外微分：简化多变量微积分中的公式、简化热统中公式、简化非阿贝尔规范场的表述

魏贤昊

2022 年 5 月 12 日

1 外微分

陈省身十分深刻指出，多变量微积分与单变量微积分根本差别是前者有外微分形式，而不巧的是外微分这一概念被剔除出了多变量微积分教材。但是数学发展常常是更高级更简单的概念出现在更低级更复杂的概念之后。外微分作为一个高级概念，它用一个公式统一了 Strokes、Green、Gauss、Newton-Leibniz 公式，且用一个公式统一了热统中一系列繁杂的公式。Hilbert 说外微分形式是“更有力的工具和更简单的方法”，因此值得在本篇文章中提出来引起大家的重视，并期望之后能回归到微积分教材中去

外微分概念起源于积分中的定向。从 A 到 B 的线积分，和从 B 到 A 的线积分中间差了符号，有

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

而关于曲面如何定向的问题，我们这样来看。对于一个被定向了的曲面 D，有

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

$$dxdx = \frac{\partial(x,x)}{\partial(u,v)}dudv = 0$$

$$dydx = \frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}dudv = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = -dxdy$$

我们通过此完成了对二维曲面的定向，满足上述两条规则的微分乘积叫微分的外积，记作 $dx\bigwedge dy$

引入外积运算

$$dx\bigwedge dx = 0, dy\bigwedge dy = 0, dz\bigwedge dz = 0$$

$$dx\bigwedge dy = -dy\bigwedge dx, dy\bigwedge dz = -dz\bigwedge dy, dz\bigwedge dx = -dx\bigwedge dz$$

$$(dx\bigwedge dy)\bigwedge dz = dx\bigwedge(dy\bigwedge dz)$$

Poincare 引理：若 ω 为一外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续偏导数，则 $dd\omega = 0$，即边界没有边界

Poincare 逆定理：若 ω 是一个 p 次外微分形式，且 $d\omega = 0$，则存在一个 p-1 次外微分形式 α，使得 $\omega = d\alpha$

同时我们定义一个外微分运算，定义式一为

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

同时我们定义的这个外微分运算定义式二为

$$when\ \omega=Pdx+Qdy+Rdz$$

$$d\omega=dP\bigwedge dx+dQ\bigwedge dy+dR\bigwedge dz$$

外微分作用下积分运算满足

$$\int_{\partial\sum}\omega=\int_{\sum}d\omega$$

记为

$$(\partial\sum,\omega)=(\sum,d\omega)$$

由此我们可以得到斯托克斯公式

$$d\omega=(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz)\bigwedge dx+(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz)\bigwedge dy+(\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz)\bigwedge dz$$

$$d\omega=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dy\bigwedge dz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dz\bigwedge dx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y})dx\bigwedge dy$$

$$\int_{\partial\sum}\omega=\int_{\sum}d\omega$$

由此我们可以得到高斯公式

$$dx\bigwedge dy\bigwedge dx=(-dy\bigwedge dx)\bigwedge dx=-dy\bigwedge(dx\bigwedge dx)=0$$

$$when\ \omega=Pdy\bigwedge dz+Qdz\bigwedge dx+Rdx\bigwedge dy$$

$$d\omega=dP\bigwedge dy\bigwedge dz+dQ\bigwedge dz\bigwedge dx+dR\bigwedge dx\bigwedge dy$$

$$d\omega=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dx\bigwedge dy\bigwedge dz$$

$$\int_{\partial\sum}\omega=\int_{\sum}d\omega$$

以上两个公式对应外微分的 2form 和 3form。外微分的 1form、2form、3form 一般使用范围如下

$$1form(\Omega^0(M)):\omega=\sum_i f_i dx^i(\text{在下面一节中会应用})$$

$$2form(\Omega^1(M)):\omega=\sum_{ij} f_{ij} dx^i\bigwedge dx^j(\text{斯托克斯公式})$$

$$3form(\Omega^2(M)):\omega=\sum_{ijk} f_{ijk} dx^i\bigwedge dx^j\bigwedge dx^k(\text{高斯公式})$$

