

# 线性响应理论算霍尔电导

PB17061275 魏贤昊

2024 年 12 月 8 日

## 目录

1 方法一 (David Tong 书有许多错误, 我修改了, 严格证明了一阶项正比于几何相)[1]	2
2 计算二阶项三阶项 (实在太困难了, 暂时没往下算了)	5
3 线性响应理论求极化率和磁化率 [4]	5
4 量子霍尔效应和拓扑 pump 的等价性	6
5 方法二: (我把 Bernevig 书遗漏的推导步骤补全了, 但过程极其繁琐, 需要用到量子多体里面的格林函数, 不建议初学者看, 我自己目前也不能完全消化, 闭着眼睛推导)[2]	7
6 He3 液体的霍尔效应 [6]	10
7 实空间和扭曲边界条件情形下的量子霍尔电导 [5]	11
8 推广到分数霍尔效应情形 [5]	12
9 其余表征拓扑数的方法	13
9.1 Local Chern Marker 的计算 (待完善) . . . . .	13
9.2 Layer-Resolved Chern Number 的计算 [8, 9] . . . . .	13
10 附录	16
10.1 IQHE 的波函数 . . . . .	16
11 参考文献	16

# 1 方法一 (David Tong 书有许多错误, 我修改了, 严格证明了一阶项正比于几何相)[1]

设体系在  $t_0 = -\infty$  时有强磁场但没有加入外加电场, 经过么正演化  $u(t, t_0)$  后等效为在时刻  $t$  体系存在电场。在电磁场围绕下, 单个粒子, 哈密顿量变为

$$H(t) = \frac{p_x^2 + (p_y - eBx\hat{y})^2}{2m} + e\varphi(t) = H_0 + \Delta H(t)$$

相互作用表象下么正演化中只出现  $\int_{-\infty}^{t=0} \Delta H(t') dt'$  因子, 故等效作用为

$$\int_{-\infty}^{t=0} \Delta H_x(t') dt' = \int_{-\infty}^{t=0} eE_x(t')x(t') dt' = \int_{-\infty}^{t=0} edA_x(t')x(t') = - \int_{-\infty}^{t=0} eA_x(t')v_x(t') dt' = - \int_{-\infty}^{t=0} J_x(t')A_x(t') dt'$$

故等效哈密顿量为

$$\Delta H = \Delta H_x + \Delta H_y = -\vec{J} \cdot \vec{A}$$

注意: 我们定义的  $j_i(x, y) = ev_i(x, y)$ , 只讨论单个粒子的行为。推广到多个粒子行为, 公式变为

$$\Delta H(t) = - \int dx dy n(x, y) j(x, y, t) \cdot A(t)$$

$$J(x, y, t) = \int dx dy n(x, y) j(x, y, t)$$

第二种理解  $J \cdot A$  项的方式: 量子霍尔效应为  $t = -\infty$  情况下已加入强磁场, 使之劈裂为朗道能级, 后面缓慢加入电场。整体矢势为

$$\vec{A}(r, t) = \vec{A}(t) + \vec{A}(r), \varphi = 0$$

$$E(t) = -\partial_t \vec{A}(r, t) = -\partial_t \vec{A}(t), B = \nabla \times \vec{A}(r, t) = \nabla \times \vec{A}(r)$$

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}(t) - e\vec{A}(r))^2}{2m} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}(r))^2}{2m} - \frac{e\vec{A}(t) \cdot (\vec{p} - e\vec{A}(r))}{m} + \frac{e^2 A^2(t)}{2m}$$

根据运动方程  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p}$  得哈密顿量可以忽略掉  $A^2(t)$  项。等效哈密顿量为

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}(t) - e\vec{A}(r))^2}{2m} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}(r))^2}{2m} - \frac{e\vec{A}(t) \cdot (\vec{p} - e\vec{A}(r) - e\vec{A}(t))}{m}$$

接着我们用理论力学的方式说明实际可观测的电流  $j(r, t) = \frac{e(p - eA(r, t))}{m} = \frac{e(p - eA(r) - eA(t))}{m}$

引理:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - e \dot{x} \cdot A - u(r)$$

证明如下:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = e(-\nabla\varphi - \partial_t \vec{A} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))$$

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \epsilon_{ijk} \dot{x}_j (\nabla \times \vec{A})_k \vec{e}_i$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} \dot{x}_j \partial_m A_n \vec{e}_i$$

$$= (\dot{x}_j \partial_i A_j - \dot{x}_j \partial_j A_i) \vec{e}_i \quad (1)$$

$$= \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{A})}{\partial \vec{r}} - \dot{x}_j \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j}$$

$$\vec{F} = e\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}} - \partial_t\vec{A} + \frac{\partial(\vec{v}\cdot\vec{A})}{\partial\vec{r}} - \dot{x}_j\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_j}\right] = e\left[\frac{\partial(-\varphi + \vec{v}\cdot\vec{A})}{\partial\vec{r}} - \frac{d\vec{A}(x,t)}{dt}\right]$$

之前推导的  $e$  为  $+e$ , 为正电荷, 根据运动方程  $\frac{\partial L}{\partial\vec{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}} = 0$ , 换成实际负电荷情形  $-e$ , 可得

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\vec{v}\cdot\vec{A}$$

定义

$$P = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} - eA$$

$$H = \dot{x}\cdot p - L = \frac{(\vec{P} + e\vec{A})^2}{2m} = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

这里粒子带点为  $-e$ 。量子力学中将  $P \rightarrow -i\hbar\nabla$ , 这样可以和塞曼劈裂相吻合, 背后更深层原因可以从理论力学的泊松括号定义式给出。这里我们已经说明了,  $p - eA = m\dot{x}$ 。故实际可观测的但粒子电流  $j = e\dot{x} = \frac{e(p - eA)}{m}$  得证, 推广到多粒子情况为

$$J(x, y, t) = \int dx dy n(x, y) j(x, y, t)$$

下面开始正文, 相互作用表象下有公式 (注: 以下隐含  $t = 0$ )

