大 t 时不趋于零的项．与 $\phi^+\phi$ 传播子有关的图见图 1，其中直线代表 ϕ 场，波线代表光子．对大的等时 t，这些图的贡献分别是（已完成对顶角时间 t_1、t_2 的积分）：

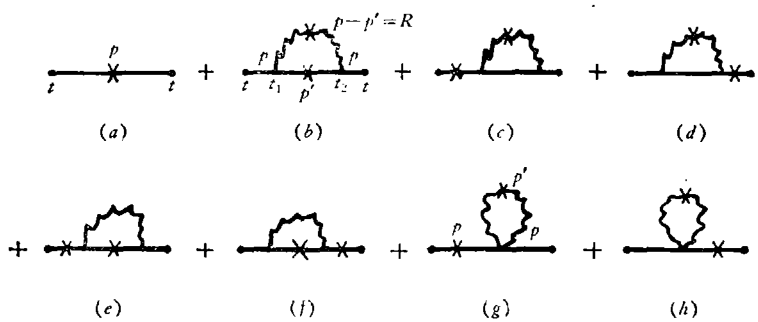


图 1

$$a = 2\int_0^t dt' \exp(-2p^2 t') = \frac{1}{p^2},$$

$$b = e^2\int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2 p'^2 k^2(p^2 + p'^2 + k^2)}\left[(p + p')^2 - \frac{(p^2 - p'^2)^2}{k^2}\right]$$
$$+ e^2\int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2 p'^2(p^2 + p'^2)}\left[2t - \frac{2}{p^2 + p'^2} - \frac{1}{p^2}\right]\frac{(p^2 - p'^2)^2}{k^2}, \tag{5.13}$$

$$c + e = d + f$$
$$= \frac{e^2}{2}\int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2(p^2 + p'^2 + k^2)}\left(\frac{1}{p'^2} + \frac{1}{k^2}\right)\left[(p + p')^2 - \frac{(p^2 - p'^2)^2}{k^2}\right]$$
$$+ \frac{e^2}{2}\int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2(p^2 + p'^2)}\left[\frac{1}{p'^2} + 2t - \frac{2}{p^2 + p'^2} - \frac{1}{p^2}\right]\frac{(p^2 - p'^2)^2}{k^2}, \tag{5.14}$$

$$g + h = -3e^2\int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^4 p'^2} - e^2\int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^4}\left[2t - \frac{1}{p^2}\right], \tag{5.15}$$

其中 $k = p - p'$．以上各式右边两个积分分别代表 A_μ 场横向和纵向部份的贡献．若对横向部份的所有贡献求和，则得 Landau 规范下的通常结果．

至于纵向部份的贡献，大 t 时正比于 t 的项，乃是把规范项 $t\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ 加到平衡的 $A_\mu A_\nu$ 传播

子上所导致的平衡 $\phi^+\phi$ 传播子的变化. 事实上,对图形的主要贡献,来自 $t-t_1$ 和 $t-t_2$ 都是 $O(1)$ 阶的积分区域, 所以对 t 的领头项可把 t_1, t_2 都换成 t. 这样做会丢掉当 $t\to\infty$ 时为 $O(1)$ 阶的项,但算出的 t 的领头阶次项是正确的. 上面的论证可推广到高阶图,当 e^2 固定且只考虑 t 的领头阶的情形. 利用有关 Green 函数在规范变换下的变化的标准定理[8], 我们便得到

$$\langle\phi^+(x,t)\phi(y,t)\rangle \overset{t\to\infty}{\frown\!\!\smile} \langle\phi^+(x)\phi(y)\rangle_f \exp[-e^2t\omega(x-y)], \tag{5.16}$$

其中 $\omega(x-y)\propto 1/|x-y|^{D-2}$ 是 $1/k^2$ 的 Fourier 变换, 而 $\langle\phi^+(x)\phi(y)\rangle_f$ 是自由传播子. 依(5.16)式,大 t 时带电场的传播子非常接近于零,不过仅当 $t\gg 1/e^2\omega(x-y)$ 时才是如此. 在 $t\to\infty$ 的渐近极限下,对 e^2 每一阶中 t 的领头项全体求和将趋于零. 但若只考虑微扰展开的有限项,结果便大不相同.

