物 理 学 报 *Acta Phys. Sin.* Vol. 69, No. 8 (2020) 080505

专题：统计物理和复杂系统

卡西米尔力*

苗兵†

(中国科学院大学材料科学与光电技术学院, 北京 100049)

(2020 年 3 月 26 日收到; 2020 年 4 月 9 日收到修改稿)

量子电动力学中的卡西米尔力是真空零点能的体现. 广义的卡西米尔力则依赖于涨落介质的类型广泛地出现于物理中, 包括量子, 临界, 戈德斯通模, 以及非平衡卡西米尔力. 长程关联的涨落介质和约束是产生卡西米尔力的两个条件. 本文通过回顾卡西米尔物理的发展, 讨论了不同类型的卡西米尔力, 几种正规化方法, 并对卡西米尔物理的进一步发展做了展望.

关键词: 卡西米尔力, 涨落, 长程关联, 正规化

PACS: 05.40.–a, 05.70.Jk, 11.10.–z **DOI:** 10.7498/aps.69.20200450

1 引 言

在一个具有长程关联的涨落介质中引入外加约束, 由于约束对于介质涨落模式的修改, 因而在介质之间产生一种有效的相互作用力, 即卡西米尔力 (Casimir force)[1]. 在物理中, 存在多种机制可产生长程关联的涨落介质. 例如, 在量子场论中, 规范对称性要求零质量波色子, 其传递的相互作用是长程的, 这样, 零质量波色子场是满足卡西米尔力产生要求的长程关联涨落介质, 典型的例子是量子电动力学中的电磁场 (光子场). 在统计物理中, 调整参数至连续相变的临界点时, 序参量的关联长度发散, 序参量临界涨落的关联函数是长程衰减的幂函数, 这样, 序参量场提供了产生卡西米尔力的长程关联涨落介质; 另一方面, 即使不在临界点, 对于具有连续对称的统计模型, 由戈德斯通定理 (Goldstone theorem) 可知, 破缺连续对称可以产生零质量的戈德斯通粒子, 因此戈德斯通场也提供了卡西米尔力产生的背景介质, 典型的例子如铁磁相变的 n-矢量模型、$\mathrm{H}_{\mathrm{e}}^4$ 超流相变、液晶、薄膜或界面、聚合物等. 在非平衡体系中, 动力学满足的流守恒可以在非平衡体系中产生长程关联, 从而可以产生卡西米尔力. 由此可见, 卡西米尔物理是一个涵盖广泛的研究题目[2].

本文从卡西米尔力最初在量子电动力学中的提出, 到广义的卡西米尔力, 对卡西米尔效应进行考察, 最后对卡西米尔物理在未来的发展进行展望.

2 量子场论

2.1 发 现

量子场论中的卡西米尔力最早是由荷兰物理学家 Hendrik Casimir 在 1948 年发现的[3]. 由于量子力学的不确定性原理, 真空非空, 而是充满了量子涨落. 量子涨落导致非零的真空能量, 物理上称为真空零点能 (zero point energy of vacuum). 卡西米尔力是真空零点能存在的一个直接结果[4].

Casimir 考虑在真空中引入两个平行的中性理想导电金属平板, 要求平板是无穷大和无穷薄的. 金属板的存在修改了真空中电磁场的涨落模式. Casimir 分别计算了自由真空的零点能和加板约束

* 国家自然科学基金 (批准号: 21774131, 21544007) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: bmiao@ucas.ac.cn

后真空的零点能, 发现两者都有紫外发散, 然而通过计算两者之差, Casimir 得到了一个随着板间距离变化的有限能量, 进一步计算该能量对板间距离的变化率, 则得到两板之间的一个吸引力, 即著名的卡西米尔力, 公式如下:

$$P=-\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4},\tag{1}$$

(1) 式是两板之间单位板面积的力, 即卡西米尔压力. 式中, a 是板间距离, $\hbar$ 和 c 分别是普朗克常数和光速. 由 (1) 式可以发现: (1) 式中不出现金属板的细节性质, 而是仅依赖于物理学基本常数 $\hbar$, c, 以及板间距离 a, 因此卡西米尔力具有普适性; 对于 $\hbar$ 和 c 的依赖说明卡西米尔力的产生是由于量子效应和相对论效应; 卡西米尔力是随板间距离以幂率 (–4) 衰减的长程力; 负号表明这里的卡西米尔力是吸引力.