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle_I$$

$$U(t, t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \Delta H(t') dt'\right)$$

$$\begin{aligned} \langle J(t) \rangle &= \langle \int dx dy n(x, y) j(x, y, t) \rangle \\ &= \int dx dy n(x, y) \langle O(t) | j(x, y, t) | O(t) \rangle \\ &= \int dx dy n(x, y) \langle 0 | U(t, t_0)^{-1} j(x, y, t) U(t) | 0 \rangle \\ &\simeq \int dx dy n(x, y) \langle 0 | j(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\Delta H(t'), j(t)] | 0 \rangle \\ &= \int dx dy n(x, y) \langle 0 | j(t) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [j(x', y', t') \cdot A(t'), j(x, y, t)] | 0 \rangle \\ &= \int dx dy n(x, y) \langle 0 | 0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [j(x, y, t') \cdot A(t'), j(x, y, t)] | 0 \rangle \\ &= -n(x, y) \langle 0 | \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [j(x, y, t') \cdot A(t'), j(x, y, t)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

$$A(t) = \frac{E}{i\omega} e^{-i\omega t}$$

$$\langle J_i(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^t dt' -n(x, y) \langle 0 | [j_j(x, y, t'), j_i(x, y, t)] | 0 \rangle E_j e^{-i\omega t'}$$

$$t'' = t - t'$$

$$\langle J_i(t) \rangle = \frac{-1}{\hbar\omega} \left( \int_0^{+\infty} dt'' n(x, y) e^{i\omega t''} \langle 0 | [J_j(x, y, 0), J_i(x, y, t'')] | 0 \rangle \right) E_j e^{-i\omega t}$$

$$\sigma_{xy}(\omega) = n(x, y) \frac{-1}{\hbar\omega} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle 0 | [j_y(x, y, 0), j_x(x, y, t)] | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
j(x, y, t) &= e^{iH_0 t/\hbar} j(x, y, 0) e^{-iH_0 t/\hbar} \\
\sigma_{xy}(\omega) &= n(x, y) \frac{-1}{\hbar\omega} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \sum_n [\langle 0|j_y(x, y, 0)|n\rangle \langle n|j_x(x, y, 0)|0\rangle e^{i(E_n - E_0)t/\hbar} \\
&\quad - \langle 0|j_x(x, y, 0)|n\rangle \langle n|j_y(x, y, 0)|0\rangle e^{i(E_0 - E_n)t/\hbar}] \\
&= n(x, y) \frac{i}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left[ \frac{\langle 0|j_y(x, y, 0)|n\rangle \langle n|j_x(x, y, 0)|0\rangle}{\hbar\omega + E_n - E_0} - \frac{\langle 0|j_x(x, y, 0)|n\rangle \langle n|j_y(x, y, 0)|0\rangle}{\hbar\omega + E_0 - E_n} \right]
\end{aligned} \tag{3}$$

用重整化的思想求解, 在直流 (低频) 情况下  $\omega \rightarrow 0$ , 有

$$\frac{1}{\hbar\omega + E_n - E_0} \simeq \frac{1}{E_n - E_0} - \frac{\hbar\omega}{(E_n - E_0)^2}$$

去除发散项有

$$\sigma_{xy} = -i\hbar n(x, y) \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0|j_y(x, y, 0)|n\rangle \langle n|j_x(x, y, 0)|0\rangle - \langle 0|j_x(x, y, 0)|n\rangle \langle n|j_y(x, y, 0)|0\rangle}{(E_n - E_0)^2} \tag{4}$$

备注:  $|n\rangle$  可看作单个能带中动量本征态,  $E_n$  为能带本征值  $E_k$ 。根据

$$\begin{aligned}
dN &= \int \int n(x, y) dx dy = \int \int \frac{dx dy dp_x dp_y}{h^2} = \int \int \frac{dx dy dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \\
j_i(x, y, 0) &= -\frac{e}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial k_i}
\end{aligned}$$

于是有以下公式, 可以看到这一步是关键的操作, 将多粒子密度算符  $n(x, y)$  等效替换成了单粒子积分算符  $\int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2}$ , 并根据固体物理中电导空间均匀性替换了  $j_i(x, y, 0)$  替换成了  $\frac{e}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial k_i}$ 。这一步实现了在零温情况下将多体算符等效替换成了单体算符

$$\sigma_{xy} = -i \frac{e^2}{\hbar} \int \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0|\frac{\partial H}{\partial k_y}|n\rangle \langle n|\frac{\partial H}{\partial k_x}|0\rangle - \langle 0|\frac{\partial H}{\partial k_x}|n\rangle \langle n|\frac{\partial H}{\partial k_y}|0\rangle}{(E_n - E_0)^2} \tag{5}$$

对零温情况下可以看作是对整个能带的积分,  $|n\rangle$  可以看作是单个能带的动量本征态  $k$ 。对比几何相公式

$$C = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{-i}{2\pi} \sum_{m \neq n} \int \int dx dy \frac{\langle m|(\nabla H)|n\rangle \times \langle n|(\nabla H)|m\rangle}{(E_m - E_n)^2}$$

于是得到量子霍尔系数与几何相的关系

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{E_\alpha < E_F} C_\alpha$$

有限温情况下: 能带不是完全填充, winding number 略有偏离, 试想一下非常高温情况下, 能带不再是全满的了, 量子霍尔系数将大幅度偏离整数。由于实际情况下  $k_B T_{\text{熔点}} \ll E_F$ , 故激发永远只是非常小的一部分, 量子霍尔系数不会偏离太大

## 2 计算二阶项三阶项 (实在太困难了, 暂时没往下算了)

### 3 线性响应理论求极化率和磁化率 [4]

和线性响应理论算霍尔电导类似, 这里都考虑的是在外场作用下, 电磁场的响应。对于单粒子在无旋电场作用下有

$$\Delta H(t) = \rho\varphi$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

其中无外电场情况下  $\rho^0$  已经被吸收到了  $H_0$ , 这里  $\rho$  只指外电场造成的极化电密度。相互作用表象下有以下公式 (注: 以下隐含  $t=0$ )

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle_I$$

$$U(t, t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \Delta H(t') dt'\right)$$

线性响应理论体系下

$$\Delta H(t') = \Delta H e^{\eta t'}, \varphi(t') = \varphi e^{\eta t'} (\eta \rightarrow 0^+)$$

$$\langle \rho(t) \rangle = \langle O(t) | \rho(x, y, t) | O(t) \rangle$$

$$= \langle 0 | U(t, t_0)^{-1} \rho(x, y, t) U(t) | 0 \rangle$$

$$\simeq \langle 0 | j(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\Delta H(t'), \rho(t)] | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \rho(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\rho(t'), \varphi(t'), \rho(t)] | 0 \rangle \quad (6)$$

$$= \langle 0 | 0 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\rho(t') \cdot \varphi(t'), \rho(t)] | 0 \rangle$$

$$\langle \rho(t) \rangle = \langle 0 | \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\rho(t') \cdot \varphi(t'), \rho(t)] | 0 \rangle$$