可以通过不断的作微分构造长正合序列 (长正合序列要无限长)，如图 1所示

$$\Omega^0(M)\xrightarrow{d}\Omega^1(M)\xrightarrow{d}\Omega^2(M)\xrightarrow{d}\Omega^3(M)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Omega^n(M)\xrightarrow{d}\cdots$$

与此对应的有短正合序列，只不过不一定用外微分构造。关于短正合序列有两个重要定理

- 若 $0\to A\to B\to 0$ 正合，可得 $A\simeq B$(同胚)
- 若 $0\to A\to B\to C\to 0$ 正合，可得 $B=A\bigotimes C$ 或 $A\simeq B/C$

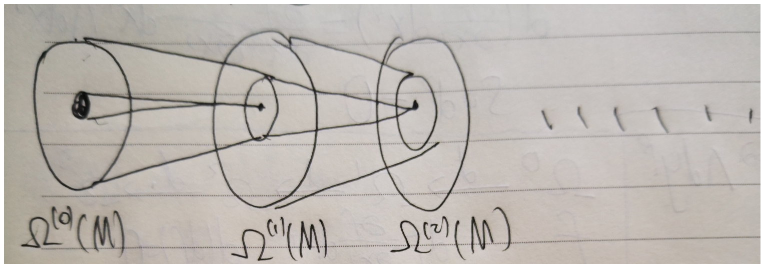

图 1: 不断的做微分构造长正合序列

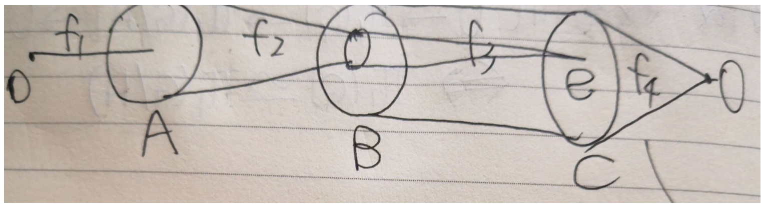

图 2: 类似的可以构造短正合序列，只不过不一定用外微分来构造

2 用外微分推导麦克斯韦关系

其实麦克斯韦关系完全可以简化为一个公式

$$dT \bigwedge dS = dP \bigwedge dV$$

下面我们可以用此方法推导其中一个麦氏关系，其它三个公式完全一摸一样的方法简便推导出来

$$dT \bigwedge dS = dP \bigwedge dV$$

$$dT \bigwedge (\frac{\partial S}{\partial P})_T dP = dP \bigwedge (\frac{\partial V}{\partial T})_P dT$$

$$(\frac{\partial S}{\partial p})_T = -(\frac{\partial V}{\partial T})_P$$

类似的方法推导出其它三个公式

$$(\frac{\partial S}{\partial V})_T = (\frac{\partial P}{\partial T})_V$$

$$(\frac{\partial T}{\partial P})_S = (\frac{\partial V}{\partial S})_P$$

$$(\frac{\partial T}{\partial V})_S = -(\frac{\partial P}{\partial S})_V$$

3 用外微分推导卡诺定理

我们推导第一个式子

$$dH = TdS + VdP$$

$$\frac{1}{T}dH = dS + \frac{V}{T}dP$$

$$-\frac{1}{T^2}dT\bigwedge dH = 0 + \frac{1}{T}dV\bigwedge dP - \frac{V}{T^2}dT\bigwedge dP$$

$$-\frac{1}{T^2}dT\bigwedge(\frac{\partial H}{\partial P})_T dP = \frac{1}{T}(\frac{\partial V}{\partial T})_P dT\bigwedge dP - \frac{V}{T^2}dT\bigwedge dP$$

$$(\frac{\partial H}{\partial P})_T = V - T(\frac{\partial V}{\partial T})_P$$

我们推导第二个式子

$$dU = TdS - pdV$$

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV$$

$$ddS = 0 = dU\bigwedge\frac{1}{T^2}dT + \frac{1}{T}dP\bigwedge dV + dV\bigwedge\frac{P}{T^2}dT$$

$$0 = (\frac{\partial U}{\partial V})_T dV\bigwedge\frac{1}{T^2}dT + \frac{1}{T}(\frac{\partial P}{\partial T})_V dT\bigwedge dV + dV\bigwedge\frac{P}{T^2}dT$$

$$(\frac{\partial U}{\partial V})_T = T(\frac{\partial P}{\partial T})_V - P$$

3.1 外微分形式下的 Maxwell 方程组 [8]