让我们考虑规范不变的量. 最简单的就是 $\phi^+(x,t)\phi(x,t)$. 正比于 t 的贡献显然应该等于零, 因为它对应于规范变换. 用维数正常化可从(5.13)—(5.15)诸式验证这一点. 至于剩下的有限项,进行一些代数运算,并消去对 $k=p-p'$ 为奇函数的项后, 可得 Landau 规范下熟知的结果,再加上

$$2\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{d^Dp'}{(2\pi)^D}\frac{p^2-p'^2}{p^2p'^2(p^2+p'^2)(p-p')^2}=0. \tag{5.17}$$

由此可见,在规范理论中(至少在此例中),从 Langevin 方程出发,并按耦合常数的幂次展开,对规范不变量可以得到正确结果, 而无需固定规范. 这里唯一破坏规范不变性的是初始条件 $A_\mu(x,t)|_{t=0}=0$, 但是皆知大 t 时的行为与初始条件无关.

在更高阶,情形会怎么样? 首先,所有的图积分, 都必须用(规范不变的)维数或格点正常化手续使之正常化. 原则上已知,对可重正理论, 动力学的关联函数只是在对 Langevin 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)=-\displaystyle\int d^DyM(x,y)\frac{\delta V}{\delta\phi(y)}+\eta(x,t),\\ \langle\eta(x,t)\eta(y,t')\rangle=2M(x,y)\delta(t-t')\end{cases} \tag{5.18}$$

中的(正定)矩阵 $M(x,y)$ 进行重正之后才是有限的. 这种做法是二阶相变理论中熟知的[4], 它不修改大 t 时静态的(等时)关联函数. 故可有两种做法:

1) 在 $M(x,y)$ 中加抵消项,使任意时刻结果皆有限;

2) 在令截断趋于无穷或者空间维数 D 趋于物理值之前,先取 $t\to\infty$ 的极限.

如果要明显地求出 Langevin 方程的收敛速率, 则第一种做法最合适; 如果只对平衡性质有兴趣,那么第二种做法最简单.

六、某些一般的考虑

本节中将论证,在非 Abel 规范理论中,我们的处理方式也会给出和 Faddeev-Popov 鬼的效应相应的结果. 有关 Langevin 方程的解趋向平衡的普遍定理可以用于我们的情形,因此毫无疑问,关联函数的大 t 行为是正确的. 主要问题是证明,规范不变的量是对于 g 和 t 均匀地趋向平衡的,从而对 g 的 Taylor 展开和取 $t\to\infty$ 的极限两者可自由交换(这对非规范不变量并不成立).

引入如下定义的诸量 $A^T_\mu(x,t)$, $\phi^T(x,t)$ 和 $\alpha(x,t)$:

$$\begin{cases}-ieA_\mu^T(x,t)=\exp[-ie\alpha(x,t)](\partial_\mu-ieA_\mu)\exp[ie\alpha(x,t)],\\ \phi^T(x,t)=\exp[-ie\alpha(x,t)]\phi(x,t),\\ \partial_\mu A_\mu^T(x,t)=0.\end{cases}\tag{6.1}$$

在对 e 的微扰论中，这些方程用 $A_\mu(x,t)$ 和 $\phi(x,t)$ 唯一地确定了 $\alpha(x,t)$，$A_\mu^T(x,t)$ 和 $\phi^T(x,t)$[1]. $A_\mu^T(x,t)$ 和 $\phi^T(x,t)$ 都是规范不变的量，即对 $A_\mu(x,t)$ 作规范变换并不改变它们. 所有的规范不变量都可用 A_μ^T，ϕ^T 表达.