我们下面求解电极化, 考虑无旋度的电极化而言, 有

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{P}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{P}) - \nabla^2 \vec{P} = 0$$

综合以上公式有

$$\nabla^2 \vec{P} = \alpha \vec{E}$$

$$\alpha = - \langle 0 | \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t [\rho(t), \rho(t')] | 0 \rangle e^{\eta t'}$$

根据格林函数的定义式

$$G_{00}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \langle 0 | [\rho(t'), \rho(t)] | 0 \rangle e^{\eta t'}$$

傅里叶变换可得电极化公式

$$\vec{P}(\vec{k}, \omega) = \frac{G(\vec{k}, \omega)}{k^2} \vec{E}$$

下面我们利用线性响应理论算磁化率，磁化满足公式

$$\nabla \times \vec{M} = \delta \vec{j}$$

其中  $\delta j(t)$  为响应电流，根据之前的结果有

$$\langle \delta j(t) \rangle = - \langle 0 | \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [j(t') \cdot A(t'), j(t)] | 0 \rangle$$

定义关联函数 (格林函数) 形式为

$$\Pi^{ij} = \langle 0 | \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [j^i(t'), j^j(t)] | 0 \rangle e^{\eta t'}$$

由于不考虑电荷累积，即  $\rho(t) = \rho_0$ ,  $H_0(\rho) = H_0$ ，根据电荷守恒原理，有

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \rightarrow \sum_i k_i \Pi^{ij} = 0$$

由于  $H_0$  不依赖于空间坐标，根据空间对称性，以及  $H_0$  只考虑到  $\nabla^2$  的特性，我们可以得到

$$\Pi^{ij} = (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) \Pi^\perp$$

根据以上表达式，我们得到磁化率公式

$$\begin{aligned} i\epsilon^{ijk} k_j M_k &= j^i = -\Pi^{ij} A_j = -(\delta^{ij} k^2 - k^i k^j) A_j \frac{\Pi^\perp}{k^2} \\ &= \epsilon^{ij'k'} k_{j'} e^{k' i' j} k_{i'} A_j \frac{\Pi^\perp}{k^2} = -i\epsilon^{ijk} k_j B_k \frac{\Pi^\perp}{k^2} \end{aligned} \quad (7)$$

可得到最终磁化率表达式

$$M_i = -\frac{\Pi^\perp}{k^2} B_i$$

## 4 量子霍尔效应和拓扑 pump 的等价性

我认为不从此方法推导，改从 Wannier 函数办法推导会存在规范导致的 ill defined 问题，后续我将严格论述

我们以 QWZ model 为例，来说明 Topo pump 的等价性，两种模型哈密顿量分别为

$$H_{QWZ} = \sin(\frac{\hat{p}_x a_x}{\hbar}) \sigma_x + \sin(\frac{\hat{p}_y a_y}{\hbar} + \frac{eE_y t a_y}{\hbar}) \sigma_y + [m + \cos(\frac{\hat{p}_x a_x}{\hbar}) + \cos(\frac{\hat{p}_y a_y}{\hbar} + \frac{eE_y t}{\hbar})] \sigma_z$$

$$H_{PUMP} = \sin(\frac{\hat{p}_x a_x}{\hbar}) \sigma_x + \sin(\frac{eE_y t}{\hbar}) \sigma_y + [m + \cos(\frac{\hat{p}_x a_x}{\hbar}) + \cos(\frac{eE_y t}{\hbar})] \sigma_z$$

为了类比便于理解，我们假定  $N_{xy} = N_x N_y$ ，为一个正方晶格系统 x 方向有  $N_x$  个晶格格点，y 方向有  $N_y$  个晶格格点， $\hat{p}_x, \hat{p}_y$  为算符， $H_{QWZ}$  本征态为  $|k_x, k_y\rangle$ ，有  $\hat{p}_i |k_x, k_y\rangle = \hbar k_i |k_x, k_y\rangle$ 。其中  $k_i = \frac{2\pi}{N_i a_i}, \frac{2\pi * 2}{N_i a_i}, \dots, \frac{2\pi}{a_i}$ ， $a_x, a_y$  为单位元胞晶格常数，定义  $L_x = N_x a_x, L_y = N_y a_y$  为体系尺寸。

我们把 QWZ 模型定义为模型一。对于  $H_{PUMP}$  如果推广到 2D 情况，定义为模型二，我们只需要推广到 y 方向有  $N_y$  个该 1D 系统的重复即可。两种哈密顿量本征态均为  $|k_x, k_y\rangle$ 。且我们发现，对于不同的  $k_y$ ，两种模型在一个周期下的含时演化最终结论均相同

$$\mathbb{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H_{QWZ}(k_x, k_y)(t') dt'} |k_x, k_y\rangle = \mathbb{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H_{PUMP}(k_x, k_y)(t') dt'} |k_x, k_y\rangle$$

5 方法二:(我把 BERNEVIG 书遗漏的推导步骤补全了,但过程极其繁琐,,需要用到量子多体里面的格林函数,不建议初学

可以看到,模型一和模型二在一个周期下,对于同样的初态,那么电子就有同样的末态。故  $H_{PUMP}$  作用下电流响应与  $H_{QWZ}$  相同。

$H_{QWZ}$  的电流响应为量子霍尔效应,线电流密度  $j_x$  满足

$$j_x = \frac{Ne\langle v_x \rangle}{L_x L_y} = \frac{e\langle v_x \rangle}{a_x a_y} = C \frac{e^2}{h} E_y$$

我们假设 pump 参数与电场的联系满足

$$\frac{eE_y}{\hbar} a_y = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

根据以上式子,我们可以得到

$$\langle v_x \rangle = C \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

故 pumping 一个周期后, pumping 距离为

$$\langle x \rangle = C a_x$$

## 5 方法二: (我把 Bernevig 书遗漏的推导步骤补全了, 但过程极其繁琐,, 需要用到量子多体里面的格林函数, 不建议初学者看, 我自己目前也不能完全消化, 闭着眼睛推导)[2]

下面我们用格林函数方法证明量子霍尔效应的相关公式

$$\dot{\rho}(x) + \nabla \cdot J(x) = 0 \rightarrow \dot{\rho}_q - iq \cdot J_q = 0$$

$$\rho(q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k$$

$$q \cdot J_q = -i\dot{\rho}_q = -[\rho, H] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k (h_{k+q} - h_k) c_{k+q}^\dagger c_k \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \left( \frac{\partial h_k}{\partial k} \cdot q \right) c_{k+q}^\dagger c_k$$

$$J_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_{k+q/2}^\dagger \frac{\partial h_k}{\partial k} c_{k-q/2}$$