下面我们介绍外微分形式下的 Maxwell 方程组，在此之前我们需要引入 Hodge 算子。其引入背景为：对于 1-form 情况下 $A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$，对其外微分可取形式为

$$dA = (\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y})dydz + (\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})dzdx + (\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x})dxdy$$

而 $\vec{A}$ 的旋度 $\nabla\times\vec{A}$ 对应的 1-form 为

$$(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y})dx + (\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial_z})dy + (\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x})dz$$

可以看出，若我们建立映射

$$dydz \to dx, dzdx \to dy, dydx \to dz$$

那么可以在 $\nabla\times\vec{A}$ 与 dA 之间建立对应，这也是引入 Hodge 算子的动机。更一般的，对于 n 维空间中 p 形式可用 Hodge 算子变成 (n-p) 形式

$$*(dx^{\mu_1}dx^{\mu_2}\cdots dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_{p+1}\cdots\nu_n}dx^{\nu_{p+1}}dx^{\nu_{p+2}}\cdots dx^{\nu_n}$$

其中 $\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_{p+1}\cdots\nu_n}$ 里面等价于 ϵ 符号乘了一个度规。我们还可定义

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\Lambda dx^\nu$$

那么经过 Hodge 算子作用后的矩阵变为

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} (*F)_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

于是可以得到 Gauss 单位制下的 Maxwell 方程

$$*d*F=4\pi J, dF=0$$

注：温习电动力学中的叙述

$$j^{\mu}=(\rho,\vec{j}), j_{\mu}=(-\rho,\vec{j})$$

$$A^{\mu}=(\varphi,\vec{A}), A_{\mu}=(-\varphi,\vec{A})$$

$$\partial_0=-\partial^0$$

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0, \partial_{\mu}A^{\mu}=0$$

$$F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i$$

Maxwell 方程可写成如下形式

$$\sum_{\mu}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=4\pi j^{\nu}$$

$$\sum_{\nu mn}\epsilon_{\mu\nu mn}\partial_{\nu}F^{mn}=0$$

讨论真空场下的能量动量张量

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial^{\nu}\phi-g^{\mu\nu}L$$

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}A_{\lambda})}\partial^{\nu}A_{\lambda}-g^{\mu\nu}L$$

$$L=-\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}=-\frac{1}{2}(E^2-B^2)$$

若我们做规范变换

$$\hat{T}^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}+\partial_{\lambda}K^{\lambda\mu\nu}(K^{\lambda\mu\nu}=F^{\mu\lambda}A^{\nu})$$

则可以同时得到能量动量张量

$$\epsilon=\frac{1}{2}(E^2+B^2), S=E\times B$$

3.2 猜测高维实空间情况下的 Maxwell 方程

魏贤昊猜测高维 Maxwell 方程形式依然为

$$\sum_{\mu}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=4\pi j^{\nu}, \sum_{\nu mn}\epsilon_{\mu\nu mn}\partial_{\nu}F^{mn}=0$$

若如此，则高维情况下电磁波解依然存在

$$\sum_{\mu}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=0\rightarrow\sum_{\mu}\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}-\sum_{\nu}(\sum_{\mu}\partial_{\mu}A^{\mu})=0$$

根据流守恒方程 $\partial_{\mu}A^{\mu}=0$ 进一步得波动解

$$\sum_{\mu}\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}=0\rightarrow\sum_{\mu}\partial_{\mu}\partial^{\mu}F^{\rho\sigma}=0$$

可以在麦克斯韦方程基础上加上 Topo Term。当存在直流电场时，前面电场变化项可以略去，只剩余牛谦的一堆方程

3.3 用外微分表示非阿贝尔规范场 [5, 6, 7]

