



# 微分方程笔记

作者：吕浩哲 (Lucas Shen)

时间：January 6, 2023

封面：<https://www.pixiv.net/artworks/100631860>

# 目录

<b>第 1 章 课程介绍与基本概念</b>	<b>1</b>
<b>第 2 章 一阶线性微分方程</b>	<b>2</b>
2.1 恰当方程 . . . . .	2
2.2 可分离变量方程 . . . . .	3
2.3 一阶线性微分方程 . . . . .	5
2.4 几类重要的 ODE . . . . .	7
2.4.1 齐次方程 . . . . .	7
2.4.2 Bernoulli 方程 . . . . .	8
2.4.3 Riccati 方程 . . . . .	9
2.4.4 Gronwall 不等式 . . . . .	9
2.5 一阶隐式方程 . . . . .	10
2.5.1 微分法 . . . . .	10
2.5.2 参数法 . . . . .	12
<b>第 3 章 微分方程的定性理论</b>	<b>14</b>
3.1 Picard 存在唯一性定理 . . . . .	14
3.2 解的延伸 . . . . .	17
<b>第 4 章 幂级数解法</b>	<b>22</b>
4.1 Cauchy 定理 . . . . .	22
4.2 幂级数解法 . . . . .	24
4.3 广义幂级数解法 . . . . .	26
<b>第 5 章 高阶微分方程</b>	<b>31</b>
5.1 解对初值和参数的连续依赖性 . . . . .	32
5.2 解对参数的连续可微性 . . . . .	35
<b>第 6 章 线性微分方程组</b>	<b>37</b>
6.1 一般理论 . . . . .	37
6.1.1 齐次线性微分方程组 . . . . .	37
6.1.2 非齐次线性微分方程组 . . . . .	40
6.2 常系数线性微分方程组 . . . . .	40
6.2.1 常系数线性微分方程组解的描述 . . . . .	41
6.2.2 利用 Jordan 标准型求基解矩阵 . . . . .	43
6.2.3 复根的实化 . . . . .	43
6.3 高阶线性微分方程 . . . . .	44
6.3.1 高阶线性微分方程组的一般理论 . . . . .	44
6.3.2 常系数高阶线性微分方程 . . . . .	46
<b>第 7 章 定性理论与分支理论初步</b>	<b>49</b>
7.1 动力系统, 相空间与轨线 . . . . .	49
7.1.1 动力系统的性质 . . . . .	50

7.2	解的稳定性 . . . . .	51
7.2.1	Lyapunov 稳定性 . . . . .	51
7.2.2	线性近似方法 . . . . .	52
7.2.3	Lyapunov 第二方法 . . . . .	53
7.3	平面动力系统 . . . . .	57
7.3.1	平面线性动力系统 . . . . .	58
7.3.2	nullcline 方法 . . . . .	62
<b>第 8 章</b>	<b>波动方程</b>	<b>64</b>
8.1	一阶偏微分方程 . . . . .	64
8.2	波动方程 . . . . .	65
8.2.1	问题的简化 . . . . .	65
8.2.2	一维初值问题 . . . . .	67
8.2.3	一维半无界问题 . . . . .	69
8.2.4	三维初值问题 . . . . .	70
8.2.5	二维初值问题 . . . . .	72
8.2.6	能量估计 . . . . .	73
8.3	混合问题 . . . . .	77
8.3.1	Sturm-Liouville 问题 . . . . .	77
8.3.2	分离变量法 . . . . .	78
<b>第 9 章</b>	<b>位势方程</b>	<b>83</b>
9.1	调和函数 . . . . .	83
9.2	基本解与 Green 函数 . . . . .	88
9.2.1	Green 函数 . . . . .	89
9.3	极值原理与最大模估计 . . . . .	91
9.3.1	极值原理 . . . . .	91
9.3.2	最大模估计 . . . . .	94
<b>第 10 章</b>	<b>热传导方程</b>	<b>97</b>
10.1	初值问题 . . . . .	97
10.1.1	Fouier 变换回顾 . . . . .	97
10.2	极值原理与最大模估计 . . . . .	101
10.2.1	最大模估计 . . . . .	102
10.2.2	能量估计 . . . . .	104

## 第1章 课程介绍与基本概念

(常) 微分方程在现实生活中有很多应用, 下举二例:

**例 1.1** 传染病模型 (SIR):

设  $S(t)$  易感,  $I(t)$  已感,  $R(t)$  康复, 则

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ R'(t) = \nu I(t) \\ (S(t) + R(t) + I(t))' = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\implies \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = -\nu I(t) + \beta S(t)I(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

**例 1.2** 捕食模型:

设  $x(t)$  狐狸,  $y(t)$  兔子

$$\begin{cases} x'(t) = -kx(t)(a - by(t)) = -x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(c - dx(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

目标: 描述方程的解

1. 给出解析表达式;
2. 若不能, 则对解的行为进行描述;

方法: 对不同类型的方程使用不同的方法:

### 定义 1.1

含未知函数  $y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)$  的等式

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0 \quad (1.4)$$

称为常微分方程, 出现  $y(x)$  的导数的最高阶数  $n$  称为方程的阶数.

### 定义 1.2

设  $y = \varphi(x)$  在区间  $J$  连续, 且有直到  $n$  阶导数, 并在  $J$  上满足 1.4, 则称  $y = \varphi(x)$  是方程 1.4 的解.

### 定义 1.3


若 1.4 中的  $F$  对  $y$  及其导数是线性的, 则称 1.4 为线性微分方程.

## 第2章 一阶线性微分方程

考虑方程

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad (2.1)$$

其中  $p, q$  在  $I = (a, b)$  连续. 若  $q(x) = 0$ , 则称之为齐次方程.

 **笔记** 研究非齐次微分方程前, 先研究齐次方程.

齐次方程有

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (2.2)$$

$$\implies \frac{1}{y}dy + p(x)dx = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{齐次方程} \longleftarrow \text{可分离变量} \longleftarrow \text{恰当方程} \quad (2.4)$$

故本章先讨论恰当方程, 再用恰当方程的解法来解可分离变量方程, 再用可分离变量方程解齐次方程.

### 2.1 恰当方程

#### 定义 2.1

考虑一阶常微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (2.5)$$

若存在可微函数  $\Phi(x, y)$ , 满足

$$d\Phi(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (2.6)$$

则称 2.5 为恰当方程. 其解为<sup>1</sup> ( $C \in \mathbb{R}$ )

$$\Phi(x, y) = C. \quad (2.7)$$

#### 定理 2.1

设  $P(x, y), Q(x, y)$  在区域  $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$  连续, 且有连续的一阶偏导数  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 则 2.5 为恰当方程的充要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.8)$$

在  $R$  上恒成立, 且方程的通解为

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C \quad (2.9)$$

或

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C \quad (2.10)$$

**证明** 必要性,

由于 2.5 恰当, 则存在  $\Phi(x, y)$ , 满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y) \quad (2.11)$$

<sup>1</sup>可以反解出  $y = u(x)$  或  $x = v(y)$ .

$$\implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

由于  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  连续, 故

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.13)$$

$$\implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.14)$$

充分性.

令

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \psi(y) \quad (2.15)$$

显然  $\Phi$  满足  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$ . 由于

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \psi'(y) \quad (2.16)$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \psi'(y) \quad (2.17)$$

$$= Q(x, y) - Q(x_0, y) + \psi'(y) \quad (2.18)$$


故令  $\psi'(y) = Q(x_0, y)$ , 则

$$\psi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (2.19)$$

故已有

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy, \quad (2.20)$$

即2.5恰当, 通解即得.

 **笔记** 这里只需要求  $\Phi(x, y)$  满足  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$ , 而这样的  $\Phi$  有

$$\Phi(x, y) - \Phi(x_0, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx. \quad (2.21)$$

故考虑设出  $\Phi$ , 待定剩余部分,

### 命题 2.1

设  $p(x), q(y)$  在区域  $I$  连续可微, 则方程

$$p(x)dx + q(y)dy = 0 \quad (2.22)$$

是恰当的, 通解为

$$\int_{x_0}^x p(x)dx + \int_{y_0}^y q(y)dy = C. \quad (2.23)$$

## 2.2 可分离变量方程

### 定义 2.2

若方程2.5形如

$$X(x)Y_1(y)dx + X_1(x)Y(y)dy = 0 \quad (2.24)$$

则称为可分离变量方程.



对上述方程, 若  $X(x), Y(y) \neq 0$ , 则可转化为可恰当方程

$$\frac{X(x)}{X_1(x)} dx + \frac{Y(y)}{Y_1(y)} dy = 0 \quad (2.25)$$

通解为

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)} dx + \int \frac{Y(y)}{Y_1(y)} dy = C \quad (2.26)$$

**例 2.1** 求解  $y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ .

**解** Case 1.  $y = 0$  为特解 Case 2.  $y \neq 0$  时, 有

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} dy = \frac{3}{2} dx \quad (2.27)$$

可得通解为:

$$y^{\frac{3}{2}} = x + C. \quad (2.28)$$

**注** 从上例可知以下事实:

1. 一般称通解为含常数  $C$  的解, 即通解  $\neq$  所有解.
2. 将通解与特解合并, 也未必就是所有的解, 比如上例中的通解与特解如图

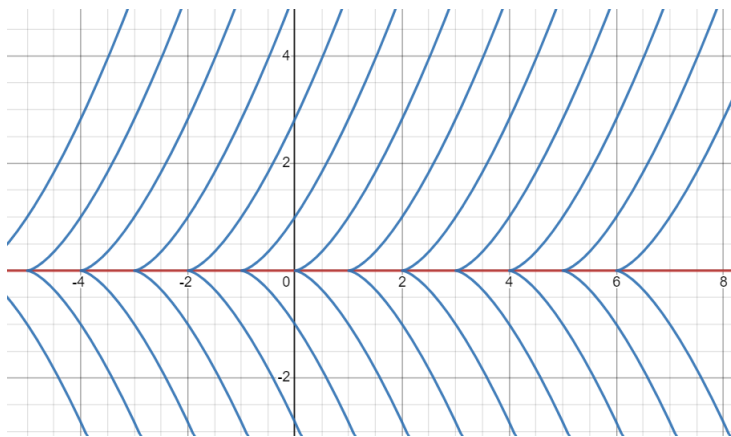


图 2.1: 通解与特解

而若将其中某几段曲线拼接, 仍然是方程的解.

**例 2.2** 求解方程

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0. \quad (2.29)$$

**解** 考虑特解:  $y = \pm 1, x = 0$ .

$$\frac{x^2 + 1}{x} dx + \frac{y}{y^2 - 1} dy = 0 \quad (2.30)$$

$$\implies \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| = C \quad (2.31)$$

$$\implies x^2 + \ln x^2 + \ln|y^2 - 1| = C \quad (2.32)$$

$$\implies x^2 |y^2 - 1| e^{x^2} = e^C \quad (2.33)$$

$$\implies y^2 - 1 = Cx^2 e^{x^2} \quad (2.34)$$

故通解为  $y^2 - 1 = Cx^2 e^{x^2} (C \in \mathbb{R})$ , 特解  $x = 0$ .

从上面的过程可以看出, 特解有时候可以被合并到通解中.