下面我们将固体能带模型和外场耦合, 这可以视为用另一种方法来导出有效场论  $S_{eff} = \int \vec{j} \cdot \vec{A}$

$$H = \sum_{i,j,\alpha,\beta} c_{i\alpha}^\dagger h_{ij}^{\alpha\beta} e^{i \int_j^i A(l) \cdot dl} c_{j\beta} \simeq \sum_{i,j,\alpha,\beta} c_{i\alpha} h_{ij}^{\alpha\beta} (1 + i \int_j^i A(l) \cdot dl) c_{j\beta} = H_0 + H_{ext}$$

$$H_{ext} = \sum_{k_1, k_2, \alpha, \beta} c_{k_1, \alpha}^\dagger c_{k_2, \beta} \frac{1}{N} \sum_{r, j} e^{i(k_2 - k_1) \cdot j - ik_1 \cdot r} h_r^{\alpha\beta} i \int_j^{j+r} A(l) \cdot dl$$

根据  $\int_j^{j+r} A(l) \cdot dl \simeq r \cdot A(j + \frac{r}{2})$  以及傅里叶变换  $A_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-iq \cdot j} A_q$ , 经多次步骤得

$$H_{ext} = \sum_{k, q, \alpha, \beta} c_{k+q/2, \alpha}^\dagger c_{k-q/2, \beta} \frac{\partial h_k^{\alpha\beta}}{\partial k} \cdot A_{-q} = \sum_q \vec{j}_q \cdot A_{-q}$$

5 方法二:(我把 BERNEVIG 书遗漏的推导步骤补全了,但过程极其繁琐,,需要用到量子多体里面的格林函数,不建议初学)

下面我们用线性响应理论推导量子霍尔效应。我们定义规范电流矢量满足

$$J(x, t) = \frac{1}{2} \sum_i [(p_i - eA(x, t))\delta(x - x_i) + \delta(x - x_i)(p_i - eA(x, t))]$$

$$J(x, t) = j(x) - neA(x, t), n = \sum_i \delta(x - x_i)$$

求解薛定谔方程

$$i \frac{\partial |u_N(t)\rangle}{\partial t} = H |u_N(t)\rangle$$

转移到相互作用表象

$$|u_N(t)\rangle = \exp(-iH_0 t) U_{ext}(t) |u_N(0)\rangle, i \frac{\partial U_{ext}}{\partial t} |u_N\rangle = H_{ext}(t) U_{ext} |u_N\rangle$$

$$U_{ext}(t) = 1 - i \int_0^t H_{ext}(t') U_{ext}(t') dt'$$

$$\langle u_N(t) | J(x, t) | u_N(t) \rangle = \langle u_N(t) | j(x) | u_N(t) \rangle - neA(x, t)$$

$$= \langle u_N(0) | j(x) | u_N(0) \rangle + i \int_0^t dt' \langle u_N(0) | [H_{ext}(t'), j(x, t)] | u_N(0) \rangle - neA(x, t)$$

$$\langle u_N(t) | J_i(x, t) | u_N(t) \rangle = \langle u_N(0) | j_i(x) | u_N(0) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \sum_j R_{ij}(x - x', t - t') A_j(x', t')$$

$$R_{ij}(x - x', t - t') = -i\theta(t - t') \langle u_N(0) | [j_i(x, t), j_j(x', t')] | u_N(0) \rangle - ne\delta_{ij}\delta(x - x')\delta(t - t')$$

(8)

下面我们讨论非零温的物理,用系综理论来解决此问题,下面我们计算推迟格林函数  $G^R = -i\theta(t) \langle [A(t), B(0)] \rangle$

$$-i\theta(t) \langle A(t)B(0) \rangle = -i\theta(t) \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | e^{iHt} A e^{-iHt} B | n \rangle = -i\theta(t) \frac{1}{Z} \sum_{nm} e^{-\beta E_m + i(E_m - E_n)t} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle$$

$$J_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle A(t)B(0) \rangle e^{i\omega t} dt = 2\pi Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta E_m} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle \delta(E_m - E_n + \hbar\omega)$$

$$J_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle B(0)A(t) \rangle e^{i\omega t} dt = 2\pi Z^{-1} \sum_{mn} e^{-\beta E_n} \langle n | B | m \rangle \langle m | A | n \rangle \delta(E_m - E_n + \hbar\omega) = e^{-\beta\omega} J_1(\omega)$$

$$G^R(t) = -i\theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} J_1(\omega) (1 - e^{-\beta\omega}) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$G^R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G^R(t) e^{i\omega t} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} J_1(\omega') (1 - e^{-\beta\omega'}) \frac{d\omega'}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega' + i\eta)t} dt$$

$$G^R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(\omega')}{\omega - \omega' + i\eta} (1 - e^{-\beta\omega'}) \frac{d\omega'}{2\pi}$$

下面我们计算时序格林函数  $G^T(t) = -i \langle T[A(t)B(0)] \rangle$ , 我们可以计算出其傅里叶变换为

$$G^T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} J_1(\omega') \left[ \frac{1}{\omega - \omega' + i\eta} - \frac{e^{-\beta\omega'}}{\omega - \omega' - i\eta} \right] \frac{d\omega'}{2\pi}$$



5 方法二:(我把 BERNEVIG 书遗漏的推导步骤补全了,但过程极其繁琐,,需要用到量子多体里面的格林函数,不建议初学

下面我们运用之前证明的公式求解量子霍尔电导。我们发现由于  $J_i(k, \omega) = R_{ij}(k, \omega)A_j(k, \omega) = i\omega\sigma_{ij}(k, \omega)$ , 故而我们需要算得  $R_{ij}$  值来反推  $\sigma_{ij}(q, \omega) = \frac{R_{ij}(q, \omega)}{i\omega}$

$$R_{ij}(x - x', t - t') = -i\theta(t - t') \langle u_N [j_i(x, t), j_j(x', t')] | u_N \rangle - ne\delta_{ij}\delta(x - x')\delta(t - t')$$

我们将之前证明的零温理论公式推广到有限温系综理论得

$$\langle u_N(t) | J_i(x, t) | u_N(t) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} [j_i(x, t), j_j(x', t')] + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \sum_j R_{ij}(x - x', t - t') A_j(x', t')$$