由于卡西米尔力的普适性, 可以基于简单的量纲分析 (dimensional analysis) 迅速得出 (1) 式的幂率关系. 考虑两块平行的金属板 (Casimir 平板), 由于卡西米尔力 P 归因于量子效应和相对论效应, 因此 P 与 $\hbar c$ 成比例. 由量纲 $[\hbar c] = E{\cdot}L$, $[P] = E/L^3$; 本问题里唯一剩下的长度尺度是板间距离 a; 由量纲分析得出: $P\sim\hbar c/a^4$. 可是, 简单的量纲分析无法得出卡西米尔力普适常数的大小和符号, 确定普适常数需要做具体的计算. 在下文中我们将给出卡西米尔力基于真空零点能的计算.

2.2 与范德瓦耳斯力的关系

本节叙述卡西米尔力的研究背景, 讲述其如何起源于对分子间范德瓦耳斯力 (van der Waals force) 在长程或者 retarded 情形下的计算 [5], 以及卡西米尔力在后来的发展中远远超出了范德瓦耳斯力的范畴.

对胶体稳定性问题的研究启发了 Casimir 关于卡西米尔力的计算. 胶体体系的不稳定性是由分子间相互作用力驱动的. 理想气体的状态方程由于没有考虑分子间相互作用而不能描述气体的凝聚相变 (气-液相变). 荷兰物理学家 van der Waals 将理想气体方程修改为 van der Waals 方程, 可以描述相变. 在这个修正中, van der Waals 引入了气体分子的尺寸 (排除体积效应) 和气体分子间相互作用力 (范德瓦耳斯力). 对于中性的气体分子, 范德瓦耳斯力是一种短程的吸引力, 它将驱动气体状态的失稳而凝聚成液态. 两个中性 (可极化) 分子间范德瓦耳斯力的量子力学计算是由 London 完成的, 称为色散力 (dispersion force), 其原因是计算里需要考虑极化率 (polarizability).

London 的计算发现: 两个中性分子间的色散力表现为一个以 r^{-6} 衰减的吸引相互作用势, 其中 r 是分子间距. 粗略来理解, 指数为–6 是由于: 该力是分子的诱导偶极-诱导偶极相互作用, 由于量子涨落, 分子 1 产生诱导偶极, 诱导偶极产生的诱导电场 $E\sim1/r^3$, 分子 2 在电场 E 作用下产生诱导偶极 $p\sim\alpha E\sim1/r^3$, 这里 α 是分子的极化率, 相互作用能 $V\sim-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}\sim-1/r^6$.

Derjaguin-Landau-Verwey-Overbeek (DLVO) 将 London 的色散力引入了他们的胶体稳定性理论. 当胶体间由分子色散力带来的吸引大于由静电带来的排斥时, 胶体体系将失去稳定性而发生凝聚. 在胶体稳定性的研究中, Verwey 和 Overbeek 发现, 实验中分子之间的吸引力比 $1/r^6$ 衰减的更快, 实际上应该是 $1/r^7$. Verwey 和 Overbeek 因此评论说, 这是因为在 London 理论里, 没有考虑相对论效应, 而胶体的间距 (微米尺度) 相对于微观的分子尺度很大, 因此需要考虑相对论修正.

Casimir 接受了这个建议, 与 Polder 合作, 重新研究了 London 理论, 加入了相对论效应带来的所谓 retardation 效应, 推导出了分子间的 Casimir-Polder 相互作用, 是 r^{-7} 的色散吸引力. 之后, Casimir 认为 Casimir-Polder 分子间力的计算过于复杂, 他希望简化计算. 在与玻尔 (Bohr) 谈论时, 玻尔评论这个力应该与零点能有关. 受到启发后, Casimir 完成了两宏观平板之间卡西米尔力的计算, 通过计算真空零点能得到了著名的卡西米尔力公式 (1) 式.