## 2.3 一阶线性微分方程

为考虑方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), p(x), q(x) \in C(a, b), \quad (2.35)$$

先考虑

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, p(x) \in C(a, b). \quad (2.36)$$

**问题 2.1** 设  $p(x) \in C(a, b)$ , 解方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \quad (2.37)$$

**解**

1.  $y = 0$  为特解.
2.  $y \neq 0$ .

$$\frac{1}{y} dy + p(x) dx = 0 \quad (2.38)$$

$$\implies \ln |y| + \int p(x) dx = C \quad (2.39)$$

$$\implies y = C e^{-\int p(x) dx} (C \in \mathbb{R}) \quad (2.40)$$

可以看出, 一阶齐次线性微分方程的解具有很简单的形式, 从上面的结果可以看出, 它们仅差一个常数倍. 实际上, 上面的式子中常数  $C$  控制积分曲线的“大小”, 指数项控制解的“形状”.

为了回过头来考虑非齐次方程, 可以做如下猜测:

当  $q(x)$  非常小时, 非齐次方程的解近似为其次方程的解, 即二者“形状”大致相同, 在“大小”上每一点有不同的伸缩量, 故猜想非齐次方程的解形如

$$y = C(x) e^{-\int p(x) dx}, \quad (2.41)$$

将我们的猜想带入方程 2.35, 得到

$$(C'(x) + C(x)(-p(x))) e^{-\int p(x) dx} + p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx} = q(x) \quad (2.42)$$

$$\implies C'(x) = q(x) e^{\int p(x) dx} \quad (2.43)$$

$$\implies C(x) = C + \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{s_0}^s p(t) dt} ds \quad (2.44)$$

因此猜想是正确的, 得到非齐次方程的解为

$$y(x) = C(x) e^{-\int p(x) dx} \quad (2.45)$$

$$= e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \left( C + \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{s_0}^s p(t) dt} ds \right) \quad (2.46)$$

$$= C e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_s^x p(t) dt} ds. \quad (2.47)$$

特别地, 如果  $y(x_0) = y_0$ , 则  $C = y_0$ , 即

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_s^x p(t) dt} ds. \quad (2.48)$$

这种将常数  $C$  变为受  $x$  影响的函数  $C(x)$  的方法, 称为**常数变易法**.

**例 2.3** 求解方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 (x \neq 0). \quad (2.49)$$

**解** 分以下两种情况讨论

1.  $x > 0$ . 解齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \quad (2.50)$$



得

$$y = e^{-\int \frac{1}{s} ds} = \frac{C}{x}. \quad (2.51)$$

令原方程解为  $y = \frac{C(x)}{x}$ , 得

$$C'(x) = x^4, \quad C(x) = \frac{1}{5}x^5 + C \quad (2.52)$$

通解为

$$y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x} (C \in \mathbb{R}). \quad (2.53)$$

2.  $x < 0$ . 同理可得, 通解形式相同.

### 命题 2.2

齐次方程 2.36 的解或恒为 0, 或恒不为 0.

**证明** 设  $y(x)$  为方程的通解, 则

$$\frac{d}{dx} \left( y(x) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} \right) = (y'(x) + p(x)y) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} = 0 \quad (2.54)$$

若存在  $x_0$  使得  $y(x_0) = 0$ , 则

$$y(x) e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} = 0 \quad (2.55)$$

由于  $p(x)$  在  $(a, b)$  连续, 故在  $(x_0, x)$  上的积分有限,

$$\implies y(x) \equiv 0. \quad (2.56)$$

反正也可证明, 齐次方程的解可能恒不为 0.

### 命题 2.3

给定初值, 线性方程 2.35 的解存在且唯一.

**证明** 根据通解公式, 解的存在性得证. 只需证明唯一性. 若不然, 设方程有两个解  $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ , 令  $\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ , 则

$$\psi'(x) = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) = -p(x)\psi(x) \quad (2.57)$$

$$\psi(x_0) = \varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = 0 \quad (2.58)$$

$$(2.59)$$

即  $\psi(x)$  是方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, y(x_0) = 0 \quad (2.60)$$

的解, 由命题 2.2 可知,  $\psi(x) \equiv 0$ , 故  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

**例 2.4** 设方程

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x), \quad (2.61)$$

$a > 0$  为常数,  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的连续函数, 求  $2\pi$  周期解.

**证明** 题中方程为一阶线性微分方程, 其通解为:

$$y(x) = Ce^{-ax} + \int_0^x f(s)e^{-a(x-s)} ds. \quad (2.62)$$

须求  $y(x)$  满足  $y(x) = y(x + 2\pi)$ . 令  $u(x) = y(x) - y(x + 2\pi)$ , 则有

$$u'(x) + au = 0. \quad (2.63)$$

根据 2.2,  $u(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \exists x_0, u(x_0) = 0$ . 故只需保证  $u(0) = 0, y(0) = y(2\pi)$  即可.

$$\implies C = \frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} \int_0^{2\pi} f(s)e^{as} ds = \frac{1}{e^{2\pi a} - 1} \int_0^{2\pi} f(s)e^{as} ds. \quad (2.64)$$

故解为

$$y(x) = \frac{1}{e^{2\pi a} - 1} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-a(x-s)} ds + \int_0^x f(s)e^{-a(x-s)} ds. \quad (2.65)$$

注 这里教材中答案有误.

## 2.4 几类重要的 ODE

### 2.4.1 齐次方程

#### 定义 2.3

若微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.66)$$

中  $P(x, y), Q(x, y)$  都是  $x, y$  的同次 ( $m$  次) 齐次函数, 即

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y). \quad (2.67)$$

则称这样的方程为齐次方程.



注 齐次方程有这样的等价定义:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.68)$$

对于这样的方程, 可以设  $y = ux$ , 就有

$$dy - udx + xdu \quad (2.69)$$

$$\implies P(x, ux)dx + Q(x, ux)(udx + xdu) = 0 \quad (2.70)$$

$$\implies x^m(P(1, u) + uQ(1, u))dx + x^{m+1}Q(1, u)du = 0 \quad (2.71)$$

$$\implies (P(1, u) + uQ(1, u))dx + xQ(1, u)du = 0 \quad (2.72)$$

即转化为可分离变量方程.

#### 例 2.5 解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}. \quad (2.73)$$

解 令  $y = ux$ , 得到

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{1+u}{1-u} \quad (2.74)$$

$$\iff \frac{1-u^2}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}. \quad (2.75)$$

积分可得

$$\arctan u - \ln \sqrt{1+u^2} = \ln |x| - \ln C \quad (2.76)$$

$$\implies |x| \sqrt{1+u^2} = Ce^{\arctan u} (C \in \mathbb{R}_+) \quad (2.77)$$

$$\implies \sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctan \frac{y}{x}}. \quad (2.78)$$

如果采用极坐标  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 方程的解有更简单的形式

$$r = Ce^\theta. \quad (2.79)$$

例 2.6 讨论形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + l}\right). \quad (2.80)$$

的微分方程.

解

1.  $c = l = 0$ . 此时方程为齐次方程.
2.  $c, l$  不全为 0. 令

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta, \end{cases} \quad (2.81)$$

其中  $\alpha, \beta$  为常数, 方程化为

$$\frac{d\xi}{d\eta} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{m\xi + n\eta + m\alpha + n\beta + l}\right) \quad (2.82)$$

- (a). 若  $\Delta = an - bm \neq 0$ , 则方程

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ m\alpha + n\beta + l = 0. \end{cases} \quad (2.83)$$

有解  $\alpha, \beta$ , 使原方程化为齐次方程.

- (b). 若  $\Delta = an - bm = 0$ , 则设  $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \lambda$ , 则原方程化为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + l}\right). \quad (2.84)$$

对此作还原  $v = ax + by$ , 则方程化为可分离变量方程

$$\frac{dv}{dx} = a + bf\left(\frac{v + c}{\lambda v + l}\right). \quad (2.85)$$

## 2.4.2 Bernoulli 方程

### 定义 2.4

有如下形式的方程称为 Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \quad (2.86)$$

其中  $p, q \in C(I), n \neq 1$ .



下面讨论 Bernoulli 方程的解法.

解

1.  $y \equiv 0$  是方程的特解.
2. 若  $y \neq 0$ . 作如下变换

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad (2.87)$$

$$\implies \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \quad (2.88)$$

$$\implies \frac{1}{1-n} \frac{dy^{1-n}}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \quad (2.89)$$

$$\implies \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x) \quad (\text{令 } z = y^{1-n}) \quad (2.90)$$

$$(2.91)$$

即方程化为一阶线性微分方程.

## 2.4.3 Riccati 方程

## 定义 2.5

有如下形式的方程称为 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x). \quad (2.92)$$

其中  $p, q, r \in C(I), p(x) \neq 0$ .



Riccati 方程是形式上最简单的一类微分方程，但不能用初等积分法求解，但是可以使用初等变换，在一定条件下求解，考虑如下问题：

**问题 2.2** 设方程 2.92 有特解  $\varphi(x)$ ，试求其通解  $y(x)$ 。

**解** 设  $y(x) = \varphi(x) + u(x)$ ，则

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.93)$$

$$= [p(x)(\varphi(x) + u)^2 + q(x)(\varphi(x) + u) + r(x)] - [p(x)\varphi(x)^2 + q(x)\varphi(x) + r(x)] \quad (2.94)$$

$$= p(x)u^2 + 2p(x)\varphi u + q(x)u \quad (2.95)$$

$$= p(x)u^2 + (2p(x)\varphi(x) + q)u \quad (2.96)$$

即方程化为 Bernoulli 方程。

**例 2.7** 解方程

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^{-2}. \quad (2.97)$$

**解** 易知， $y \neq 0$ ，故原方程可化为

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + a = b \frac{1}{x^2 y^2} \quad (2.98)$$

令  $z = \frac{1}{y}$ ，方程化为

$$-\frac{dz}{dx} + a = b \frac{z^2}{x^2} \quad (2.99)$$

方程化为齐次方程，再令  $z = ux$ ，可得

$$u + x \frac{du}{dx} = a - bu^2. \quad (2.100)$$

## 2.4.4 Gronwall 不等式

## 定理 2.2 (Gronwall 不等式)

令  $K \geq 0$  为常数， $f(x), g(x)$  为  $[\alpha, \beta]$  上得连续非负函数，且

$$f(x) \leq K + \int_{\alpha}^x f(s)g(s)ds \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \quad (2.101)$$

则有

$$f(x) \leq Ke^{\int_{\alpha}^x g(s)ds} \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \quad (2.102)$$



**证明** 令  $A(x) = K + \int_{\alpha}^x f(s)g(s)ds$ ，则

$$A'(x) = f(x)g(x) \leq g(x)A(x) \quad (2.103)$$

$$\iff A'(x) - g(x)A(x) \leq 0 \quad (2.104)$$

$$\implies (A(x)e^{-\int_{\alpha}^x g(s)ds})' \leq 0 \quad (2.105)$$

$$\implies A(x)e^{-\int_{\alpha}^x g(s)ds} \leq f(\alpha) = K \quad (2.106)$$

$$\implies f(x) \leq A(x) \quad (2.107)$$

$$\leq K e^{\int_{\alpha}^x g(s) ds} \quad (2.108)$$

### 定理 2.3 (Gronwall 不等式 (微分形式))

设  $f(x) \in C^1([\alpha, \beta])$  非负,  $g(x) \in C([\alpha, \beta])$  且

$$\frac{df}{dx} \leq g(x)f(x), \quad (2.109)$$

则有

$$f(x) \leq f(\alpha) e^{\int_{\alpha}^x g(s) ds}. \quad (2.110)$$

**证明** 证明是类似的.

$$\left( f(x) e^{-\int_{\alpha}^x g(s) ds} \right)' \leq 0 \quad (2.111)$$

$$\implies f(x) e^{-\int_{\alpha}^x g(s) ds} \leq f(\alpha) \quad (2.112)$$

$$\implies f(x) \leq f(\alpha) e^{\int_{\alpha}^x g(s) ds} \quad (2.113)$$

## 2.5 一阶隐式方程

**注** 这一节是原书第四章内容.

在实际问题中, 微分方程并不都能恰好有

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.114)$$

的形式, 因此要考虑更普适的情况.