因此后一项积分结果为  $-neA$  为规范项, 当我们讨论量子霍尔效应时略去规范项。而在第一章我们证明了公式  $\beta G^R(\omega) = G^T(\omega_m = -i(\omega + i\eta))$ , 因此我们先转化为求虚时虚频率情况下的格林函数

$$R_{ij}^T(q, \sigma - \sigma') = \langle T[j_i(q, \sigma)j_j(-q, \sigma')] \rangle$$

$$j_i(q, \sigma) = e^{\sigma H} j_i(q) e^{-\sigma H}, j_i(q, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k c_{k+q/2, \alpha}^\dagger(\sigma) \frac{\partial h^{\alpha\beta}(k)}{\partial k_i} c_{k-q/2, \beta}(\sigma)$$

$$R_{ij}^T(q, \sigma) = \sum_{k, p} \frac{\partial h^{\alpha\beta}(k)}{\partial k_i} \frac{\partial h^{\gamma\theta}(p)}{\partial p_i} \langle T[c_{k+q/2, \alpha}(\sigma) c_{k-q/2, \beta}(\sigma) c_{p-q/2, \gamma}^\dagger c_{p+q/2, \theta}^\dagger] \rangle$$

运用 Wick 定理得

$$\begin{aligned} \langle T[c_{k+q/2, \alpha}(\sigma) c_{k-q/2, \beta}(\sigma) c_{p-q/2, \gamma}^\dagger c_{p+q/2, \theta}^\dagger] \rangle &= \langle c_{k+q/2, \alpha}^\dagger(\sigma) c_{p+q/2, \theta} \rangle \langle c_{k-q/2, \beta}(\sigma) c_{p-q/2, \gamma}^\dagger \rangle \\ &= -G^T(k + q/2, \alpha, \sigma) G^T(k - q/2, \beta, -\sigma) \delta_{kp} \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (9)$$

进行傅里叶变换得

$$R_{ij}^T(q, \omega_v) = -\frac{1}{\beta^2 V} \sum_{m, k} Tr \left[ \frac{\partial h(k)}{\partial k_i} G^T(k - \frac{q}{2}, \omega_m + \omega_v) \frac{\partial h(k)}{\partial k_j} G^T(k + \frac{q}{2}, \omega_m) \right]$$

我们用能带平带化思想 [3], 由于将上下能带拉平后, 不改变  $\hat{H} = \sum_i d_i(\sigma_i^-(k)) |i\rangle$  中各  $d_i(k)$  所占比例, 拓扑数不变, 因此我们有

$$E(k) = \epsilon_G P_G(k) + \epsilon_E P_E(k)$$

$$G(i\omega_m, k) = \frac{1}{i\omega_m - E(k)} = \frac{P_G(k)}{i\omega_m - \epsilon_G} + \frac{P_E(k)}{i\omega_m - \epsilon_E}$$

定义  $Q_{ij}(q, i\omega_v \rightarrow \omega + i\eta) \equiv R_{ij}^R(1, \omega) = -\beta(q, \omega_v)$ , 可得

$$Q_{ij}(i\omega_v) = \frac{1}{V\beta} \sum_{k, n} (\epsilon_G - \epsilon_E)^2 Tr \left[ \frac{\partial P_G(k)}{\partial k_i} \left( \frac{P_G(k)}{i(\omega_n + \omega_v) - \epsilon_G} + \frac{P_E(k)}{i(\omega_n + \omega_v) - \epsilon_E} \right) \frac{\partial P_G(k)}{\partial k_j} \left( \frac{P_G(k)}{i\omega_n - \epsilon_G} + \frac{P_E(k)}{i\omega_n - \epsilon_E} \right) \right]$$

根据之前论述的松原频率求和公式

$$\sum_n f(i\omega_n) = \beta \sum_{i(z_i \in \text{non-}y\text{-axis})} \frac{1}{e^{\beta z_i} + 1} Res[A(z), z_i]$$

以及平带化后的能带近似关系  $\frac{1}{e^{\beta\epsilon_E} + 1} = 0, \frac{1}{e^{\beta\epsilon_G} + 1} = 1$  得

$$Q_{ij}(i\omega_v) = -\frac{1}{V} \sum_k -(\epsilon_G - \epsilon_E)^2 Tr \left[ \frac{(\partial_i P_G)(\partial_j) P_E P_E}{\epsilon_G - i\omega_v - \epsilon_E} + \frac{(\partial_i P_G)(\partial_j P_E) P_G}{\epsilon_G + i\omega_v - \epsilon_E} \right]$$

$$Q_{ij}(i\omega_v) = \frac{1}{V} \sum_k -(\epsilon_G - \epsilon_E)^2 \text{Tr} \left[ \frac{(\partial_i P_G)(\partial_j P_E)(\epsilon_G - \epsilon_E + i\omega_v) - 2(\partial_i P_G)(\partial_j P_E)P_G(i\omega_v)}{(-i\omega_v)^2 + (\epsilon_G - \epsilon_E)^2} \right]$$

由于量子霍尔效应系数之前已经证明  $\sigma_{ij}(q, \omega) = \frac{R_{ij}^R(q, \omega)}{i\omega}$ , 并根据量子霍尔效应图像得量子霍尔效应部分系数反对称, 故我们只考虑反对称部分即可

$$Q_{ij}(i\omega_v) = \frac{1}{V} \sum_k (\epsilon_G - \epsilon_E)^2 \text{Tr} [(\partial_i P_G)(\partial_j P_E)P_E \frac{2i\omega_v}{-(i\omega_v)^2 + (\epsilon_G - \epsilon_E)^2}]$$

我们只考虑直流部分  $\omega \rightarrow 0$  得

$$Q_{ij}(\omega \rightarrow 0) = \frac{2\omega}{V} \sum_k \text{Tr} [(\partial_i P_G)(\partial_j P_E)P_E]$$

我们将价带态标号为  $|\alpha, k\rangle$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ), 可得

$$\text{Tr} [(\partial_i P_G)(\partial_j P_G)P_G] = \sum_\alpha \langle \partial_i(\alpha, k) | \partial_j | \alpha, k \rangle + 2 \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha, k | \partial_i | \beta, k \rangle \langle \beta, k | \partial_j | \alpha, k \rangle$$

