RG 作业（二选一）

龚明（2022 年 3 月 29 日）

作业 1：计算 ϕ^3 理论在 $d=6-\epsilon$ 维下的 RG 过程，此时

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\frac{m^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{3!}\phi^3. \tag{1}$$

计算 m^2 和 λ 的 RG flow。

作业 2：计算 N 个分量, $d=4-\epsilon$ 的 ϕ^4 理论的 RG 过程，此时

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\frac{m^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4!}(\phi^2)^2-\frac{v}{4!}\sum_{i=1}^{N}\phi_i^4, \tag{2}$$

其中 $\phi^2=\sum_i\phi_i^2$, 以及 $(\partial\phi)^2=\sum_i(\partial\phi_i)^2$。计算 m^2, λ, 和 v 的 RG flow，并讨论可能的 Wilson-Fisher 点和高斯点。

提示：先计算 d 维积分，然后取 $d=4-\epsilon$，或者 $d=6-\epsilon$，其中 $\epsilon\sim 0$ 的小量。这部分的讨论，可以参考 Peskin 的教材 P405 的讨论，以及黄克孙《统计力学》P452-P464（我们提供在主页上）。

参考资料：

1. 第一个题目，参考 J.A. Gracey，Four loop renormalization of ϕ^3 theory in six dimensions。这篇文章用重整化理论做的，本题目建议大家用重整化群理论处理。利用上课的方法讨论不同的图的贡献，你会发现只有极少数的图对质量和相互左右作用有修正。

2. 第二个题目，参考 Kardar 书第 5 章（见主页）。在 Kardar 的书中，作者考虑的是磁性，所以他的 ϕ 场，就是磁性 $\mathbf{m}=(m_1,m_2,m_3)$ 等。符号不同，但是本质一样。

补充材料：我们注意到下面几个事实。

1. 在重整化中，如果 $d<4$，圈图是收敛的，所以对相互作用是微小扰动。但是当 $d>4$ 的时候，它是发散的，圈图贡献为 $\ln\Lambda$ 量级。

2. 理论计算表明, 如果 $d<4$，那么会出现一个所谓的 Wilson-Fisher 点，但是 $d>4$ 则没有。

下面我们对这个结果提供一个解释。它的理解如下。我们不做微扰计算，只做标度分析，此时我们取 $k\to bk$，以及 $\phi_{bk}\to Z\phi_k$，所以动能不变化，有

$$Z^2b^{d+2}=1. \tag{3}$$

那么质量满足

$$m(b)^2=Z^2b^dm^2=m^2b^{-2}. \tag{4}$$

相互作用满足

$$\lambda(b)=Z^4b^{3d}\lambda=\lambda b^{d-4}. \tag{5}$$

这个结果表明，如果 $d<4$, 随着 b 减小，λ 会越来越大。这个 flow（流）会改变高斯点的稳定性。相反，如果 $d>4$, 随着 b 减小，它会越来越小。所以在 $d>4$, 它会 flow（流）到 $\lambda=0$ 的点（即 Gaussian 点）。

如果考虑重整化群修正，那么我们得到

$$m^2(b)=b^{-2}(m^2+A\Lambda^{d-2}S_d(1-b)),\quad \lambda(b)=b^{d-4}(\lambda-B\lambda^2S_d\Lambda^{d-4}(1-b)). \tag{6}$$

这个结果利用到了这样的性质，即质量修正的符号和质量相同，但是相互作用（二阶修正）正好像反。我们不具体给出 A 和 B 的系数，它对细节很重要，但是对主要结论不重要。我们定义

$$\beta(m^2)=\frac{dm^2}{dl},\quad \beta(\lambda)=\frac{\lambda}{dl},\quad b=1-dl. \tag{7}$$

所以有

$$\beta(m^2)=-2m^2-A\lambda S_d\Lambda^{d-2}. \tag{8}$$

以及

$$\beta(\lambda)=(d-4)\lambda+\lambda^2BS_d\Lambda^{d-4}. \tag{9}$$

它的 fixed point 满足 $\beta=0$, 所以有（高斯点）

$$\lambda=0,m^2=0, \tag{10}$$

以及 Wilson-Fisher 点

$$m^2=\frac{A(d-4)\Lambda^2}{2B},\quad \lambda=\frac{\Lambda^{4-d}(4-d)}{BS_d}. \tag{11}$$

可以看出来，如果我们取

$$m^2=x\Lambda^2,\quad \lambda=y\Lambda^{4-d}. \tag{12}$$

那么得到的

$$(x,y)=(0,0),\quad (x,y)=(\frac{A(d-4)}{2B},\frac{(4-d)}{BS_d}). \tag{13}$$

我们可以计算 $\beta(x)$ 和 $\beta(y)$, 它们和 Λ 无关。所以有

$$\frac{dx}{dl}=-2x-AyS_d, \tag{14}$$

以及

$$\frac{dy}{dl}=(d-4)y+y^2BS_d. \tag{15}$$

考虑 $d<4$ 的情况，我们得到在高斯点附近, $y\sim 0$, 可以得到

$$\frac{dy}{dl}=(d-4)y,\quad y=y_0\exp((d-4)l). \tag{16}$$

它是不稳定的。反之，在 $y=(4-d)/(BS_d)$ 附近，我们有 $y=(4-d)/(BS_d)+y'$, 可以得到

$$\frac{dy'}{dl}=(4-d)y,\quad y=y_0\exp((4-d)l). \tag{17}$$

可以看出来，这两个 fixed point 的性质完全不同。这些讨论参考黄克孙的教材。

这个积分可以严格计算，比如讨论

$$\frac{dy}{dl}=(d-4)y+By^2S_d, \tag{18}$$

那么得到

$$y=\frac{(4-d)}{e^{(4-d)l}K+BS_d}. \tag{19}$$

这里我们不再分析这个微分方程的性质。