### 定义 2.6

一阶隐式方程形如

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (2.115)$$

### 2.5.1 微分法

若方程 2.115 可解出

$$y = f(x, p) \quad (2.116)$$

其中  $p = y'$ , 对上式微分

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} \quad (2.117)$$

$$\implies (\partial_x f(x, p) - p) dx + \partial_p f(x, p) dp = 0 \quad (2.118)$$

1. 若 2.118 可解出通解  $p = u(x, C)$  (或特解  $p = w(x)$ ), 则 2.116 有通解  $y = f(x, u(x, C))$  (或特解  $y = f(x, w(x))$ ).
2. 若 2.118 可解出通解  $x = v(p, C)$  (或特解  $x = z(p)$ ), 则 2.116 有通解 (或特解)

$$\begin{cases} x = v(p, C), \\ y = f(v(p, C), p), \end{cases} \quad \begin{cases} x = z(p), \\ y = f(z(p), p). \end{cases} \quad (2.119)$$

这里  $p$  视为参数.

**例 2.8** 考虑克莱罗方程

$$y = xp + f(p), \quad (2.120)$$

其中  $p = y'$ ,  $f''(p) \neq 0$ .

**解** 做微分得

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + f'(p) \frac{dp}{dx} \quad (2.121)$$

$$\implies (x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0 \quad (2.122)$$

1.  $\frac{dp}{dx} = 0$ ,  $p(x) \equiv C$ . 此时有通解

$$y = Cx + f(C). \quad (2.123)$$

2.  $x + f'(p) = 0$ , 即  $x = -f'(p) = w(p)$ , 解得

$$\begin{cases} x = -f'(p), \\ y = -pf'(p) + f(p). \end{cases} \quad (2.124)$$

有时, 微分方程的特解可以包含在通解当中, 对克莱罗方程, 也有这样的问题

**问题 2.3** 克莱罗方程中, 特解是否由通解给出?

**例 2.9** 考虑当  $f(p) = -\frac{1}{4}p^2$  时的克莱罗方程.

易知, 通解为  $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ , 特解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}p \\ y = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2. \end{cases} \quad (2.125)$$

也即  $y = x^2$ .

显然, 在上述例子中通解并不包含特解.

**注** 事实上, 上例中特解与通解在图形上有如下关系

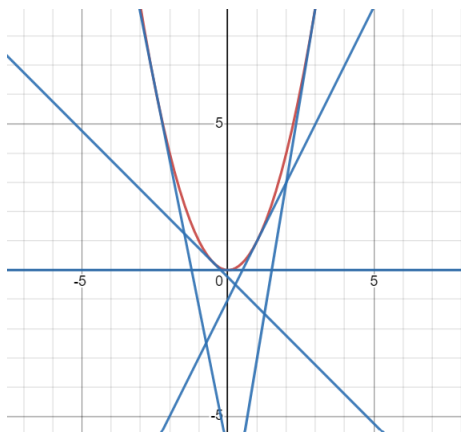


图 2.2: 通解与特解的几何关系

下面来对一般情形进行证明.

**证明** 特解为  $x = -f'(p)$ , 由于  $f''(p) \neq 0$ , 由逆映射定理<sup>2</sup>, 可反解出  $p = w(x)$ , 代入上面的通解得

$$y = xw(x) + f(w(x)) \quad (2.126)$$

$$\implies y' = w(x) + xw'(x) + f'(w(x))w'(x) \quad (2.127)$$

$$= w(x) + w'(x)(x + f'(w(x))) \quad (2.128)$$

$$= w(x) \quad (2.129)$$



而

$$x = -f'(w(x)) \quad (2.130)$$

$$\implies 1 = -f''(w(x))w'(x) \quad (2.131)$$

$$\implies w'(x) \neq 0 \quad (2.132)$$

$$\implies y' = w(x) \neq \text{Const} \quad (2.133)$$

故特解不为线性式，即通解不包含特解。

## 2.5.2 参数法

1. 设方程不显含自变量  $x$ ，形如

$$F(y, p) = 0, p = \frac{dy}{dx} \quad (2.134)$$

则设  $p = h(t), y = g(t)$ ，有

$$dx = \frac{1}{p} dy \quad (2.135)$$

$$\implies x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + C \quad (2.136)$$

**例 2.10** 求解方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1. \quad (2.137)$$

**证明**

1.  $p \equiv 0$ ，此时  $y \equiv \pm 1$  为特解。
2.  $p \neq 0$ ，设  $y = \cos t, p = \sin t$ ，则

$$x = \int \frac{-\sin t}{\sin t} dt + C = -t + C. \quad (2.138)$$

故通解为

$$\begin{cases} x = -t + C \\ y = \cos t \end{cases} \quad (2.139)$$

或记为  $y = \cos x - C$ 。

2. 一般的一阶隐式方程  $F(x, y, p) = 0$ 。

考虑  $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$ ，令

$$(x, y, p) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \quad (2.140)$$

则有

$$dy = p dx \quad (2.141)$$

$$\implies \partial_u g du + \partial_v g dv = h \partial_u f du + h \partial_v f dv \quad (2.142)$$

$$\implies (\partial_u g - h \partial_u f) du + (\partial_v g - h \partial_v f) dv = 0 \quad (2.143)$$

若 2.143 有通解  $v = Q(u, C)$  或特解  $v = S(u)$ ，则原方程有通解或特解

$$\begin{cases} x = f(u, Q(u, C)) \\ y = g(u, Q(u, C)) \end{cases} \quad \begin{cases} x = f(u, S(u)) \\ y = g(u, S(u)) \end{cases} \quad (2.144)$$

**例 2.11** 解方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x = 0. \quad (2.145)$$

<sup>2</sup>这里课堂误称为隐函数定理

**证明** 令  $x = u, p = v, y = u - v^2$ , 则有

$$(v - 1)du + 2v dv = 0 \quad (2.146)$$

可解得通解  $u = -2v - \ln(v - 1)^2 + C$  与特解  $v = 1$ , 即得原方程的通解与特解

$$\begin{cases} x = -2v - \ln(v - 1)^2 + C \\ y = -2v - v^2 - \ln(v - 1)^2 + C \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \\ y = u - 1 \end{cases} \quad (2.147)$$

## 第3章 微分方程的定性理论

### 3.1 Picard 存在唯一性定理

本节讨论方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (3.1)$$

的解的存在与唯一性.

#### 定义 3.1

设  $f(x, y)$  在区域  $D$  中满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, L > 0 \quad (3.2)$$

则称  $f$  在  $D$  中对  $y$  满足 Lipschitz 条件.

在单变量微积分中, Lipschitz 条件是一致收敛性的等价表述之一.

#### 定理 3.1 (Picard 存在唯一性定理)

设对方程 3.1,  $f(x, y)$  在  $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$  连续, 且对  $y$  满足 Lipschitz 条件, 则在  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上存在唯一解, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M > \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|. \quad (3.3)$$

Picard 定理的证明不难理解, 但是较为繁琐, 具体步骤如下:

1. 将微分方程转化为对应的积分方程<sup>1</sup>.
2. 构造 Picard 序列  $\{y_n(x)\}$ .
3. 证明  $\{y_n(x)\} \Rightarrow y(x)$ , 且  $y(x)$  是方程的解.
4. 证明解的唯一性.

**证明** Step 1. 转化积分方程.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0 \quad (3.4)$$

$$\iff dy = f(x, y(x))dx \quad (3.5)$$

$$\iff y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y(x))dx \quad (3.6)$$

容易验证两个方程是同解的.

Step 2. 构造 Picard 序列.

构造如下 (Picard) 序列:

$$\begin{cases} y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t))dt \\ y_0(x) = y_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

首先证明其“良定义性”, 即序列的定义域仍在  $R$  中,  $|y_n(x) - y_0| \leq b$ .

首先有<sup>2</sup>

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0)dt \right| \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>相比微分方程, 积分方程更容易作估计 (因为积分三角不等式).

<sup>2</sup>从这里也可以诱导出  $h$  的定义.

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \right| \quad (3.9)$$

$$\leq M|x - x_0| \quad (3.10)$$

$$\leq b \quad (3.11)$$

则根据数学归纳法<sup>3</sup>, 对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|y_n(x) - y_0| \leq b$ .

Step 3. 证明  $\{y_n(x)\} \Rightarrow y(x)$  是方程的解.

改写

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} [y_{j+1}(x) - y_j(x)] + y_0 \quad (3.12)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} |y_{j+1}(x) - y_j(x)| + y_0 \quad (3.13)$$

由于

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))] dt \right| \quad (3.14)$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))| dt \right| \quad (3.15)$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \right| \quad (3.16)$$

$$\leq LM \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| \quad (3.17)$$

$$= \frac{LM}{2} (x - x_0)^2 = \frac{M}{L} \frac{[L(x - x_0)]^2}{2} \quad (3.18)$$

这里用到了验证良定义性时的结论. 充分上面的相同过程, 可得

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \right| \quad (3.19)$$

根据归纳法, 可以证明

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{[L|x - x_0|]^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.20)$$

$$\leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.21)$$

故

$$\sum_{j=0}^{\infty} |y_{j+1}(x) - y_j(x)| \leq \frac{M}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Lh)^{j+1}}{(j+1)!} \quad (3.22)$$

则根据函数项级数的 Weierstrass 判别法, 可知  $\{y_n(x)\}$  一致收敛, 因此对 Picard 序列的递推式取极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \right] \quad (3.23)$$

$$= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(t)) dt \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.25)$$

故 Picard 序列的极限  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$  是方程的解.

Step 4. 证明解的唯一性.

<sup>3</sup>这里归纳法主要是保证在  $y_{n-1}(x)$  不越界, 可以使用  $M$  放缩.

若方程有两个互异的解  $\varphi(x), \psi(x)$ , 记  $u(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ , 则有

$$|u(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) dt \right| \quad (3.26)$$

$$\leq L \int_{x_0}^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \quad (3.27)$$

$$= L \int_{x_0}^x |u(t)| dt \quad (3.28)$$

根据 Gronwall 不等式 2.2 可得<sup>4</sup>

$$|u(x)| \leq 0 \quad (3.29)$$

故  $\varphi(x) = \psi(x)$ .