卡西米尔力被提出的时候, 并没有引起很大的关注. 这可能是因为当时人们已经知道了两个中性分子之间的色散吸引力, 因此当中性分子变成两个宏观中性板时, 其间会产生长程吸引力似乎并不值得过于惊讶. 然而, 我们需要指出, 卡西米尔力为什么是吸引力, 至今仍然没有完全令人满意的解释. 在后来的发展中, 人们发现取决于涨落介质的类型, 边界条件, 约束的性质和几何, 卡西米尔力可以是排斥力. 实际上, 对于一个具体的体系, 在未做计算前, 人们不能判断卡西米尔力是吸引还是

排斥力. 因此, 在卡西米尔物理的发展中, 卡西米尔力虽起源于分子间范德瓦耳斯力的研究, 然而其发展已经远远超出了分子间力的研究范畴. 并且, 在讨论宏观或者介观物体之间的力时, 人们通常将卡西米尔力和范德瓦耳斯力进行区分: 范德瓦耳斯力是短距离, 近程的作用力, 依赖于作用物体的分子细节; 卡西米尔力是长程作用力, 长程特点将分子细节平均掉, 表现出普适性.

下面, 我们不做具体的量子力学计算, 而是利用标度讨论 (scaling argument) 得出两个中性分子之间的色散力, 包含 London 的不包含相对论效应的 non-retarded 情况和 Casimir-Polder 的考虑相对论修正的 retarded 情况[1].

考虑两个体积分别为 V_1 和 V_2 的中性分子, 其电子运动的特征频率是 ω_0. 基于标度分析, 间距为 r 的两分子间相互作用势能应采取如下形式:

$$V(r) \approx -\hbar\omega_0 \frac{V_1 V_2}{r^6} f\left(\frac{r}{c/\omega_0}\right), \tag{2}$$

其中, 负号是因为吸引力, r^{-6}是基于两个体积乘积的量纲, $\hbar\omega_0$是体系的特征能量, c/ω_0是体系的特征距离, $f(x)$是一个无量纲标度函数, 用于在 non-retarded 和 retarded 两种情形之间进行过渡.

I) 在短距离时, 即 $r < (c/\omega_0)$, 两分子之间的信号传递时间小于特征时间, 不需要考虑相对论效应, 取 $f(x) =$ 常数, 这样就得到 London 的结果: $V(r) \approx -\hbar\omega_0 \left(V_1V_2/r^6\right)$.

II) 在长距离时, 即 $r > (c/\omega_0)$, 两分子之间的信号传递时间大于特征时间, 需要考虑相对论效应. 此时相互作用势应不再依赖于表征特征时间的 ω_0, 为了抵消掉 ω_0, 取 $f(x) = 1/x$, 这样就得到 Casimir-Polder 的结果: $V(r) \approx -\hbar c \left(V_1V_2/r^7\right)$, 其中, 光速 c 的出现体现了相对论效应.

3 计 算

本节给出几个用零点能计算卡西米尔力的算例, 并且对其中处理发散的正规化方法 (regularization) 进行介绍.

3.1 一维空间标量场

首先考虑一个简单的情形: 一维空间的零质量标量场, 受限于两点之间, 取狄利克雷边界条件 (Dirichlet boundary condition) 引入约束, 点间距为 a.

由量子场论, 量子化的标量场可看作为一组振动的谐振子. 由量子力学, 基态或真空态下, 频率为 ω 的谐振子具有零点能 $\hbar\omega/2$. 标量场的零点能为所有频率谐振子的零点能之和. 受限情形下, 由边界条件知道, 允许的频率为: $\omega_n = ck_n$, 这里, $k_n = (n\pi)/a$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

计算标量场真空能量:

$$E_0(a) = \frac{\hbar c}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}, \tag{3}$$

显然, 该无穷级数求和发散. 为了处理发散, 需要对 (3) 式进行正规化. 有多种正规化的方法, 这里, 我们采取以下两种方法.

3.1.1 衰减函数法

引入衰减函数 $f(n,x) = \exp(-k_n/\Lambda)$, 这里, $x = \Lambda^{-1} > 0$. 函数满足: $f(n,0) = 1$; $f(n, x \neq 0) \to 0$, 当 $k_n \gg \Lambda$. 因此有:

$$\begin{aligned}
&E_0(a,x)\\
&= \frac{\hbar c}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\mathrm{e}^{-x(n\pi/a)} = -\frac{\hbar c}{2}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-x(n\pi/a)}\\
&= -\frac{\hbar c}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x\pi/a}}{1-\mathrm{e}^{-x\pi/a}}\right) = \frac{\hbar c\pi}{2a}\frac{\mathrm{e}^{x\pi/a}}{\left(\mathrm{e}^{x\pi/a}-1\right)^2}\\
&\approx \frac{\hbar c\pi}{2a}\left[\frac{1}{(x\pi/a)^2} - \frac{1}{12} + O\left(x^2\right)\right]\\
&= \frac{\hbar ca}{2\pi x^2} - \frac{\pi\hbar c}{24a} + O\left(x^2\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

