Naiver-Strokes 方程、扩散方程、ϕ^4 理论标度变换

SA21038021 魏贤昊

2022 年 3 月 26 日

naiver-stokes 方程：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \vec{u}(x,t)\cdot\nabla u(x,t) + \nabla p - \nabla^2 u(x,t) = 0$$

解析各项：第一第二项 $\frac{d\vec{u}(x,t)}{dt} = \frac{\partial \vec{u}(x,t)}{\partial t} + \vec{u}(x,t)\cdot\nabla\vec{u}(x,t)$

第三项：与伯努利方程有关

第四项：对于不可压缩流体则不存在此项，对于可压缩流体此项表示扩散项

接下来我们做标度变换

$$x' = \lambda x, t' = \lambda^z t, u'(x',t') = u'(\lambda x, \lambda^z t) = \lambda^x u(x,t), P'(\lambda x, \lambda^z t) = \lambda^\eta P(x,t)$$

$$\frac{\partial u'(x',t')}{\partial t'} + \vec{u}'(x',t')\cdot\nabla' u'(x',t') + \nabla' p' - \nabla^{2'} u'(x',t') = 0$$

$$\to \lambda^{x-z}\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^{2x-1}\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + \lambda^{\eta-1}\nabla p - \lambda^{x-2}\nabla^2 u = 0$$

要让在标度变换后尺度下也满足相同的运动方程，有

$$z = 2, x = -1, \eta = -2$$

Brown 运动下的标度变换，Brown 运动方程为

$$\frac{d\phi(x,t)}{dt} = D\nabla^2\phi(x,t)$$

$$\frac{d\phi'(x',t')}{dt'} = D\nabla^{2'}\phi'(x',t')$$

方程解为

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

标度变换 $x' = x, t' = \lambda^z t, \phi' = \lambda^x \phi$

标度变换后方程为

$$\lambda^{x-z}\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\lambda^{x-2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \to z = 2$$

归一化

$$\int \phi(x,t)dx = 1, \int \phi'(\lambda x, \lambda^2 t)d(\lambda x) = 1 \to \phi' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\phi$$

ϕ^4 理论的标度变换：

$$L = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$$S = \int d^D x L$$

故单位为 $L = [m]^{-D}, \phi = [m]^{-D/2+1}, \lambda = [m]^{2D-8}$，在此标度变换下运动方程不变