由于上公式第二项为对称矩阵, 不是量子霍尔效应关心的反对称矩阵, 故我们只保留第一项。可求得量子霍尔电导为

$$\begin{aligned} Q_{ij, Hall} &= \frac{1}{i\omega} \frac{Q_{ij}(\omega) - i \leftrightarrow j}{2} \\ &= \frac{1}{V} \sum_k \sum_{n=1}^m -i [\langle \partial_i(\alpha, k) | \partial_j | \alpha, k \rangle - \langle \partial_j(\alpha, k) | \partial_i | \alpha, k \rangle] \\ &= \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^m -i [\langle \partial_i(\alpha, k) | \partial_j | \alpha, k \rangle - \langle \partial_j(\alpha, k) | \partial_i | \alpha, k \rangle] \end{aligned} \quad (10)$$

## 6 He3 液体的霍尔效应 [6]

对于 He3 费米子液体的 p 波超导, 哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m} \psi_{p,\sigma}^\dagger \psi_{p,\sigma} - (\Delta_p \psi_{p,\uparrow}^\dagger a_{-p,\downarrow}^\dagger + \Delta_p^* \psi_{-p,\downarrow} \psi_{p,\uparrow}) \quad (11)$$

对于 2D p 波超导,  $\Delta_p = p_x + ip_y$ , 定义  $\psi_k = (\psi_\uparrow(k) \psi_\downarrow^\dagger(-k))^T$ ,  $\psi_k^\dagger = (\psi_\uparrow^\dagger(k) \psi_\downarrow(-k))$ , 哈密顿量为

$$H = \begin{bmatrix} p^2/2m - \mu(r) & \frac{\Delta_0}{k_F}(p_x + ip_y) \\ \frac{\Delta_0}{k_F}(p_x - ip_y) & \mu(r) - p^2/2m \end{bmatrix} = \frac{\Delta_0}{k_F}(p_x \tau_1 - p_y \tau_2) + (\frac{p^2}{2m} - \mu(r))\tau_3 \quad (12)$$

我们定义  $\mu_n(x, y) = \mu(x, y) - \frac{\pi^2 n^2}{2a^2}$ , 故此求得电流为

$$j_n = \frac{\theta(\mu_n)}{2h} \vec{l} \times \nabla \mu \quad (13)$$

其中  $\vec{l}$  为单位矢量。可以认为

$$\sigma_{xy} = \frac{\tilde{n}}{2h} \quad (14)$$

其中  $\tilde{n}$  为满足  $\mu_n(x, y) = \mu(x, y) - \frac{\pi^2 n^2}{2a^2}$  一直同号的最大 n

## 7 实空间和扭曲边界条件情形下的量子霍尔电导 [5]

根据公式 4，推广到实空间的多体波函数  $\Phi$ (slater 行列式)，有

$$\sigma_{xy} = \frac{-i\hbar}{A} \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | j_y(x, y, 0) | n \rangle \langle n | j_x(x, y, 0) | 0 \rangle - \langle 0 | j_x(x, y, 0) | n \rangle \langle n | j_y(x, y, 0) | 0 \rangle}{(E_n - E_0)^2} \quad (15)$$

其中电流等于

$$j_x = \sum_{a=1}^{N_{\text{particlenumber}}} j_{xa}, j_y = \sum_{a=1}^{N_{\text{particlenumber}}} j_{ya}$$

$$j_{xa} = e\dot{x}_a = e \frac{\partial H}{\partial p_{x_a}}$$

我们说明当没有无序和相互作用情况，其退化到  $k$  空间和真实结果一致。其多体基态值为

$$E_0 = [E_g(k_x^1, k_y^1) + \cdots + E_g(k_x^{N_x}, k_y^1)] + \cdots + [E_g(k_x^1, k_y^{N_y}) + \cdots + E_g(k_x^{N_x}, k_y^{N_y})]$$

根据公式 15，得只有单粒子激发态对  $\sigma_{xy}$  项有贡献，故激发态式子为

$$E_{n,a,b} = E_0 + E_n(k_x^a, k_y^b) - E_g(k_x^a, k_y^b)$$

故可退化到式 5

下面我们讨论存在无序和相互作用情形。我们发现存在以下规范变换，使得对上式最终结果完全不影响

$$-i\partial_{x_a} \rightarrow -i\partial_{x_a} + \alpha, -i\partial_{y_a} \rightarrow -i\partial_{y_a} + \beta$$

$$H(p_{x_a}, p_{y_a}) \rightarrow H(p_{x_a} + \alpha, p_{y_a} + \beta) = \tilde{H}$$

$$|\psi \rangle \rightarrow e^{-i\alpha(x_1 + \cdots + x_N) - i\beta(y_1 + \cdots + y_N)} |\psi \rangle = |\tilde{\psi} \rangle$$

故有

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} = \frac{\partial H[p_{1x} + \alpha, p_{1y} + \beta; \cdots; p_{Nx} + \alpha, p_{Ny} + \beta]}{\partial \alpha} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_{jx}}$$

故得到结果

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2\hbar}{A} \sum_{n \neq 0} \frac{\langle \tilde{0} | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta} | \tilde{0} \rangle - \langle \tilde{0} | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \beta} | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} | \tilde{0} \rangle}{(E_n - E_0)^2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2\hbar}{A} [\langle \frac{\partial \tilde{0}}{\partial \alpha} | \frac{\partial \tilde{0}}{\partial \beta} \rangle - \langle \frac{\partial \tilde{0}}{\partial \beta} | \frac{\partial \tilde{0}}{\partial \alpha} \rangle]$$

图 1 为扭曲边界条件原理图。将为数不是很多的腔排成一条链，只在最末端耦合系数改为  $Je^{i\phi}$ 。不断调整  $\phi$ ，哈密顿量为

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} a_i^\dagger a_{i+1} - Je^{-i\phi} a_N^\dagger a_1 + h.c. \quad (16)$$

做规范变换

$$a_m = e^{-i\phi/N \cdot m} c_m \quad (17)$$

得能量方程

$$H_k = -2J \cos(k - \phi/N) c_k^\dagger c_k \quad (18)$$

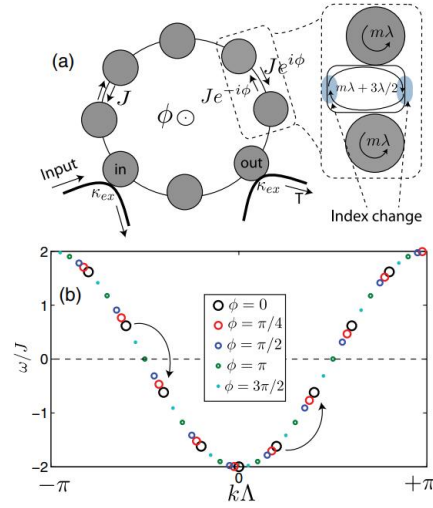


图 1: 将为数不是很多的腔排成一条链, 只在最末端耦合系数改为  $J e^{i\phi}$ 。不断调整  $\phi$ , 发现能量点会发生显著位移。由于  $x$  方向上链格点不是太多,  $k$  比较离散, 图 1 发现调整  $\phi$  能量点会发生显著位移。当  $\phi$  从 0 连续变化到  $2\pi$  时, 能量点复原, 我们可以将这种思想用于边缘态探测