事实上, 该定理也可以用压缩映像原理考虑. 定义

$$T : C([x_0 - b, x_0 + b]) \rightarrow C([x_0 - b, x_0 + b]) \quad (3.30)$$

$$y(x) \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.31)$$

则需要证明, 存在唯一  $y(x) \in C([x_0 - b, x_0 + b])$ , 使得  $T(y(x)) = y(x)$ , 即  $T$  有唯一不动点.

### 定理 3.2

设  $X$  为 Banach 空间的闭集,  $T$  为  $X$  上的算子, 若对任意  $y_1, y_2 \in X$ , 都有

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq \theta \|y_1 - y_2\| \quad (0 < \theta < 1) \quad (3.32)$$

则存在唯一的  $y \in X$ , 使得  $T(y) = y$ . ♥

**注** 带有完备范数 (向量 Cauchy 列收敛) 的向量空间称为 Banach 空间.

对于  $y \in C([x_0 - b, x_0 + b])$ , 定义

$$\|y\| = \max\{|y(x)| : x \in [x_0 - b, x_0 + b]\} \quad (3.33)$$

$$X = \{y(x) \in C([x_0 - b, x_0 + b]) : |y(x) - y_0| \leq b\} \quad (3.34)$$

则  $X$  为闭集 (极限点都在  $X$  中).

对任意  $y(x) \in X$

$$|T(y) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \quad (3.35)$$

$$\leq M|x - x_0| \leq Mh = b. \quad (3.36)$$

$$|T(y_1) - T(y_2)| = \left| \int_{x_0}^x (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) dt \right| \quad (3.37)$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \quad (3.38)$$

$$\leq L|x - x_0| \max\{|y_1(x) - y_2(x)| : x \in [x_0 - b, x_0 + b]\} \quad (3.39)$$

$$\leq Lh \|y_1 - y_2\| \quad (3.40)$$

若  $Lh < 1$ , 则  $h < \frac{1}{L}$ . 此时满足压缩映像原理的条件, 则根据该定理, 存在唯一性得证.

**例 3.1** 考虑 Riccati 方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x^2 + y^2$  解的存在唯一性.

**解** 由于  $f(x, y)$  对  $y$  偏导数  $\partial_y f = 2y$  存在且局部有界, 故局部满足 Lipschitz 条件, 根据 Picard 存在唯一性定理, 可以断言方程在区域  $D$  内经过每一点有且只有一个解.

<sup>4</sup>这里教材上使用和上面一样的递推放缩, 但用 Gronwall 不等式会更快.

**定理 3.3 (Peano 存在性定理)**

设函数  $f(x, y)$  在矩形区域  $R$  内连续, 则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.41)$$

在区间  $|x - x_0| \leq h$  上至少有一个解  $y = y(x)$ , 这里  $R, h$  的定义同 3.1

**定义 3.2 (Osgood 条件)**

设  $f(x, y) \in C(G)$ , 且

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|), \quad (3.42)$$

其中  $F(r) > 0$  为  $r > 0$  上的连续函数, 且瑕积分

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = \infty \quad (3.43)$$

$r_1$  为任意常数. 则称  $f(x, y)$  在  $G$  内对  $y$  满足 Osgood 条件.

**注** Lipschitz 条件为 Osgood 条件取  $F(r) = Lr$  的特例.

**定理 3.4**

若  $f(x, y)$  在  $G$  关于  $y$  满足 Osgood 条件, 则过  $G$  内任一点, 积分曲线唯一.

**证明** 设过  $(x_0, y_0)$  有两个解  $y = y_1(x), y = y_2(x)$ , 则存在  $x_1 \neq x_0$ , 使得  $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$ .

不妨设  $x_1 > x_0, y_1(x_1) > y_2(x_1)$ , 令

$$\bar{x} = \sup_{[x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\}. \quad (3.44)$$

则  $x_0 \leq \bar{x} < x_1$ , 令  $r(x) = y_1(x) - y_2(x) > 0, r(\bar{x}) = 0$ , 则

$$r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \quad (3.45)$$

$$\leq F(|y_1 - y_2|) \quad (3.46)$$

$$\leq F(r(x)) \quad (3.47)$$

由此得

$$\frac{dr(x)}{F(r(x))} \leq dx, \quad (3.48)$$

$$\implies \int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leq x_1 - \bar{x} < \infty \quad (3.49)$$

矛盾, 故解唯一.

## 3.2 解的延伸

**定理 3.5 (延拓定理)**

设  $P_0$  为区域  $G$  内任一点, 并设  $\Gamma$  为微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad f \in C(G). \quad (3.50)$$

经过  $P_0(x_0, y_0)$  点的任一条积分曲线, 则积分曲线  $\Gamma$  将在区域  $G$  内延伸到边界 (换句话说, 对任何有界闭区域  $G_1, P_0 \in G_1 \subset G$ , 积分曲线  $\Gamma$  将延伸到  $G_1$  之外).

**证明** 设方程经过  $P_0$  的解  $\Gamma$  (解得存在性由 Peano 存在性定理保证) 为  $y = \varphi(x)(x \in J)$ , 其中  $J$  表示  $\Gamma$  的最大存在区间. 根据对称性, 只考虑积分曲线在  $x_0$  右侧的延伸 (右行解) 情况. 因此令  $J^+ = J \cap [x_0, +\infty)$ , 即  $\Gamma$  在



$P_0$  的右行最大区间, 下面分类讨论.

1.  $J^+ = [x_0, +\infty)$ .

此时曲线已延伸到边界, 命题成立.

2.  $J^+ = [x_0, x_1]$ .

令  $y_1 = \varphi_1(x_1)$ , 则  $P_1(x_1, y_1) \in G$ , 由于  $G$  是开集, 故存在以  $P_1$  为中心的矩形  $R \subset G$

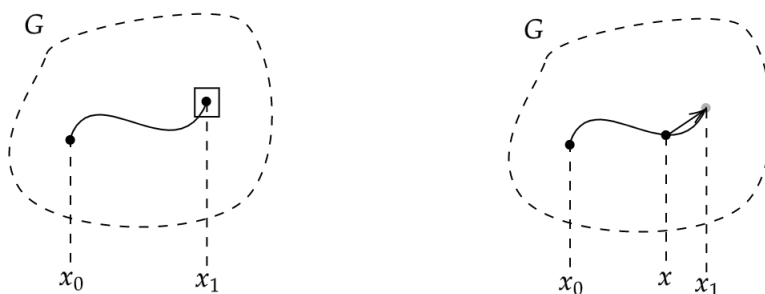


图 3.1: 解的延拓

由 Peano 存在性定理, 在  $[x_1 - h, x_1 + h]$  上存在方程的解  $y = \varphi_1(x)$ , 令

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ \varphi_1(x), & x_1 \leq x \leq x_1 + h \end{cases} \quad (3.51)$$

容易发现,  $\bar{y}(x)$  满足 (与微分方程等价的积分方程)

$$\bar{y}(x) = x_0 + \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}(t)) dt. \quad (3.52)$$

因此方程在  $[x_0, x_1 + h]$  上有界, 与  $J^+$  定义矛盾, 故定理成立.

3.  $J^+ = [x_0, x_1]$ .

若不能延伸, 则存在有界闭集  $K \subset G$ , 使得  $\Gamma \subset K$ . 对任意  $x_n \rightarrow x_1^-$ , 都有

$$|\varphi(x_m) - \varphi(x_n)| = \left| \int_{x_m}^{x_n} f(t, \varphi(t)) dt \right| \quad (3.53)$$

$$\leq \max_{(x,y) \in K} |f(x,y)| |x_n - x_m| \quad (3.54)$$

$$< M |x_n - x_m|. \quad (3.55)$$

上面用到了连续函数在有界闭集上可以取到最值的性质.

由此,  $\{\varphi(x_n)\}$  为 Cauchy 列, 因此极限存在, 令

$$y_1 = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \varphi(x). \quad (3.56)$$

由于在  $[x_0, x_1)$  有

$$\varphi(x) = x_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt. \quad (3.57)$$

故令  $x \rightarrow x_1$ , 得到

$$y_1 = x_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, \varphi(t)) dt. \quad (3.58)$$

因此

$$\begin{cases} \varphi(x), x_0 \leq x < x_1 \\ y_1, x = x_1 \end{cases} \quad (3.59)$$

是方程的解, 同样的, 这与  $J^+$  定义矛盾, 故定理成立.

将前面的 Picard 存在唯一性定理与上面的定理综合, 可得如下推论

### 推论 3.1

设  $f(x, y) \in C(G)$ , 而且对  $y$  满足局部 Lipschitz 条件, 则微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad f \in C(G). \quad (3.60)$$

经过  $G$  内任一  $P_0$  存在唯一积分曲线  $\Gamma$ , 并且  $\Gamma$  在  $G$  内延伸到边界.



### 例 3.2 证明微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (3.61)$$

任一解的存在区间都是有界的.

**证明** 由于  $f(x, y) = x^2 + y^2$  在  $\mathbb{R}^2$  连续, 并且对  $y$  有连续偏导数, 所有方程经过平面上任一点  $P_0$  的积分曲线是唯一存在的. 设  $y = y(x)$  是微分方程满足初值条件  $y(x_0) = y_0$  的解, 令  $J^+ = [x_0, \beta_0)$  是它的右侧最大存在区间, 其中  $\beta_0 > x_0$ . 不妨设  $\beta_0 > 0$  (否则区间显然有界), 则存在  $x_1 > 0, [x_1, \beta_0) \subset J^+$ , 使得  $y = y(x)$  在  $[x_1, \beta_0)$  上满足

$$y'(x) = x^2 + y^2 \geq x_1^2 + y(x)^2 \quad (3.62)$$

$$\implies \frac{y'(x)}{x_1^2 + y^2(x)} \geq 1 \quad (x_1 \leq x < \beta_0) \quad (3.63)$$

从  $x_1$  到  $x$  积分, 得

$$\frac{1}{x_1} \left[ \arctan \frac{y(x)}{x_1} - \arctan \frac{y(x_1)}{x_1} \right] \geq x - x_1 \geq 0. \quad (3.64)$$

这表明

$$0 \leq x - x_1 \leq \frac{\pi}{x_1} \quad (x_1 \leq x < \beta_0) \quad (3.65)$$

即  $\beta_0$  是有限的,  $J^+$  为有限区间.

### 例 3.3 任取 $P_0(x_0, y_0)$ , 证明初值问题

$$\frac{dy}{dx} = (x - y)e^{xy^2}, \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.66)$$

的右行解 (从  $P_0$  出发向右延伸的解) 都在区间  $[x_0, +\infty)$  上存在.

**注** 对于方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.67)$$

称曲线  $\gamma: f(x, y) = 0$  为 nullcline, 即在这条曲线上方程“无增长”.

**证明** 由于  $f(x, y)$  连续且有一阶偏导数, 由推论可知对任意包含  $P_0$  的区域  $G$ , 初值问题的解存在且唯一, 并且可延伸到  $G$  的边界.

由于  $L: y = x$  是方程的 x-nullcline (水平等斜线), 故积分曲线在  $L$  上方斜率为负, 下方斜率为正, 换句话说, 积分曲线在  $L$  上方单调下降, 在  $L$  下方单调上升. 考虑区间

$$S: x_0 \leq x < y_0, \quad -\infty < y < \infty. \quad (3.68)$$

1. 若  $P_0$  位于直线上方.

