1(12) 有界 $u_t=u_{xx}+\sin 2x$: 叠加思想 $u=v+w$,

分离变量法 + 特解法$v=\sin 2x/4$ 或齐次化原理

$$u=\frac{\sin 2x}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi \sin nx\, dx\right)e^{-n^2t}\sin nx-\frac{e^{-4t}\sin 2x}{4}$$

2(13) 无界 $u_{tt}=16u_{xx}+3\cos 3x+\cos t$, $u|_{t=0}=x$, $u_t|_{t=0}=1+x^2$:

$u=v+w$ 特解 $v=-\cos t+\cos 3x/48$, 用达朗贝尔行波解

$$u=1+x+t+x^2t+\frac{16}{3}t^3-\cos t-\frac{1}{48}\cos 3x\cos 12t+\frac{1}{48}\cos 3x$$

3(15) 无界 $u_t=u_{xx}+u_x+u$, $u|_{t=0}=\delta(x)$:

傅里叶积分变换法 + Dirac Delta 函数筛选性

$$u=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x+t)^2}{4t}+t}$$

4(15) 有界 球坐标 $1<r<2$, $u|_{r=1}=1$, $u|_{r=2}=2\cos^2\theta$:

球壳问题，轴对称 $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_nr^n+b_nr^{-(n+1)})P_n(\cos\theta)$

$a_0+b_0=1$, $a_2+b_2=0$, $\frac{3}{2}\left(4a_2+\frac{1}{8}b_2\right)=2$, $a_0+\frac{1}{2}b_0-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3/2}\right)=0$

$$u=\frac{1}{3}+\frac{2}{3r}+\frac{32}{93}(r^2-r^{-3})P_2(\cos\theta)$$

5(15) 有界 $u_{tt}=\Delta_2 u$, $u|_{r=1}=0$, $u|_{t=0}=1-r^2$, $u_t|_{t=0}=0$:

极坐标问题等同于无限长柱问题，轴对称

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}(C_n\cos\omega_nt+D_n\sin\omega_nt)J_0(\omega_nr)$$

$$u=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{\omega_n^3J_1(\omega_n)}\sin\omega_ntJ_0(\omega_nr)$$ ω_n是第 n 正根

6(15) 关于 x=1 平面的镜像法:

镜像点在(**2-ξ**, η, ζ), $G=1/4\pi r(M,M_0)-1/4\pi r(M,M_1)$

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(\eta,\zeta)(x-1)}{[(x-1)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

7(7)

$\int_{-1}^{1}P_5P_2(P_1+2P_3+3P_4)dx$

正交性丢弃 $P_5P_2P_1$ 奇偶丢弃 $P_5P_2P_4$

$P_5P_2P_3$ *由正交只需算*$2P_2P_3$*领头项是多少* x^5,

对应多少 P_5*的领头项* $2P_2P_3=bx^5+\cdots=cP_5+\cdots$

$2\cdot\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\right)\div\frac{63}{8}\times\|P_5\|^2=2\cdot\frac{10}{21}\times\frac{2}{2\times5+1}=\frac{40}{231}$

8(8) 活用叠加原理 $u=\mathbf{u_1+u_2+u_3}$, 每问题带且只带走一个方向

$$\begin{cases}\Delta_3u_1=0,\ 0<x,y,z<1,\\ u_1|_{x=0}=\sin(4\pi y)\sin(3\pi z),u_1|_{x=1}=\sin(3\pi y)\sin(4\pi z),\\ u_1|_{y=0}=0,u_1|_{y=1}=0,\\ u_1|_{z=0}=0,u_1|_{z=1}=0.\end{cases}$$

$u_1=(\mathrm{ch}5\pi x-\coth 5\pi\ \mathrm{sh}5\pi x)\sin4\pi y\sin3\pi z+(\mathrm{sh}5\pi x/\mathrm{sh}5\pi)\sin3\pi y\sin4\pi z$

是仅投影在二元基的两种基上; yzx 字母轮换可得 u_2, u_3