故扭曲边界条件作用是让动量发生平移

$$k_x \rightarrow k_x + \frac{\phi_x}{L_x}, k_y \rightarrow k_y + \frac{\phi_y}{L_y}$$

根据之前规范变换的论述有

$$\alpha = \frac{\phi_x \hbar}{L_x}, \beta = \frac{\phi_y \hbar}{L_y}$$

做重新定义  $\theta = \phi_x, \varphi = \phi_y$ , 有

$$\sigma = \frac{ie^2}{\hbar} [\langle \frac{\partial \psi}{\partial \theta} | \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \rangle - \langle \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} | \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rangle]$$

改做平均值, 有

$$\sigma = \frac{ie^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi} \int \int d\theta \wedge d\varphi [\langle \frac{\partial \psi}{\partial \theta} | \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \rangle - \langle \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} | \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rangle] \quad (19)$$

## 8 推广到分数霍尔效应情形 [5]

分数霍尔效应中基态像液体一样, 电子关联在大尺度上可忽略不计, 因此继续利用相关公式求霍尔电导

$$\sigma = \frac{e^2}{\hbar d} \sum_{K=1}^d \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta d\varphi \frac{1}{2\pi i} [\langle \frac{\partial \phi_K}{\partial \varphi} | \frac{\partial \phi_K}{\partial \theta} \rangle - \langle \frac{\partial \phi_K}{\partial \theta} | \frac{\partial \phi_K}{\partial \varphi} \rangle] \quad (20)$$

其中  $d$  为基态简并, 就像 Laughlin 波函数  $(z_i - z_j)^d e^{-|z_i|^2/4}$  有  $d$  重简并一样。暂时得出

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{d \times \hbar} \quad (21)$$

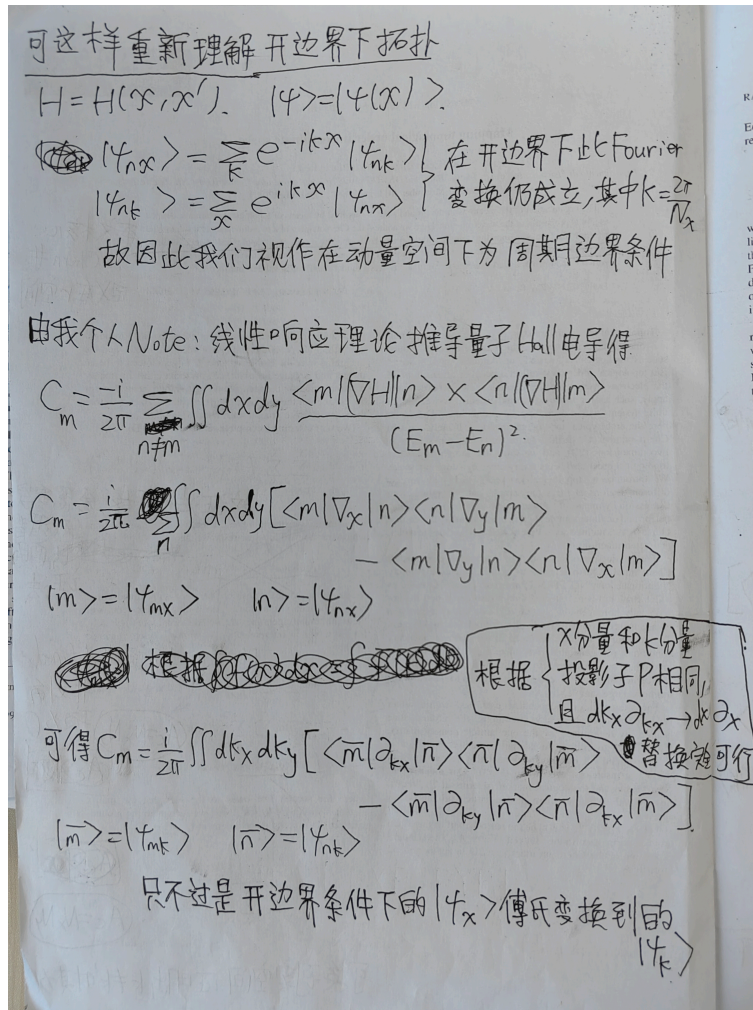


图 2: Local Chern Marker 的推导, 图片 1[7]

## 9 其余表征拓扑数的方法

### 9.1 Local Chern Marker 的计算 (待完善)

如图 2、图 3 为用我自己话叙述的详细推导, 主要参考文献 [7]

### 9.2 Layer-Resolved Chern Number 的计算 [8, 9]

如图 4 所示

由于  $\hat{r}|u_{nk}\rangle = \sum_{r'} \hat{r}|u_{nr'}\rangle e^{-ikr'}$

$$= \sum_{r'} |u_{nr'}\rangle (+i\partial_k)(e^{-ikr'})$$

$$= (i\partial_k) \left( \sum_{r'} |u_{nr'}\rangle e^{-ikr'} \right)$$

$$= i\partial_k |u_{nk}\rangle$$

故可约化为本文 Eq 4

$$C = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{n'=N_c+1}^{+\infty} \int_{BZ} dk \langle \psi_{nk} | x | \psi_{n'k} \rangle \langle \psi_{n'k} | y | \psi_{nk} \rangle$$

(本文 Eq 4)

|| 为什么

$$C = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{n'=N_c+1}^{+\infty} \int_{BZ} \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^2} \langle \psi_{nk} | x | \psi_{n'k'} \rangle \langle \psi_{n'k'} | y | \psi_{nk} \rangle$$