由于在  $L$  上方积分曲线单调递减, 故其必然会与  $L$  相交, 而后穿过  $L$ , 到达曲线下方.

2. 若  $P_0$  位于直线下方.

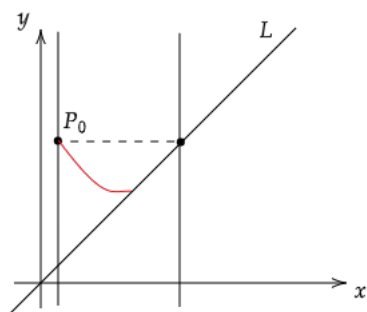


图 3.2: 积分曲线

则积分曲线单调增加, 但是积分曲线不会再次穿过  $L$  到达  $L$  上方 (若曲线从下方接近  $L$ , 则其斜率远小于 1, 但直线  $L$  的斜率是 1), 因此积分曲线无法在有限的区间趋于正无穷. 这与最大存在区间有限矛盾.

**定理 3.6**

设微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.69)$$

其中  $f(x, y) \in C(S)$ ,

$$S: \alpha < x < \beta, \quad -\infty < y < \infty. \quad (3.70)$$

且满足不等式

$$|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x), \quad (3.71)$$

其中  $A(x), B(x) \geq 0$  在区间  $(\alpha, \beta)$  连续, 则微分方程的每一个解都以区间  $(\alpha, \beta)$  为最大存在区间. ♡

**证明** 由 Peano 存在性定理, 经过  $S$  中任一点, 存在至少一条积分曲线, 且每一条积分曲线都可延拓到  $S$  的边界 (延拓定理). 只证明经过  $P_0 \in S$  的最大右行区间为  $[\alpha, \beta)$ , 否则存在  $\beta_0 \in (x_0, \beta)$ , 使得最大右行区间为  $[x_0, \beta_0)$ .

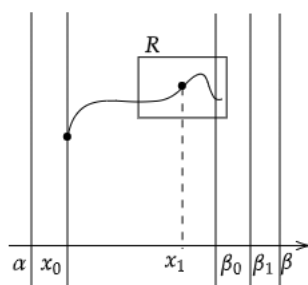


图 3.3: Caption

任取  $y = y(x), x_1 \in (x_0, \beta_0)$ , 令  $\beta_1$  满足  $\beta_0 < \beta_1 < \beta$ , 令

$$R: |x - x_1| \leq a, |y - y_1| \leq b, \quad (3.72)$$

使得  $x_1 + a < \beta_1$ .

由于  $A, B$  在  $(\alpha, \beta)$  上连续, 令它们在  $[x_0, \beta_1]$  上的上界分别为  $A_0, B_0$ , 则在  $R$  上, 由

$$|f(x, y)| \leq A_0(|y_1| + b) + B_0 := M - 1, \quad (3.73)$$

故

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{A_0(|y_1| + b) + B_0 + 1} \rightarrow \frac{1}{A_0}. \quad (3.74)$$

由此可知, 当  $b$  充分大时,  $\frac{b}{M} \geq \frac{1}{2A_0}$ , 选取  $a$ , 使得  $a < \frac{1}{4A_0}$ , 则

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = a. \quad (3.75)$$

由 Peano 存在性定理, 经过  $P_1$  在  $[x_1 - a, x_1 + a]$  上存在积分曲线. 只要取  $x_1$  充分接近  $\beta_0$ , 则积分曲线在  $[x_1, x_1 + a]$  存在, 因此, 积分曲线在  $[x_0, x_1 + a]$  存在, 这与  $[x_0, \beta_0)$  是最大存在区间矛盾.

**注** 上面最后的蜜汁操作是为了在使用 Peano 存在性定理 3.3 时, 保证在  $[x_1 - a, x_1 + a]$  中有解, 而不被  $b/M$  影响.

## 第4章 幂级数解法

### 4.1 Cauchy 定理

#### 定义 4.1

设有两个幂级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \quad (4.1)$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \quad (4.2)$$

其中  $A_{ij} \geq 0$ , 且系数满足

$$|a_{ij}| \leq A_{ij}, (i, j = 0, 1, \dots) \quad (4.3)$$

则称后者是前者的一个优级数 (或强级数), 若后者在区域  $D: |x-x_0| < \alpha, |y-y_0| < \beta$  内是收敛的, 则它的和函数  $F(x, y)$  称为前者在  $D$  的一个优级数 (或强级数).

#### 引理 4.1

设函数在矩形区域  $R: |x-x_0| < \alpha, |y-y_0| < \beta$  上可展开成  $(x-x_0)$  和  $(y-y_0)$  的收敛幂级数, 则存在常数  $M > 0$ , 使得函数

$$F(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x-x_0}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{y-y_0}{\beta}\right)}. \quad (4.4)$$

在矩形区域  $R_0: |x-x_0| < a < \alpha, |y-y_0| < b < \beta$  内是  $f(x, y)$  的一个优级数.

**证明** 由于  $f(x, y)$  在  $R$  上可展开成一个收敛的幂级数

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j, \quad (4.5)$$

故对于任意取定正数  $a < \alpha, b < \beta$ , 正项级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |a_{ij}|a^i b^j \quad (4.6)$$

收敛, 从而其通项有界, 即存在常数  $M > 0$ , 使得

$$|a_{ij}|a^i b^j \leq M \iff |a_{ij}| \leq \frac{M}{a^i b^j}. \quad (4.7)$$

在  $R_0$  内考虑上面定义的函数  $F(x, y)$ . 易知, 当  $(x, y) \in R_0$  时, 有如下收敛的幂级数展开

$$F(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{M}{a^i b^j} (x-x_0)^i (y-y_0)^j. \quad (4.8)$$

则易知  $F(x, y)$  是  $f(x, y)$  在  $R_0$  内的优级数.

#### 引理 4.2

设在  $R_0$  上由 4.5 给定  $F(x, y)$ , 则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (4.9)$$

在区间  $|x-x_0| < \rho$  内存在一个解析的解  $y = \hat{y}(x)$ , 其中  $a, b, M$  意义同上,

$$\rho = a \left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right). \quad (4.10)$$

**证明** 利用分离变量法求解, 得到

$$\int_{y_0}^y \left(1 - \frac{y-y_0}{b}\right) dy = \int_{x_0}^x \frac{M}{1 - \frac{x-x_0}{a}} dx \quad (4.11)$$

$$\frac{b}{2} \left(1 - \frac{y-y_0}{b}\right)^2 - \frac{b}{2} = aM \ln \left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right) \quad (4.12)$$

由此解出 4.9 的解为

$$y = \hat{y}(x) = y_0 + b - b\sqrt{1 + \frac{2aM}{b} \ln \left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right)} \quad (4.13)$$

由于  $\rho < a$ , 故当  $|x-x_0| < \rho$  时,  $\ln \left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right)$  可展开为  $(x-x_0)$  的幂级数, 而当  $|s| < 1$  时,  $\sqrt{1+s}$  可以展成  $s$  的幂级数. 由于当  $|x-x_0| < \rho$  时可证明

$$\left| \frac{2aM}{b} \ln \left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right) \right| < 1, \quad (4.14)$$

所以利用幂级数代入幂级数的法则可知, 上面的函数  $y = \hat{y}(x)$  当  $|x-x_0| < \rho$  时可以展成  $(x-x_0)$  的幂级数, 从而  $y = \hat{y}(x)$  是 4.9 的解析解.

#### 定理 4.1 (Cauchy 定理)

若  $f(x, y)$  在矩形区域  $R$  上可以展开成  $(x-x_0)$  与  $(y-y_0)$  的一个收敛的幂级数, 则初值问题 3.1 在  $x_0$  点的邻域  $|x-x_0| < \rho$  内存在唯一解析解  $y = y(x)$ .



**证明** 根据假设, 可以在  $R$  上将  $f(x, y)$  展开成收敛幂级数

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x-x_0)^i (y-y_0)^j. \quad (4.15)$$

齐次, 作 3.1 的形式解

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (x-x_0)^n. \quad (4.16)$$

则可通过计算得到

$$C_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0) = a_{00} \quad (4.17)$$

$$C_2 = \frac{y''(x_0)}{2!} = \frac{\partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0) y'(x_0)}{2!} = \frac{a_{10} + a_{01} a_{00}}{2!} \quad (4.18)$$

$$\dots \dots \quad (4.19)$$

$$C_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} = P_n(a_{00}, a_{01}, a_{10}, \dots, a_{n-1,0}). \quad (4.20)$$

其中  $P_n$  表示  $n$  次多项式, 系数均为正数, 且与  $f(x, y)$  无关, 只与  $n$  有关. 以此法可以唯一确定形式解, 故形式解唯一, 由此得出 3.1 解析解唯一.

为证明解析解的存在性, 只需证明形式解的收敛性, 考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (4.21)$$

其中

$$F(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right) \left(1 - \frac{y-y_0}{b}\right)}. \quad (4.22)$$

$a, b, M$  意义同引理 4.1, 根据 4.1, 在  $R_0$  中  $F(x, y)$  是  $f(x, y)$  的优函数, 即  $F(x, y)$  在  $R_0$  内可展成幂级数

$$F(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} (x-x_0)^i (y-y_0)^j, \quad (4.23)$$

且  $|a_{ij}| \leq A_{ij}$ . 作 4.9 的形式解

$$y = \hat{y}(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n (x-x_0)^n, \quad (4.24)$$



根据前面唯一性的证明中  $P_n$  的性质知,

$$\hat{C}_n = P_n(A_{00}, A_{01}, A_{10}, \cdots, A_{n-1,0}). \quad (4.25)$$

因此根据上面强级数的关系,

$$|C_n| = |P_n(a_{00}, a_{01}, a_{10}, \cdots, a_{n-1,0})| \quad (4.26)$$

$$\leq |P_n(A_{00}, A_{01}, A_{10}, \cdots, A_{n-1,0})| \quad (4.27)$$

$$= |\hat{C}_n|. \quad (4.28)$$

这表明上面的  $y = \hat{y}(x)$  是前面的形式解  $y$  的优级数, 由 4.2,  $y = \hat{y}(x)$  在  $|x - x_0| < \rho$  收敛, 因此形式解  $y$  也在  $|x - x_0| < \rho$  收敛, 即存在性得证.

**注**

1. 非解析的微分方程可能没有形式的幂级数解, 例如

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}, y(0) = 0. \quad (4.29)$$

2. 非解析微分方程的形式解可能不收敛, 例如

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y - x, y(0) = 0. \quad (4.30)$$

## 4.2 幂级数解法

本节开始, 限于讨论二阶齐次线性微分方程

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0, \quad (4.31)$$

其中  $A, B, C$  在区间  $|x - x_0| < r$  内解析. 若其有公因子  $(x - x_0)$ , 则将其约去, 若  $A(x_0) \neq 0$ , 则在  $x_0$  附近  $A(x) \neq 0$ , 因此方程可写为如下形式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (4.32)$$

其中系数函数

$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}. \quad (4.33)$$

在  $x_0$  附近解析, 称这样的点  $x_0$  为微分方程 4.9 的常点, 若  $A(x_0) = 0$ , 则  $p, q$  至少有一个在  $x_0$  不连续, 这样的点  $x_0$  称为方程 4.31 的奇点. 本节考虑前者.

根据 Cauchy 定理, 可以得到下面的定理.