对于 $x \neq 0$, (4) 式给出正规化的有限大小真空能量. 在正规化方法里, 令 $x \to 0$, 显然首项发散, 第二项是有限项, 而高阶 $O(x^2) \to 0$.

如何处理发散的首项呢? 需要减去标量场的自由真空能, 这是重整化操作 (renormalization). 下面计算自由真空能.

在自由情形下, 标量场有连续的涨落谱: $w(k) = \sqrt{c^2k^2} = c|k|$. 真空能为

$$E_0^{\mathrm{F}} = \frac{\hbar cL}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}|k| = \frac{\hbar cL}{2\pi}\int_0^{\infty}k\mathrm{d}k. \tag{5}$$

显然积分发散, 现引入衰减函数 $f(k,x) = \exp(-xk)$做正规化, 这里 $x > 0$. 有

$$E_0^{\mathrm{F}}(x) = \frac{\hbar cL}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k k\mathrm{e}^{-xk} = \frac{\hbar cL}{2\pi x^2}\Gamma(2) = \frac{\hbar cL}{2\pi x^2}, \tag{6}$$

其中, $\Gamma(x)$ 是伽马函数. 因此, 在有限区间内的自由真空能为

$$E_0^{\mathrm{F}}(a,x)=\frac{E_0^{\mathrm{F}}(x)\,a}{L}=\frac{\hbar ca}{2\pi x^2}, \tag{7}$$

可发现, 该结果正等于受限真空能 (4) 式的首项发散项. 现在计算正规化卡西米尔能量:

$$E_{\mathrm{c}}(x,a)=E_0(a,x)-E_0^{\mathrm{F}}(a,x)=-\frac{\pi\hbar c}{24a}+O\left(x^2\right), \tag{8}$$

取极限 $x\to0$, 得到卡西米尔能量:

$$E_{\mathrm{c}}(a)=-\frac{\pi\hbar c}{24a}, \tag{9}$$

计算卡西米尔力:

$$F=-\frac{\partial E_{\mathrm{c}}(a)}{\partial a}=-\frac{\pi\hbar c}{24a^2}, \tag{10}$$

这是一个长程吸引力. 由该结果可以看出:

1) 结果仅依赖于基本常数 $\hbar$ 和 c, 以及约束间距 a, 与微观细节无关, 因此卡西米尔力具有普适性;

2) 由于普适性, 标度关系 a^{-2} 可由量纲分析直接得到, 因为 $[\hbar c]=E\cdot L$, $[F]=E/L$, a 是本问题的唯一长度尺度, 故有 $F\approx\hbar c/a^2$;

3) 常数项的大小和符号, 需要具体计算, 这里的结果是常数项为负, 故为吸引力, 我们指出, 依赖于场的类型、边界条件、空间维度等, 卡西米尔力可为排斥或吸引, 需要进行具体的计算.

3.1.2 zeta 函数正规化

做正规化:

$$\begin{aligned}E_0(a,s)&=\frac{\hbar c}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{1-2s}\\&=\frac{\hbar c}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1-2s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-2s}\\&=\frac{\hbar c}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1-2s}\zeta(2s-1),\end{aligned} \tag{11}$$

(11) 式中使用了黎曼 zeta 函数的级数定义: $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$. 我们知道, 级数定义只是在 $\mathrm{Re}(z)>1$ 收敛, 即 (11) 式正规化能量的收敛要求是 $\mathrm{Re}(s)>1$. 然而, 黎曼 zeta 函数可以解析延拓至复平面, 是一个只在 $z=1$ 有简单极点的亚纯函数 (meromorphic function).

在正规化方法中取 $s\to0$. 利用解析延拓后黎曼 zeta 函数的性质有 $\zeta(-1)=-1/12$, 得到 $E_0(a)=\lim\limits_{s\to0}E_0(a,s)=-(\pi\hbar c)/(24a)$, 同 (9) 式通过衰减函数正规化方法得到的结果一致. 可以说, zeta 函数 (不限于黎曼 zeta 函数) 正规化是一种最优雅的正规化方法[6].