Langevin 方程或相应的 Fokker-Planck 方程的规范不变性意味着，A_μ^T 和 ϕ^T 的演化与 $\alpha(x,t)$ 无关. 即

$$\begin{cases}\dot{A}_\mu^T(x,t)=F_1(A_\mu^T,\phi^T,\eta^T),\\ \dot{\phi}^T(x,t)=F_2(A_\mu^T,\phi^T,\eta^T).\end{cases}\tag{6.2}$$

我们对这些方程的具体形式没有兴趣. 由(6.2)式已可看出，趋向平衡是由作用在规范不变的 A_μ^T 和 ϕ^T 上的一算子 $\hat{H}$ 的最小正本征值 λ_1 控制的；因而非规范不变量缓慢地趋向平衡（例如 $\alpha(x,t)$ 的分布），对规范不变的量的演化没有影响. 所以，除可能的紫外或红外发散外[2]，有相互作用的理论中趋向平衡的速率大致与自由理论相同. 发散应由引进截断和抵销项来消除，使结果有限.

这些论证说明：在规范不变量的期望值中不会出现 t 的线性项，因而将自动得到与 Faddeev-Popov 鬼的贡献相应的正确结果. 当然，这里鬼的贡献，将以 $A_\mu(x,t)$ 的纵向传播子导致的诸项不完全抵销后的有限剩余项形式出现.

七、结　　论

本文建议的方法对实际的计算不很有用. 一方面，图的数目比通常的微扰论多得多，此外，所需的代数运算也更冗长. 在计算涉及带电粒子的 S 矩阵元时，由于平衡的带电场 Green 函数为零，LSZ 形式体系在此不能用. 原则上，一切物理可测量的知识，诸如截面等等，可以从规范不变量的 Green 函数中萃取出来，尽管实际上这样做非常复杂. 然而，重要的是可以断言，至少在原则上可以避免使用 Faddeev-Popov 技巧，因为后者在微扰论之外是否正确很成问题.

我们强调：场论的 Green 函数和 Langevin 方程的等时随机关联函数彼此相等，这可以成为量子场论重新表述的出发点. 本文证明了，至少这一重新表述可用来构造微扰展开；特别对于那些按通常的处理需做非线性变换的系统，我们新表述的微扰展开，能自动给出正确结果而无需非线性变换. 这一表述很可能还有更广泛的应用. 譬如用来作为计算机模拟的实际出发点时，Langevin 方程可视为场论的一种构造性的处理途径.

作者非常感谢郝柏林教授的多次讨论和建议. 作者之一巴利希非常感谢中国科学院理论物理研究所对他的热情款待.

1) 更确切些，仅对固定的 $A_\mu(x,t)$ 和充分小的 e，$\alpha(x,t)$ 才是唯一的.

2) 为使此论证更完全，应当首先考虑有限格点的情形，然后加上适当的边界条件或初始条件，使 $\hat{H}$ 的谱变成离散的，从而使得对平衡分布的偏离是指数式地减小的.

参 考 文 献

[1] 规范理论的评述可见，例如，Abers, E. & Lee, B. W., *Phys. Rep.*, **9c**(1973), 1; Itzykson, C. & Zuber, J. B., *Introduction to Quantum Field Theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1980.

[2] Gribov, V. N., *Nucl. Phys.*, **B139**(1978), 1.

[3] 格点规范理论的评述可见，例如，Drouffe, J. M. & Itzykson, C., *Phys. Rep.*, **38c**(1978), 133.

[4] 可见，例如，Graham, R., *Springer Tracts in Modern Physics*, **66**(1973), 1; Hohenberg, P. C. & Halperin, B., *Rev. Mod. Phys.*, **49**(1977), 435; Fox, R. F., *Phys. Rep.*, **48c**(1978), 181; 周光召、苏肇冰、郝柏林、于渌，物理学报，**29** (1980), 961, 969; *Phys. Rev.*, B, 1980 (即将发表).

[5] Creutz, M., Jacobs, L. & Rebbi, C., *Phys Rev. Lett.*, **42**(1979), 1390; Wilson, K., *Proceedings of Cargese Summer School*, 1979, Plenum Press (即将出版).

[6] Parisi, G. & Sourlas, N., *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 744.

[7] De Dominicis, C., *Lett. Nnovo Cimento*, **12**(1975), 567.

[8] Zumino, B., J. *Math. Phys.*, **1**(1960), 1.