### 定理 4.2

设微分方程 4.32 中  $p(x), q(x)$  在区间  $|x - x_0| < r$  可展成  $(x - x_0)$  的收敛的幂级数, 则 4.32 在区间  $|x - x_0| < r$  内有收敛的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n, \quad (4.34)$$

其中  $C_0, C_1$  为两个任意常数,  $C_n$  可递推得到.



### 问题 4.1 用幂级数解法解 Airy 方程

$$y'' = xy \quad (-\infty < x < \infty). \quad (4.35)$$

**解** 由定理 4.1, 可设方程有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-\infty < x < \infty). \quad (4.36)$$

微分并调整求和指标:

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n, \quad (4.37)$$

代入原方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^n \quad (4.38)$$

根据幂级数的唯一性, 对比系数可得递推式

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}, \quad (4.39)$$

由此解得

$$a_2 = a_5 = \cdots = a_{3n+2} = \cdots = 0 \quad (4.40)$$

$$a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, a_6 = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \cdots, a_{3n} = \frac{a_0}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4) \cdots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \quad (4.41)$$

$$a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, a_7 = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \cdots, a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3) \cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}. \quad (4.42)$$

由此可得 Airy 方程的幂级数解为

$$y = a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4) \cdots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \right] \quad (4.43)$$

$$+ a_1 \left[ x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3) \cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \right] \quad (4.44)$$

利用 d'Alembert 判别法, 可知上面的幂级数对任何  $x$  都收敛, 它是 Airy 方程的通解.

使用相同的方法, 也可以求出 Airy 方程在  $x=1$  处展开的幂级数解, 只不过那种情况得到的递推式会稍显复杂.

#### 问题 4.2 求解 Legendre 方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad (4.45)$$

其中  $n$  为常数.

**解** 易知  $x=0$  为 Legendre 方程的一个常点, 由定理 4.2, 当  $|x| < 1$  时, 方程有幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \quad (4.46)$$

将上式代入方程, 可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)C_{k+2} + (n+k+1)(n-k)C_k] x^k = 0. \quad (4.47)$$

由此得到递推公式

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + (n+k+1)(n-k)C_k = 0 \quad (4.48)$$

从而得出

$$C_{2m} = (-1)^m C_0 = \frac{(n-2m+2) \cdots (n-2)n(n+1)(n+3) \cdots (n+2m-1)}{(2m)!} \quad (4.49)$$

$$C_{2m+1} = (-1)^m C_1 = \frac{(n-2m+1) \cdots (n-3)(n-1)(n+2)(n+4) \cdots (n+2m)}{(2m)!} \quad (4.50)$$

即得, Legendre 方程的幂级数解为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} [C_{2k} x^{2k} + C_{2k+1} x^{2k+1}]. \quad (4.51)$$

### 4.3 广义幂级数解法

上节中已证明方程

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \quad (4.52)$$

在常点  $x_0$  的邻域内存在幂级数解, 本节将进一步证明, 微分方程在某一类特殊奇点的邻域内存在广义幂级数解.

**例 4.1** 讨论微分方程

$$x^2 y'' - 2y = 0 \quad (4.53)$$

在奇点  $x = 0$  附近解的性态.

**解** 方程为 Euler 方程, 易求通解为

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} \quad (x \neq 0). \quad (4.54)$$

由此可知, 方程当  $x \rightarrow 0$  时的有界解只可能是

$$y = Cx^2, \quad (4.55)$$

这说明方程不可能有满足  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  的解, 因此在方程的奇点, 一般初值方程未必有解, 并且解  $y = 1/x$  在  $x = 0$  处误解, 因此在  $x = 0$  处不能展开幂级数.

**例 4.2** 讨论微分方程

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0 \quad (4.56)$$

在奇点  $x = 0$  附近存在幂级数解的可能性.

**解** 设方程有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (C_0 \neq 0), \quad (4.57)$$

代入方程可得递推公式

$$C_{n+1} = (n+1)C_n, \quad (4.58)$$

由此可得方程的形式幂级数解

$$y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad (C_0 \neq 0), \quad (4.59)$$

而此幂级数发散 (也即收敛半径为 0), 故在奇点附近不存在幂级数解.

**例 4.3** 求解微分方程

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0. \quad (4.60)$$

**解** 方程以 0 为唯一奇点, 令

$$y = \frac{u}{\sqrt{x}}, \quad (4.61)$$

则得

$$u'' + u = 0, \quad (4.62)$$

该方程有两个线性无关解

$$u_1 = \cos x, \quad u_2 = \sin x, \quad (4.63)$$

因此得原方程两个线性无关解

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-\frac{1}{2}}, \quad (4.64)$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}}, \quad (4.65)$$

但它们都不是普通意义下的幂级数，它们属于接下来要讨论的广义幂级数。

#### 定义 4.2 (广义幂级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+\rho} \quad (C_0 \neq 0), \quad (4.66)$$

其中常数  $\rho$  称为指标。

#### 定义 4.3 (正则奇点)

设微分方程 4.31 可以改写为如下形式

$$(x - x_0)^2 P(x) y'' + (x - x_0) Q(x) y' + R(x) y = 0, \quad (4.67)$$

其中  $P, Q, R$  是多项式或在  $x_0$  处附近可展成  $(x - x_0)$  的幂级数，并且  $P(x_0) \neq 0$ ,  $Q(x_0), R(x_0)$  不同时等于 0，则称  $x_0$  为方程的正则零点。

#### 定理 4.3

微分方程 4.31 在正则奇点  $x_0$  的邻域内有收敛的广义幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+\rho} \quad (C_0 \neq 0), \quad (4.68)$$

其中  $\rho$  和系数  $C_k$  通过代入法确定。

**证明** 在  $x_0$  的某一邻域  $|x - x_0| < r$  内，方程 4.67 可改写为

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k y' + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k y = 0. \quad (4.69)$$

假设它有形式幂级数解，则代入方程可得

$$(x - x_0)^\rho \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (k + \rho)(k + \rho - 1) C_k (x - x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k + \rho) C_k (x - x_0)^k \right. \quad (4.70)$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k \right] = 0 \quad (4.71)$$

消去因式  $(x - x_0)^\rho$ ，利用幂级数的唯一性比较系数可得

$$\begin{cases} C_0 f_0(\rho) = 0, \\ C_1 f_0(\rho + 1) + C_0 f_1(\rho) = 0, \\ \dots\dots \\ C_k f_0(\rho + k) + \dots + C_0 f_k(\rho) = 0 \\ \dots\dots \end{cases} \quad (4.72)$$

其中

$$\begin{cases} f_0(\rho) \equiv \rho(\rho - 1) + a_0 \rho + b_0, \\ f_j(\rho) \equiv a_j \rho + b_j \quad (j \geq 1). \end{cases} \quad (4.73)$$

由于  $C_0 \neq 0$ ，故得指标方程

$$\rho(\rho - 1) + a_0 \rho + b_0 = 0. \quad (4.74)$$

设  $\rho_1, \rho_2$  为两根, 则不妨设  $\rho_1 \geq \rho_2$  (若两根为共轭复根则任取一根为  $\rho_1$ ), 则有

$$\begin{cases} f_0(\rho_1) = 0, \\ f_0(\rho_1 + j) \neq 0 \quad (j \geq 1). \end{cases} \quad (4.75)$$

因此对于指标根  $\rho = \rho_1$ , 可从上面的递推式依次确定系数  $C_1, \dots, C_k, \dots$ , 从而得到方程得一个形式幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^{k+\rho_1}. \quad (4.76)$$

下面证明该形式幂级数解在  $x = x_0$  附近是收敛的. 设  $\rho_1 = \rho = m$ , 由  $\rho_1$  选取可知  $\operatorname{Re}(m) \geq 0$ , 由于级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \quad (4.77)$$

都在区间  $|x - x_0| < r$  内收敛, 故对取定的  $0 < r_1 < r$ , 存在  $M > 0$  (不妨设  $M \geq 1$ ), 使得

$$|a_k|, |b_k|, |\rho_1 a_k + b_k| \leq \frac{M}{r_1^k}, \quad (4.78)$$

下证

$$|C_k| \leq \left(\frac{M}{r_1}\right)^k. \quad (4.79)$$

由于  $f_0(\rho_1) = 0$ ,  $\rho_1 + \rho_2 = 1 - a_0$ ,  $\rho_1 - \rho_2 = m$ , 有

$$f_0(\rho_1 + k) = k(k + m), \quad (4.80)$$

再利用前面的估计可得

$$|C_1| = \frac{|\rho_1 a_1 + b_1|}{|f_0(\rho_1 + 1)|} \leq \frac{M}{r_1 |m + 1|} \leq \frac{M}{r_1}, \quad (4.81)$$

根据归纳法, 设命题对  $k \leq s - 1$  成立, 则由递推公式可得

$$|C_s| = \frac{\left| \sum_{j=1}^{s-1} C_j f_{s-j}(\rho_1 + j) + C_0 f_s(\rho_1) \right|}{s|s + m|} \quad (\text{取 } C_0 = 1) \quad (4.82)$$

$$\leq \frac{\sum_{j=1}^{s-1} |C_j| |(\rho_1 + j)a_{s-j} + b_{s-j}| + |\rho_1 a_s + b_s|}{s^2} \quad (4.83)$$

$$\leq \frac{\sum_{j=0}^{s-1} |C_j| [|\rho_1 a_{s-j} + b_{s-j}| + |j a_{s-j}|]}{s^2} \quad (4.84)$$

$$\leq \frac{\sum_{j=0}^{s-1} \left(\frac{M}{r_1}\right)^{s-1} \left[ \frac{M}{r_1^{s-j}} + j \frac{M}{r_1^{s-j}} \right]}{s^2} \quad (4.85)$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{s-1} \left[ \frac{1+j}{r_1^{s-j-1}} \right] \left(\frac{M}{r_1}\right)^s}{s^2} \quad (4.86)$$

$$\leq \frac{\frac{1}{2}s(s+1) \left(\frac{M}{r_1}\right)^s}{s^2} \quad (4.87)$$

$$\leq \left(\frac{M}{r_1}\right)^s. \quad (4.88)$$

故对任意常数  $0 < r_2 < r_1$ , 所得广义幂级数在  $0 < |x - x_0| \leq r_2/M$  内收敛.

最后指出, 当  $\rho_1$  为复数时, 所得幂级数为复广义幂级数, 由于方程式实系数的, 故可通过分离实部和虚部的方法得到两个实级数解 (类似下一章中的复根实化).