3.2 三维空间电磁场

本节研究 Casimir 对于真空中受限电磁场的计算. 不同于 Casimir 采用的 Euler-Maclaurin 方法, 我们用 zeta 函数正规化方法迅速得到结果.

在量子场论中, 电磁场表现为一组谐振子自由度, 真空中充满了这些涨落模式. 在真空中放入两个 Casimir 平板, 板面积为 A, 板间距为 a. 板的存在将涨落模式修改为: $\omega_{\boldsymbol{k}_\perp,n}=c\sqrt{\boldsymbol{k}_\perp^2+(n\pi/a)^2}$, 其中, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 注意, 不同于标量场的情况, 这里 n 需要同时取正负整数, 这是为了考虑电磁场涨落 (光子) 的两个极化自由度, 同时, 模式 $(\boldsymbol{k}_\perp,0)$ 可以被激发, 即允许 $n=0$.

计算受限的真空能:

$$\begin{aligned}E_0(a)&=\frac{A\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_{\boldsymbol{k}_\perp,n}\\&=\frac{A\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{\boldsymbol{k}_\perp,n}+\omega_{k_\perp,0}\right].\end{aligned} \tag{12}$$

舍去与板间距 a 无关的项, 得到 Casimir 能量:

$$\begin{aligned}E_0^{\mathrm{C}}(a)&=2\times\frac{A\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{\boldsymbol{k}_\perp,n}\\&=2\times\frac{A\hbar c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\boldsymbol{k}_\perp^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2},\end{aligned} \tag{13}$$

显然, (13) 式发散. 现在引入正规化因子 s, 推导正规化的 Casimir 能量如下:

$$\begin{aligned}&E_0^{\mathrm{C}}(a,s)\\&=A\hbar c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\boldsymbol{k}_\perp^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{(1-2s)/2}\\&=\frac{A\hbar c}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{3-2s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{3-2s}\int_0^{\infty}x\mathrm{d}x\left[x^2+1\right]^{(1-2s)/2}\\&=\frac{A\hbar c}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{3-2s}\zeta(2s-3)\frac{1}{2s-3},\end{aligned} \tag{14}$$

在 (14) 式的推导中, 应用了黎曼 zeta 函数的级数定义, 由级数定义的收敛性要求 $\mathrm{Re}(s)>2$. 并且在求无穷积分时假定了 $\mathrm{Re}(s)>3/2$.

现在在正规化能量 (14) 式中取极限 $s\to0$, 利用黎曼 zeta 函数的解析延拓, 可得 $\zeta(-3)=1/120$.

代入 (14) 式, 得到单位面积的 Casimir 能量:

$$\frac{E_0^C(a)}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720a^3}, \tag{15}$$

则 Casimir 力为

$$P(a) = -\frac{1}{A}\frac{\partial E_0^C(a)}{\partial a} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}, \tag{16}$$

即 (1) 式. 这样就利用真空零点能推导出卡西米尔力, 得到普适常数的数值.

4 临界卡西米尔力

在连续相变的临界点, 序参量涨落的关联长度发散, 因此序参量场具有长程关联, 引入外加约束可以产生临界卡西米尔力. 1978 年, Fisher 和 de Gennes 考虑在两元混合液体中引入两个 Casimir 平板, 即两个平行的宏观平板, 调整参数至混合液体相分离的临界点, 此时序参量 (液体浓度) 具有长程关联的临界涨落, 关联长度 $\xi \to \infty$. 由于两板存在, 涨落谱被修改, Fisher 和 de Gennes[7]认为两板间产生临界卡西米尔力.

临界卡西米尔力具有普适性, 我们再次用量纲分析研究该问题. 由于温度的存在, 取代能量, 需要研究体系的自由能 $F(a)$. 自由能是一个广延量, 因此与板面积 A 成比例. 序参量涨落是热涨落, 因此特征能量是热能 $k_{\rm B}T$. 由于关联长度在临界点发散, 问题里只剩一个长度尺度, 即板间距 a. 由量纲分析, 立即可以写出:

$$F(a) = Ck_{\rm B}T\frac{A}{a^2}, \tag{17}$$

其中 C 是普适常数.