下面我用我自己理解的方式叙述 SU(2) 规范场

$\psi \to U\psi$，只不过这里 $U \neq exp(-ie\int A\cdot dr)$，即不是简单的 U(1) 规范场。SU(2) 规范场与 U(1) 规范场类似，$\hat{p}-e\hat{A}$ 在规范变换下不变，即

$$U^\dagger(\partial_\mu - ieA'_\mu/\hbar)U = \partial_\mu - ieA_\mu/\hbar$$

$$(\partial_\mu - ieA'_\mu/\hbar)U = U(\partial_\mu - ieA_\mu/\hbar)[U^\dagger U]$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = UA_\mu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\mu U^\dagger$$

定义

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu/\hbar, D'_\mu = \partial_\mu - ieA'_\mu/\hbar, UD_\mu U^\dagger = UD'_\mu U^\dagger$$

$$F'_{\mu\nu} = D'_\mu A'_\nu - D'_\nu A'_\mu = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu - i\frac{e}{\hbar}[A'_\mu, A'_\nu]$$

相应的 SU(2) 规范不变量为

$$L = \int (D_\mu\varphi)^2 - V(\varphi^\dagger\varphi)$$

可以计算出

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= D'_\mu A'_\nu - D'_\nu A'_\mu \\
&= \partial_\mu(UA_\nu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\nu U^\dagger) - \partial_\nu(UA_\mu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\mu U^\dagger) \\
&- \frac{ie}{\hbar}[UA_\mu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\mu U^\dagger][UA_\nu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\nu U^\dagger] \\
&+ \frac{ie}{\hbar}[UA_\nu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\nu U^\dagger][UA_\mu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\mu U^\dagger] \\
&= U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\frac{e}{\hbar}[A_\mu, A_\nu])U^\dagger \\
&= U(D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu)U^\dagger
\end{aligned} \tag{2}$$

由于 $\partial_\mu U = -U(\partial_\mu U^\dagger)U, \partial_\mu U^\dagger = -U^\dagger(\partial_\mu U)U^\dagger$，可将上式化简为

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger$$

定义 $U = exp(-i\theta^a T^a)$，要求 $[T^a, T^b] = \epsilon_{abc}T^c$。在 SU(2) 规范场中

$$T^a = \sigma^a/2, A_\mu = \sum_c A^c_\mu T^c, F_{\mu\nu} = \sum_c F^c_{\mu\nu}T^c$$

可得

$$A^{a\prime}_\mu = A^a_\mu + \epsilon_{abc}\theta^b A^c_\mu - \partial_\mu\theta^a$$

$$F'^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \frac{e}{\hbar}\epsilon_{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

我们常常应用时间规范下的形式，即规范势的时空分量为 0(即不考虑含时演化) 形式，有

$$A_0(x) = 0, A_{i\neq 0}(x) = \frac{i\hbar}{e}U\partial_i U^\dagger, \partial_\mu = \partial^\mu$$

下面我用自己的方式证明一个表达式 $F = d\bigwedge A - iA\bigwedge A$，我定义在原子单位制下

$$d\bigwedge A - iA\bigwedge A = \epsilon_{\nu\mu}\partial_\nu A^\mu - i\epsilon_{\nu\mu}A_\nu A^\mu$$

$$A'_\mu(x) = UA_\mu U^\dagger + \frac{i\hbar}{e}U\partial_\mu U^\dagger$$

经过一系列计算步骤得

$$d\bigwedge A' - iA'\bigwedge A' = U(d\bigwedge A - iA\bigwedge A)U^\dagger$$

于是我们可以得出 $F_{\mu\nu}$ 的另一种等价定义形式

$$F_{\mu\nu} = (d\bigwedge A - iA\bigwedge A)_{\mu\nu} = -(\epsilon_{\nu\mu}\partial_\nu A^\mu - i\epsilon_{\nu\mu}A_\nu A^\mu) = \epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu A^\nu - i\epsilon_{\mu\nu}A_\mu A^\nu$$