## 问题 4.3 求解 Bessel 方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (n \geq 0). \quad (4.89)$$

解 注意到  $x = 0$  是 Bessel 方程的正则奇点, 根据前面的定理, 它有广义幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\rho} \quad (C_0 \neq 0), \quad (4.90)$$

代入方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\rho + n + k)(\rho - n + k)C_k + C_{k-2}]x^{k+\rho} = 0, \quad (4.91)$$

约定  $C_{-1} = C_{-2} = 0$ , 可得递推公式

$$(\rho + n + k)(\rho - n + k)C_k + C_{k-2} = 0, \quad (4.92)$$

由第一式可推出指标方程

$$(\rho + n)(\rho - n) = 0. \quad (4.93)$$

由此得到两个指标根  $\rho_1 = n, \rho_2 = -n$ . 取  $\rho = \rho_1 = n$ , 递推公式化为

$$(2n + k)kC_k + C_{k-2} = 0, \quad (4.94)$$

易得  $C_3 = C_5 = \dots = C_{2k+1} = \dots = 0$ , 以及

$$C_2 = \frac{-1}{2^{n+1}}C_0, \quad (4.95)$$

$$C_4 = \frac{1}{2^4(n+1)(n+2)2!}C_0, \quad (4.96)$$

$$\dots\dots \quad (4.97)$$

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(n+1)(n+2)\dots(n+k)k!}C_0, \quad (4.98)$$

$$\dots\dots \quad (4.99)$$

借助  $\Gamma$  函数, 并取

$$C_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}, \quad (4.100)$$

可得

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)2^{2k+n}}. \quad (4.101)$$

由此, 对应于  $\rho_1 = n$ , 得到 Bessel 方程的一个广义幂级数解

$$y = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (4.102)$$

它称为第一类 Bessel 函数.

当  $\rho = \rho_2 = -n$  时, 递推公式化为

$$k(k-2n)C_k + C_{k-2} = 0, \quad (4.103)$$

分两种情况讨论

1.  $2n$  不等于任何整数.

此时  $k(k-2n) \neq 0$ , 类似于前面的讨论, 只要取

$$C_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}, \quad (4.104)$$

可得 Bessel 方程的另一个幂级数解

$$y = J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}. \quad (4.105)$$

它称为第二类 Bessel 函数 (当  $x \rightarrow 0$  时  $J_{-n}(x)$  无界) .

2.  $2n$  等于某个整数  $N$ .

此时  $C_N$  的系数  $N(N-2n)=0$ , 由此确定  $C_N$  有困难, 此时再区分两种情况.

(a).  $2n$  等于一个奇数  $2s+1$ , 此时可知, 当  $k$  为偶数时,  $C_k$  系数  $k(k-2n) \neq 0$ , 因此与上面的情形一样可以确定  $C_k$ . 当  $k$  为奇数时, 若  $k < 2s+1$ , 则  $C_k$  系数  $k(k-2n)$  仍不为 0, 因此有

$$C_1 = \cdots = C_{2s-1} = 0, \quad (4.106)$$

若  $k \geq 2s+1$ , 则可知  $C_{2s+1}$  系数为 0, 且有

$$(2s+1)(-2n+2s+1)C_{2s+1} = 0, \quad (4.107)$$

$$(2s+3)(-2n+2s+3)C_{2s+3} + C_{2s+1} = 0, \quad (4.108)$$

$$\cdots \cdots \quad (4.109)$$

因此只要令  $C_{2s+1} = 0$ , 仍有  $C_{2k+3} = C_{2s+5} = \cdots = 0$ , 故当  $n$  为半整数时, 对应于  $\rho_2 = -n$ , 仍可得到广义幂级数解  $J_{-n}(x)$ .

(b).  $2n$  为偶数, 也即  $n$  为整数.

## 第5章 高阶微分方程

考虑  $n$  阶微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (5.1)$$

令  $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ , 则

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \quad (5.2)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_3 \quad (5.3)$$

$$\dots \quad (5.4)$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (5.5)$$

$$\implies \frac{d}{dx}(y_1, \dots, y_n)^T = (y_2, \dots, y_n, f(x, y_1, \dots, y_n))^T. \quad (5.6)$$

由于  $y = \varphi(x)$  为 5.1 的解, 等价于  $(y_1, \dots, y_n)^T = (\varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x), f(x, \dots, \varphi^{(n-1)}(x)))^T$  的解, 由此, 高阶方程转化为了一阶微分方程组.

一般的, 考虑

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (5.7)$$

其中  $f_1, \dots, f_n$  是  $(x, y_1, \dots, y_n)$  在某个区域  $D \subseteq \mathbb{R}^{m \times m}$  上连续.

令

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \quad (5.8)$$

$$\mathbf{f} = (f_1(x, \mathbf{y}), \dots, f_n(x, \mathbf{y}))^T \quad (5.9)$$

则方程化为

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \quad (5.10)$$

此即方程  $y' = f(x, y)$  的推广.

特别地, 若  $f_i$  关于  $x, y_1, \dots, y_n$  是线性的, 即

$$f_i(x, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(x)y_k + e_i(x). \quad (5.11)$$

则称 5.7 为  $n$  阶线性方程组, 此时  $\mathbf{f}$  可用矩阵表示, 即

$$\mathbf{f} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{e}. \quad (5.12)$$

即方程有形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{e}. \quad (5.13)$$

回想过去对存在唯一性定理的讨论, 如果想将之推广, 则需要在  $\mathbb{R}^n$  中定义范数, 由于  $\mathbb{R}^n$  上的  $p$ -范数都是等价范数<sup>1</sup>, 常用的是下面三种 ( $p = 1, 2, \infty$ )

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (5.14)$$

$$|\mathbf{y}| = |x_1| + \dots + |x_n| \quad (5.15)$$

<sup>1</sup>在张筑生的《数学分析新讲 2》中对此做过证明.



$$|\mathbf{y}| = \max\{x_1, \dots, x_n\} \quad (5.16)$$

**注** p-范数的一般形式为

$$|\mathbf{y}| = (x_1^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \quad (5.17)$$

其三角不等式即为闵可夫斯基不等式.

定义过范数之后, 可以很快将前面的定理推广, 比如

#### 定理 5.1 (Picard)

设对方程 5.10,  $f(x, \mathbf{y})$  在  $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [\mathbf{y}_0 - \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}]$  连续, 且对  $\mathbf{y}$  满足 Lipschitz 条件, 即

$$|f(x, \mathbf{y}_1) - f(x, \mathbf{y}_2)| \leq L|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2| \quad (5.18)$$

则方程在  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上存在唯一解, 其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M > \max_{(x, \mathbf{y}) \in R} |f(x, \mathbf{y})|. \quad (5.19)$$



## 5.1 解对初值和参数的连续依赖性

考虑

$$(E_\lambda): \quad \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \quad (5.20)$$

解为  $\mathbf{y} = \varphi(x; x_0, \mathbf{y}_0; \lambda)$ . 如果解对参数和初值是连续依赖的, 那么在参数 ‘初值有较小偏差时, 得到解的状态也相差不大, 在物理中, 依赖性表明由测量产生参数的误差并不会使结果偏差很大.

**问题 5.1** 上述方程的解  $y = \varphi(x; x_0, y_0; \lambda)$  在区域  $D$  上关于  $(x_0, \mathbf{y}_0, \lambda)$  是否连续?

为了方便, 可以做变量替换  $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ , 则 5.20 转化为

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{d\tilde{x}} = \mathbf{f}(\tilde{x} + x_0, \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{y}_0, \lambda), \quad \tilde{\mathbf{y}}(0) = 0. \quad (5.21)$$

原问题转化为上面的方程关于参数是否连续依赖 (可以视作初值固定), 并且不失一般性可设  $x_0 = y_0 = 0$ .

#### 定理 5.2 (解对参数的连续依赖性)

设向量值函数  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \lambda)$  在区域

$$G: |x| \leq a, |\mathbf{y}| \leq b, |\lambda - \lambda_0| \leq c \quad (5.22)$$

上连续, 并且关于  $\mathbf{y}$  满足 Lipschitz 条件, 令  $M$  为  $|\mathbf{f}|$  在  $G$  的一个上界, 而且令

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad (5.23)$$

则 5.20 的解  $\mathbf{y} = \varphi(x, \lambda)$  在区域

$$D: |x| \leq h, |\lambda - \lambda_0| \leq c \quad (5.24)$$

连续.



**注** 从上面开始的参数  $\lambda$  应该是向量, 需要加粗, 但我忘了, 就将错就错吧.

上述定理的证明与 Picard 定理相似, 下面仅列出要点

**证明** Step 1. 初值问题  $E_\lambda$  等价于积分方程

$$\mathbf{y} = \int_0^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \lambda) dt. \quad (5.25)$$

Step 2. 构造 Picard 序列:

$$\varphi_{k+1}(x, \lambda) = \int_0^x \mathbf{f}(t, \varphi_k(t, \lambda), \lambda) dt. \quad (5.26)$$

且  $\varphi_0(x, \lambda) = \mathbf{0}, (x, \lambda) \in D$ .

Step 3. 归纳证明  $\varphi_k(x, \lambda)$  对  $(x, \lambda) \in D$  连续.

Step 4. 归纳证明

$$|\varphi_{k+1}(x, \lambda) - \varphi_k(x, \lambda)| \leq \frac{M(L|x|)^{k+1}}{L(k+1)!}. \quad (5.27)$$

并由此证明  $\{\varphi_k\}$  一致收敛.

Step 5. 令

$$\varphi(x, \lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x, \lambda), \quad (5.28)$$

则  $y = \varphi(x, \lambda)$  为  $(E_\lambda)$  的唯一解, 且对  $(x, \lambda) \in D$  连续.

### 推论 5.1

设  $n$  维向量值函数  $f(x, y)$  在区域

$$R: |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b \quad (5.29)$$

上连续, 且对  $y$  满足 Lipschitz 条件, 则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = \eta \quad (5.30)$$

的解  $y = \varphi(x, \eta)$  在区域

$$Q: |x - x_0| \leq \frac{h}{2}, \quad |\eta - y_0| \leq \frac{b}{2} \quad (5.31)$$

上连续, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad (5.32)$$

$M$  为  $|f|$  在区域  $R$  上的一个上界.



**证明** 根据前面的定理, 可知初值问题在区域

$$A: |x - x_0| \leq \frac{h}{2}, \quad |y - \eta| \leq \frac{b}{2} \quad (5.33)$$

上有唯一连续解  $y = \varphi(x, \eta)$ .

且该解满足积分方程

$$\varphi(x, \eta) = \eta + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x, \eta)) dx. \quad (5.34)$$

根据  $f$  关于  $y$  有 Lipschitz 连续, 则对任意  $\eta_1, \eta_2 \in B_{b/2}(y_0)$ , 有

$$|\varphi(x, \eta_1) - \varphi(x, \eta_2)| \leq |\eta_1 - \eta_2| + \int_{x_0}^x |f(x, \varphi(x, \eta_1)) - f(x, \varphi(x, \eta_2))| dx \quad (5.35)$$

$$\leq |\eta_1 - \eta_2| + \int_{x_0}^x L|\varphi(x, \eta_1) - \varphi(x, \eta_2)| dx \quad (5.36)$$

对上式使用 Gronwall 不等式 2.2, 即得

$$|\varphi(x, \eta_1) - \varphi(x, \eta_2)| \leq |\eta_1 - \eta_2| e^{L|x-x_0|} \quad (5.37)$$

$$\leq |\eta_1 - \eta_2| e^{Lh}, \quad (5.38)$$

故  $\varphi$  在  $Q = B_{h/2}(x_0) \times B_{b/2}(y_0)$  关于  $\eta$  连续.