上述论证还可以按照统计物理中的 Blob 方法估算得出: 本问题的序参量涨落是热涨落, 因此可定义热 Blob, 其能量为特征能量 $k_{\rm B}T$; 由于关联长度发散, 所以体系有唯一的特征尺寸 a, 故热 Blob 的体积是 a^3; 体系的 Blob 数目为 $g = (Aa)/a^3 = A/a^2$; 体系的自由能为 $F \approx gk_{\rm B}T = k_{\rm B}TA/a^2$.

和量子场论的情况一样, 普适常数 C 的数值需要通过具体的计算得出. 一般来说, 临界卡西米尔力普适常数的计算比第 3 节中量子电动力学卡西米尔力的计算要复杂, 这是因为电磁理论是一个线性理论, 而这里的相变问题则是一个非线性的场论. 计算过程需要使用临界现象理论里发展出的 $d = 4 - \varepsilon$ 展开等技术. 在两维体系, 由于体系在临界点不仅具有标度不变性, 并且进而有共形不变性, 因此可以用共形场论的方法计算普适常数. 另外我们指出, 依赖于两板上施加的边界条件类型, 临界卡西米尔力可以是吸引或排斥力, 即普适常数 C 可正可负[8].

5 戈德斯通模

由戈德斯通定理可知, 体系在破缺连续对称性时, 将产生戈德斯通粒子 (Goldstone particle) 或戈德斯通模 (Goldstone mode), 这是一种零质量的模式, 因此是长程关联的. 扰动戈德斯通模也会产生卡西米尔力.

统计力学里, 戈德斯通模通常采用具有 $O(n)$ 对称的 n-矢量模型进行展示. 体系的序参量: $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$. 体系的哈密尔顿量对于序参量具有连续的旋转对称性. 经历相变后, 体系发生自发对称破缺, 即序参量破缺哈密尔顿量的连续旋转对称, 在 n-矢量空间中自发选出一个方向排列, 体系进入有序态. 序参量的涨落模被分成 1 个平行于有序方向的纵向模式 (软模) 和 $(n-1)$ 个垂直于有序方向的横向模式 (戈德斯通模). 由于戈德斯通模不需要耗能, 因此是长程关联的涨落. 需要指出, 纵向的软模导致了体系的有序, 其只在临界点质量为零, 软模涨落导致的正是前面讨论的临界卡西米尔力. 然而, 不限于临界点, 零质量的戈德斯通模存在于整个临界点以下.

下面以几个软物质物理中的例子来说明戈德斯通模诱导产生的卡西米尔力. 1) 液晶. 液晶体系通常由棒状分子组成, 这一分子特点在统计问题中引入了取向自由度, 即可以研究体系的连续旋转对称性. 如上所述, 这就为问题提供了戈德斯通模, 进而戈德斯通模可以诱导产生卡西米尔力. 2) 薄膜或界面. 由于薄膜或界面平面具有连续平移对称性, 因此破缺该对称性会导致戈德斯通模, 这里就是声子 (phonon), 声子导致薄膜或界面的毛细涨落 (capillary fluctuations). 在薄膜或界面上引入外界约束物, 将修改体系的涨落谱, 因而可以诱导产生卡西米尔力. 3) 聚合物. 聚合物统计力学里的一个重要结果是 de Gennes 认识到聚合物的排除体积问题 (对应于自回避无规行走) 可以用自旋 n-矢量模型的 $n \to 0$ 极限描述[9]. 如上所述, n-矢量模型有 $(n-1)$ 个戈德斯通模, 若考虑在聚合物熔体

中引入两个 Casimir 平板, 计算戈德斯通模诱导的卡西米尔力:

$$P(a) = -\frac{(n-1)\,\partial F(a)}{A\partial a} \xrightarrow{n\to 0} -\left(-\frac{\partial F(a)}{A\partial a}\right), \tag{18}$$

因此, 聚合物涨落背景诱导的卡西米尔力与一般的卡西米尔力反号, 如果一般的卡西米尔力是吸引力, 则聚合物诱导卡西米尔力是排斥力[10,11].