我们可以得到 SU(2) 规范不变量的另一种表述形式

$$L = -\int \frac{e^2}{2\hbar^2}tr[(F^a_{\mu\nu}T^a)^2] = -\frac{e^2}{4\hbar^2}(F^a_{\mu\nu})^2$$

4 用外微分计算高维空间的拓扑不变量

4.1 建议多变量微积分中不要省略 $\bigwedge$ 符号

举一个例子，物理学中几何相计算公式为

$$\gamma = -Im\int\int dk_x dk_y(<\frac{\partial\psi}{\partial k_x}|\frac{\partial\psi}{\partial k_y}> - <\frac{\partial\psi}{\partial k_y}|\frac{\partial\psi}{\partial k_x}>)$$

如果我们把 dk_x 和 dk_y 做对换，若 $dk_x dk_y = dk_y dk_x$，那么得到几何相永远为零，这显然是荒谬的。因此正确形式应为 $dk_x\bigwedge dk_y$，满足如下形式

$$dk_x\bigwedge dk_y = -dk_y\bigwedge dk_x$$

在多变量微积分中常常一不讲外微分，二是学生普遍对 $dk_x dk_y = -dk_y dk_x$ 缺乏了解，故真正在计算积分时，会发生类似这类荒谬的错误。因此我强烈建议多变量微积分中不要省略外微分符号

4.2 外微分表示高维空间拓扑不变量

在我本科毕业论文第二章系统证明了 2D 和 3D 拓扑不变量的计算公式为

$$\hat{h}(k) = \vec{h}(k)/|\vec{h}(k)|$$

$$C_{1D} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial V}\partial_k\hat{h}(k)\times\hat{h}(k)$$

$$C_{2D} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}[\partial_{kx}\hat{h}(k)\times\partial_{ky}\hat{h}(k)]\cdot\hat{h}(k)$$

其中 V 为所有矢量 $\hat{h}(k)$ 围成的球。写成外微分形式得

$$C_{1D} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial V}\epsilon^{im}d\hat{h}_i(k)\cdot\hat{h}_m(k)$$

$$C_{2D}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\epsilon^{imn}(d\hat{h}_i(k)\bigwedge d\hat{h}_m(k))\cdot\hat{h}_n(k)$$

并留意到

$$\pi=\int_{V'}\epsilon^{im}\frac{1}{2!}d\hat{k}_i\bigwedge d\hat{k}_m$$

$$\frac{4}{3}\pi=\int_{V'}\epsilon^{imn}\frac{1}{3!}d\hat{k}_i\bigwedge d\hat{k}_m\bigwedge d\hat{k}_n$$

其中 V' 为 $|\hat{k}|=1$ 围成的球体积。因此我们可以借机推广到 n 维球体积公式为

$$C_{nD}=-\frac{\int_{\partial V}\epsilon^{i_1\cdots i_n}(d\hat{h}_{i_1}(k)\bigwedge\cdots\bigwedge d\hat{h}_{i_{n-1}}(k))\cdot\hat{h}_{i_n}(k)}{\int_{V'}\epsilon^{i_1\cdots i_n}dk_{i_1}\bigwedge\cdots\bigwedge dk_{i_n}}\times(n-1)!$$

由 S^4 球面表面积为 $\frac{8\pi^2}{3}R^4$，可求出 $n=4$ 情形为

$$C_{4D}=-\frac{3}{8\pi^2}\int d^4k\epsilon^{abcde}\hat{d}_a\partial_x\hat{d}_b\partial_y\hat{d}_c\partial_z\hat{d}_d\partial_w\hat{d}_e$$

参考文献

[1] 常庚哲，史济怀《数学分析（第二册)》

[2]《热力学与统计物理》汪志诚著

[3] http://home.ustc.edu.cn/ lxsphys/index.html

[4]《微积分五讲》，龚□著

[5]《Introduction to Quantum Field Theory》Peskin

[6]《Quantum Field Theory in a nutshell》A.Zee

[7]《量子力学的前沿问题》张礼，葛墨林等著，第二版

[8] https://zhuanlan.zhihu.com/p/46544376