这还得从线性响应理论推导量子 Hall 效应说起

$$C = \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_{n \neq m} \iint dx dy [ \langle m | \nabla_x | n \rangle \langle n | \nabla_y | m \rangle - \langle m | \nabla_y | n \rangle \langle n | \nabla_x | m \rangle ]$$

$$= \frac{i}{2\pi} \text{tr}_{\text{cell}} [ P_{\text{occ}} \sum |dn\rangle \wedge \langle dn| ]$$

$$= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left( \sum_{n=1}^{N_c} \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \right) \left( \sum_{n'=N_c+1}^{+\infty} \int_{BZ} \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \langle \psi_{nk} | x | \psi_{n'k'} \rangle \times \langle \psi_{n'k'} | y | \psi_{nk} \rangle \right)$$

↓                      ↓  
投影到 P<sub>occ</sub>      投影到 I-P<sub>occ</sub>

故:  $C = \frac{-2\pi i}{N_x N_y} \text{tr}_{\text{cell}} [ PXP, PYP ]$

由于  $\hat{r}|u_{nk}\rangle = i\partial_k |u_{nk}\rangle$ , 故对周期边界情形下

约化为  $C = +2\pi i \text{tr} [ P\partial_{k_x} P, P\partial_{k_y} P ]$

图 3: Local Chern Marker 的推导, 图片 2[7]

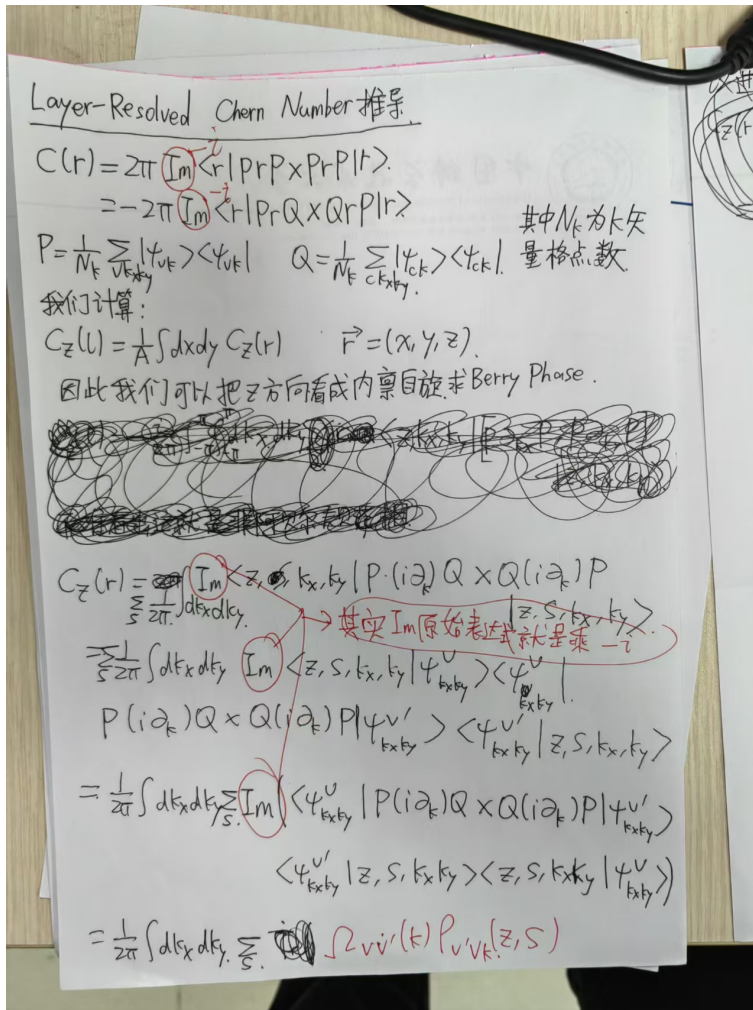


图 4: Layer-resolved Chern marker 的推导 [8, 9]

## 10 附录

### 10.1 IQHE 的波函数

未受电场微扰情况下有

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}$$

定义  $\Pi_x = p_x - eA_x, \Pi_y = p_y - eA_y$ , 当  $B > 0$  时定义产生湮灭算符如下

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar eB}}(\Pi_x + i\Pi_y), b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar eB}}(\Pi_x - i\Pi_y)$$

故哈密顿量可量子化为

$$H = \frac{\hbar eB}{m}(b^\dagger b + \frac{1}{2})$$

我们先求最低能级波函数

$$b|\psi\rangle = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\hbar eB}}[-i\hbar(\partial_x + i\partial_y) - \frac{ieB}{2}(x + iy)]|\psi\rangle = 0$$

根据多变量微积分相关公式

$$f(x, y) = f(x + iy, x - iy) = f(z, \bar{z})$$

故最低态朗道能级关系式可写作

$$\frac{-2i\hbar}{\sqrt{2\hbar eB}}[\partial_{\bar{z}} + \frac{eB}{4\hbar}z]|\psi(z, \bar{z})\rangle = 0$$

故归一化后最低朗道能级波函数为

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{\frac{eB}{2\pi\hbar}} e^{-\frac{eB}{4\hbar}z\bar{z}}$$

做变换  $z \rightarrow \sqrt{\frac{eB}{4\hbar}}z$ , 可得最低一级朗道能级波函数满足

$$(\partial_{\bar{z}} + \frac{1}{4}z)|\psi(z, \bar{z})\rangle = 0 \quad (22)$$

故最低态朗道能级波函数形式为

$$\psi \propto \left(\sum_m A_m z^m\right) e^{-1/4z\bar{z}} \quad (23)$$

整数量子霍尔效应的多体波函数

$$\Psi_N = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_N & z_N^2 & \cdots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} \exp\left[-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)\right] = \prod_{i>j} (z_i - z_j) \exp\left[-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)\right] \quad (24)$$

## 11 参考文献

### 参考文献

- [1] David Tong 课程讲义, 课程: Quantum Hall Effect



- [2] 《Topological Insulators And Topological Superconductors》 B.Andrei Bernevig,Taylor L.Hughes
- [3] Topological field theory of time-reversal invariant insulators.Xiao-Liang Qi,Taylor L.Hughes,and Shou-Cheng Zhang
- [4] 《量子多体理论》 文小刚著
- [5] Quantized Hall conductance as a topological invariant.Qian Niu,D.J.Thouless,and Yong-Shi Wu.Physical Review B,vol 31,page 3372-3377(1985)
- [6] Quantized Hall Effect in superfluid He-3 Film.
- [7] Mapping topological order in coordinate space.PRB 84,241106(2011)
- [8] Surfaces of axion insulators.PRB 98,245117(2018)
- [9] Spin-resolved topology and partial axion angles in three-dimensional insulators.Nature Communications.15:550(2024)