6 实验验证

自量子电动力学的卡西米尔力在 1948 年提出后, 引发了一系列的实验工作来验证卡西米尔力. 先计算一下卡西米尔力的大小, 由 (1) 式可写出: $P\approx -1.3\times10^{-5}$ atm$\times(1\ \mu\text{m}/a)^4$ (1 atm=101.325 kPa). 因此, 当板间距 a=1 μm 时, 卡西米尔力大约为 1.3 mPa, 这已经是一个宏观的数值了. 减小板间距离至微米以下, 卡西米尔力以 a^{-4} 方式增大.

经过这个估算, 实验上应该在微米尺度测量卡西米尔力. 早期有一些定性的探测卡西米尔力的实验工作[12]和一些高精度的实验验证[13,14]. 此后, 由于卡西米尔力在微米尺度是不能忽视的作用力, 因此出现了应用卡西米尔力的工作, 主要是在微米尺度的一些金属机器的制造上, 称为微米电力系统 (microelectromechanical systems, MEMS)[15–17], 这些微米尺度机器的应用研究导致的两个重要的问题是: 1) 由于卡西米尔力是吸引力, 器件将被粘附在一起而无法正常工作, 那么, 如何实现卡西米尔排斥力; 2) 由于器件有不同的形状, 那么, 如何计算超越 Casimir 平板的不同形状器件之间的力.

临界卡西米尔力的重要验证实验包括研究液氦薄膜在经历超流相变时膜厚的变薄过程[18]和研究在两元混合液体临界点附近胶体与表面的相互作用[19]. 超流实验有意思的地方在于临界卡西米尔力和戈德斯通卡西米尔力将一起影响膜厚. 在超流相变临界点 (T_λ) 附近, 序参量涨落变成零质量的临界涨落, 该涨落在液氦薄膜的两个表面 (固体铜片表面和液气界面) 之间诱导临界卡西米尔吸引力, 导致膜厚降低. 在临界点 T_λ 以下, 临界涨落消失, 膜厚回升. 可是实验发现, 膜厚没有回到临界点以上的数值, 而是相对偏小, 原因有两个: 1) 超流相变的序参量 (位相角) 涨落导致戈德斯通模, 戈德斯通模诱导的卡西米尔吸引力使 T_λ 以下膜厚较临界点以上偏小; 2) 薄膜的下表面是氦的液气界面, 在超流态, 黏度为零, 界面涨落的戈德斯通模 (毛细涨落) 诱导产生两表面间的卡西米尔吸引力, 进一步减小膜厚. 两种因素的联合作用解释了实验的观察结果[1].

7 一些发展

在卡西米尔力的处理中, 有一些重要的假定. 1) 将外加约束与涨落介质的相互作用以施加的边界条件处理. 这种处理是基于体系中时间尺度的分离, 即外界约束运动的特征时间远远大于介质涨落的特征时间. 该处理本质上是在一个介质和约束的体系中, 将约束的运动作为慢变量而固定, 得到一个关于涨落介质的有效模型, 而约束慢变量则影响介质的涨落谱. 显然, 这种处理中, 只有约束对于介质的作用, 而没有介质对于约束的反作用. 2) 在 Casimir 平板的边界条件中, 平板无穷薄, 因此没有考虑介质的穿透效应.

在卡西米尔力理论的发展中, 针对不同的假定有后续的发展. Lifshitz[20] 和 Woods 等[21] 发展了 Lifshitz 理论, 该理论将卡西米尔力推广到实际材料体系, 利用涨落耗散定理推导了麦克斯韦能动量张量, 从而得出不同温度下两个平行的介电材料之间的相互作用力. Schwinger[22] 利用自己的量子场论 non operator 版本, 即源理论 (source theory), 重新推导了卡西米尔力, 在该推导中没有出现真空的零点能. 随着理论物理的发展, 人们认识到产生卡西米尔力的约束, 可以是来自外加边界条件, 也可以是在温度场论中通过松原理论 (Matsubara formulation) 将温度引入场论时带来的周期性条件约束. 在宇宙学中, 还可以是在处理非欧空间 (non Euclidean) 时由无边界空间的拓扑性质 (topology) 引入的“Identification”约束等. 另一方面, 在长程关联涨落介质的寻找上, 人们发现在非平衡统计体系里, 动力学守恒率可以使非平衡体系产生幂率衰减的长程关联行为, 这使得非平衡体系, 包括颗粒体系、活性物质等, 成为另一个研究卡西米尔力的重要情形[23], 需要指出, 与平衡体系相比, 非平衡体系的卡西米尔力不具有普适性. 这些进展都是卡西米尔物理发展的精彩篇章.

8 结论和展望

本文讨论了广义的卡西米尔力. 通过考察具有

长程关联的不同涨落介质, 包括电磁场、临界场论、戈德斯通模, 以及非平衡体系, 可以看出, 卡西米尔物理涵盖了物理学里宽泛的研究方向. 在未来卡西米尔力的研究中, 从基础物理的角度, 通过研究约束的不同实现和处理方法, 以及研究不同种类的长程关联涨落场的产生, 卡西米尔力将会有一个更为宽广的研究方向, 并有希望通过卡西米尔力的概念, 在不同的研究题目和方向之间建立联系. 从应用的角度, 量子电动力学里的卡西米尔力是量子效应的宏观反映, 在微米以下器件的设计中, 必须考虑卡西米尔力, 并通过对其进行调控实现不同的应用功能, 而临界、戈德斯通、非平衡等热卡西米尔力也可以用来调控统计体系中结构和序的形成.

参考文献

[1] Kardar M, Golestanian R 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 1233

[2] Bordag M, Klimchitskaya G L, Mohideen U, Mostepanenko V M 2009 *Advances in the Casimir Effect* (New York: Oxford University Press)

[3] Casimir H B G 1948 *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51** 793

[4] Milton K A 2001 *Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero Point Energy* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.)

[5] Dalvit D, Milonni P, Roberts D, Rosa F 2011 *Casimir Physics* (Heidelberg: Springer) pp1–3

[6] Elizalde E, Odintsov S D, Romeo A, Bytsenko A A, Zerbini S 1994 *Zeta Regularization Techniques with Applications* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.)

[7] Fisher M E, de Gennes P G 1978 *C. R. Seances Acad. Sci., Ser. B* **287** 207

[8] Maciołek A, Dietrich S 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 045001

[9] de Gennes P G 1979 Scaling Concepts in Polymer Physics (London: Cornell University Press) pp271–281

[10] Obukhov S P, Semenov A N 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 038305

[11] Semenov A N, Obukhov S P 2005 *J. Phys.: Condens. Matter* **17** S1747

[12] Sparnaay M J 1958 *Physica* **24** 751

[13] Lamoreaux S K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5

[14] Mohideen U, Roy A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4549

[15] Serry F M, Walliser D, Maclay G J 1998 *J. Appl. Phys.* **84** 2501

[16] Buks E, Roukes M L 2001 *Phys. Rev. B* **63** 033402

[17] Chan H B, Aksyuk V A, Kleiman R N, Bishop D J, Capasso F 2001 *Science* **291** 1941

[18] Garcia R, Chan M H W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1187

[19] Hertlein C, Helden L, Gambassi A, Dietrich S, Bechinger C 2008 *Nature* **451** 172

[20] Lifshitz E M 1956 *Sov. Phys. JETP* **2** 73

[21] Woods L M, Dalvit D A R, Tkatchenko A, Rodriguez-Lopez P, Rodriguez A W, Podgornik R 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 045003

[22] Schwinger J 1975 *Lett. Math. Phys.* **1** 43

[23] Aminov A, Kafri Y, Kardar M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 230602

SPECIAL TOPIC—Statistical physics and complex systems

Casimir force*

Miao Bing †

(*College of Materials Science and Opto-Electronic Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

(Received 26 March 2020; revised manuscript received 9 April 2020)

Abstract

Casimir force in quantum electrodynamics is the representation of zero point energy of vacuum. Depending on the type of fluctuation medium, generalized Casimir force covers a wide spectrum of topics in physics, such as, quantum, critical, Goldstone mode, and non-equilibrium Casimir force. In general, long range correlated fluctuations and constraints are two conditions for generating the Casimir force. In this paper, through a survey of the development of Casimir physics, we discuss several types of Casimir forces and several regularization methods. We end the paper with an outlook for the further development of Casimir physics in the future.

Keywords: Casimir force, fluctuations, long range correlation, regularization

PACS: 05.40.–a, 05.70.Jk, 11.10.–z **DOI:** 10.7498/aps.69.20200450

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 21774131, 21544007).

† Corresponding author. E-mail: bmiao@ucas.ac.cn