**注** 上述证明有误, 只证明了对参数的连续性, 使用 Picard 迭代更好些.

### 定理 5.3 (解对初值的连续依赖性)

设  $n$  维向量值函数  $f(x, y)$  在开区域  $G$  连续, 且对  $y$  满足局部 Lipschitz 条件, 假设  $y = \xi(x)$  为方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (5.39)$$

的一个解, 存在区间为  $J$ , 则对任意  $[a, b] \subseteq J$ , 存在  $\delta > 0$ , 对任意初值

$$(x_0, \mathbf{y}_0) \in B_b(x_0) \times B_\delta(\boldsymbol{\xi}(x_0)), \quad (5.40)$$

Cauchy 问题 (初值问题)

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (5.41)$$

的解  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x, x_0, \mathbf{y}_0)$  也在  $[a, b]$  存在, 并且在闭区域

$$D_\delta : [a, b] \times [a, b] \times B_\delta(\boldsymbol{\xi}(x_0)) \quad (5.42)$$

连续.



上述定理主要分为两部分, 描述解在  $[a, b]$  存在性, 以及解对初值的连续依赖性, 因此证明也要从两方面入手.

### 证明

1. 首先证明解的存在性. 由于积分曲线段

$$\Gamma = \{(x, \mathbf{y}) : \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}(x), a \leq x \leq b\} \quad (5.43)$$

是有界闭集, 故利用有限覆盖定理, 可以得到管状区域

$$\Sigma_\sigma = [a, b] \times B_\sigma(\boldsymbol{\xi}(x)) \quad (5.44)$$

上一致的 Lipschitz 常数  $L$ .

设 Cauchy 问题的解为  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ , 令  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}$ , 则原方程等价于初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dx} = \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\xi}) := \mathbf{g}(x, \boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\eta}(x_0) = \mathbf{y}_0 - \boldsymbol{\xi}(x_0) \end{cases} \quad (5.45)$$

其中  $\mathbf{g}$  在  $[a, b] \times B_\delta(\boldsymbol{\xi}(x_0))$  连续, 根据  $\mathbf{f}$  的 Lipschitz 条件, 可推知

$$|g(x, \boldsymbol{\eta}_1) - g(x, \boldsymbol{\eta}_2)| = |f(x, \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\xi}) - f(x, \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\xi})| \quad (5.46)$$

$$\leq L|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|, \quad (5.47)$$

即  $g$  对  $\boldsymbol{\eta}$  满足 Lipschitz 条件, 因此由 Picard 定理, 以  $(x_0, \mathbf{y}_0 - \boldsymbol{\xi}(x_0))$  为初值的解存在且唯一. 此外, 由于

$$|g(x, \boldsymbol{\eta})| = |f(x, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) - f(x, \boldsymbol{\xi})| \leq L|\boldsymbol{\eta}|, \quad (5.48)$$

根据延拓定理的推论, 上述解可延拓到  $[a, b]$ .

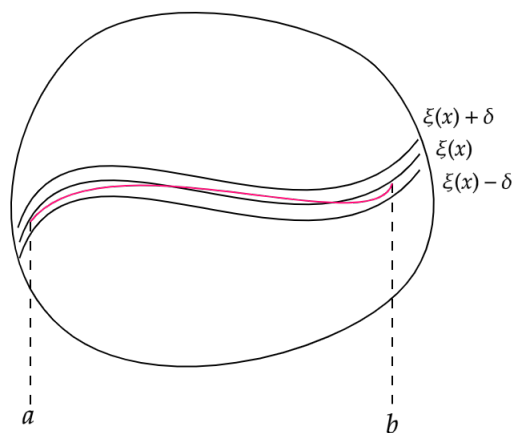


图 5.1: 管状区域

最后还需要说明解在  $D_\delta$  存在. 由于

$$\frac{d\eta^2}{dx} = 2\eta \frac{d\eta}{dx} = 2\eta g(x, \eta) \leq 2L\eta^2, \quad (5.49)$$

使用 Gronwall 不等式, 可知

$$\eta(x)^2 \leq |\eta(x_0)|^2 e^{2L|x-x_0|} \quad (5.50)$$

$$\leq |y_0 - \xi(x_0)|^2 e^{2L(b-a)} \quad (5.51)$$

故

$$|\eta(x)| \leq |y_0 - \xi(x_0)| e^{L(b-a)} \quad (5.52)$$

$$\leq \sigma e^{L(b-a)} \quad (5.53)$$

若取  $\delta > 0$ , 使得  $\sigma e^{L(b-a)} \leq \delta/2$ , 则若  $|y_0 - \xi(x_0)| \leq \sigma$ , 就有  $|\eta(x)| < \delta$ .

## 2. 再来证明连续依赖性.

只需证明, 对任意序列  $(\xi_i, \eta_i) \rightarrow (x_0, y_0)$ , 都有  $\varphi(x, \xi_i, \eta_i) \rightarrow \varphi(x, x_0, y_0)$ . 令  $\varphi_i(x) = \varphi(x, \xi_i, \eta_i)$ , 由于

$$|\varphi_i(x)| = \left| \eta_i + \int_{\xi_i}^x f(x, \varphi_i(x)) dx \right| \quad (5.54)$$

$$\leq |\eta_i| + M|x - \xi_i| \quad (5.55)$$

$$\leq |y_0| + M(b-a) \quad (5.56)$$

并且

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(x, \varphi_i(x)) dx \right| \quad (5.57)$$

$$\leq M|x_1 - x_2|, \quad (5.58)$$

则根据 Arzela-Ascoli 引理, 存在收敛子列  $\varphi_{i_j}(x) \rightarrow \psi(x)$ , 并且  $\psi(x)$  满足初值问题对应的积分方程, 故  $\psi(x)$  为

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (5.59)$$

的解, 故  $\varphi_i(x) = \varphi(x, \xi_i, \eta_i) \rightarrow \psi(x, x_0, y_0) = \varphi(x, x_0, y_0)$ .

上面提到的引理, 在此不做证明.

### 引理 5.1 (Arzela-Ascoli 引理)

设  $\{\varphi_i(x)\}$  为一列有界闭区间  $I$  上的连续函数, 并且满足

1. 一致有界:  $|\varphi_i(x)| \leq K, \forall i \in \mathbb{N}, x \in I$ .

2. 等度连续:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$ , 都有

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \varepsilon. \quad (5.60)$$

则存在  $\{\varphi_i(x)\}$  子列  $\{\varphi_{i_j}(x)\}$  一致收敛.



## 5.2 解对参数的连续可微性

### 定理 5.4 (解对参数的连续可微性)

设  $f(x, \mathbf{y}, \lambda)$  在矩形区域  $G$  连续, 且对  $\mathbf{y}, \lambda$  有连续偏微商, 则方程

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = f(x, \mathbf{y}, \lambda) \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

的解  $\mathbf{y} = \varphi(x, \lambda)$  在区域

$$D: \quad |x| \leq h, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq c \quad (5.62)$$

连续可微，其中  $h$  定义同上.



若其中参数与函数都是一维的，则考虑等价的积分方程

$$\varphi(x, x_0, y_0, \lambda) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x, x_0, y_0, \lambda), \lambda) dx, \quad (5.63)$$

两侧分别求偏导，可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x A(x, x_0, y_0, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} dx \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = 1 + \int_{x_0}^x A(x, x_0, y_0, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} dx \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x B(x, x_0, y_0, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} dx \quad (5.66)$$

其中

$$A(x, x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x, x_0, y_0, \lambda), \lambda) \quad (5.67)$$

$$B(x, x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \varphi(x, x_0, y_0, \lambda), \lambda) \quad (5.68)$$

也就是说， $z = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$  满足初值问题

$$\frac{dz}{dx} = A(x, x_0, y_0, \lambda)z, \quad z(x_0) = -f(x_0, y_0) \quad (5.69)$$

$z = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$  满足初值问题

$$\frac{dz}{dx} = A(x, x_0, y_0, \lambda)z, \quad z(x_0) = 1 \quad (5.70)$$

$z = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$  满足初值问题

$$\frac{dz}{dx} = A(x, x_0, y_0, \lambda)z + B(x, x_0, y_0, \lambda), \quad z(x_0) = 0 \quad (5.71)$$

上面三个方程称为变分方程.

## 第 6 章 线性微分方程组

上一章中提到高阶微分方程可以转化为微分方程组，本章将主要讨论其中特殊的一类，即线性微分方程组。

### 定义 6.1

设函数  $y_1, \dots, y_n, f_1, \dots, f_n \in C((a, b))$ ，则称

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.1)$$

为  $n$  阶线性微分方程组，若使用矩阵表示  $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$ ，以及

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

则线性微分方程组有表示

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x). \quad (6.3)$$

当  $\mathbf{f}(x) = \mathbf{0}$  时，称为齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y}. \quad (6.4)$$

反之称为非齐次。



### 6.1 一般理论

在开始正题之前，首先给出如下命题

#### 定理 6.1

线性微分方程组 6.3 满足任意给定的初值条件  $\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0$  的解  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$  在  $(a, b)$  上存在唯一。



存在唯一性定理在前文中多有出现，其证明要点类似（上一章定义过范数），上面的表述看起来简洁不少，原因在于定义中要求  $A(x)$  是连续的，由此也可知  $A(x)\mathbf{y}$  对  $\mathbf{y}$  满足 Lipschitz 条件，在此不多叙述。

#### 6.1.1 齐次线性微分方程组

回想对一阶线性微分方程的讨论，首先从齐次方程开始。

#### 命题 6.1

齐次线性微分方程组 6.4 的解集  $\mathcal{S}$  是一个  $\mathbb{R}$  上的线性空间。




**证明** 只需一一验证线性空间的性质。

1. 加法阿贝尔群.
2. 两条数乘分配律.
3. 数乘结合律.
4. 数乘单位元.

此处略：)

可以看出，齐次与线性使得微分方程组的解具有非常好的结构，它们构成一个  $\mathbb{R}$  线性空间，因此在明确这个空间的诸多性质后，我们也就能够对（齐次）线性微分方程组的解有很多认识，这就是下面要做的事。

## 命题 6.2

$n$  阶齐次线性微分方程组 6.4 的解空间  $\mathcal{S}$  维数为  $n$ , 也即  $\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^n$ . 

**证明** 从初值角度考虑, 设  $x_0$  固定, 则根据存在唯一性定理, 对任意  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ , 存在唯一  $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$  使得  $\mathbf{y}_0(x_0) = \mathbf{y}_0$ , 因此可以构造如下映射

$$H: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{y}_0 \longmapsto \mathbf{y}(x) \quad (6.6)$$

根据存在唯一性定理, 有逆映射

$$H^{-1}: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (6.7)$$

$$\mathbf{y}(x) \longmapsto \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (6.8)$$


因此  $H$  是双射, 而对于任意  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{y}_1^0, \mathbf{y}_2^0 \in \mathbb{R}^n$ , 不难验证有

$$H(C_1 \mathbf{y}_1^0 + C_2 \mathbf{y}_2^0) = C_1 H(\mathbf{y}_1^0) + C_2 H(\mathbf{y}_2^0), \quad (6.9)$$

因此  $H$  是一个线性空间同构, 命题得证.

利用上面的结论, 可以很容易得到如下事实

## 推论 6.1

$n$  阶齐次微分方程组 6.4 至多有  $n$  个线性无关的解, 且方程的任意解都可由这样一组解张成. 

借助上面定义的同构  $H$ , 很容易就能得到这样一组解, 它们是  $\mathcal{S}/\mathbb{R}$  的一组基, 上面的命题是显然的.

根据线性代数中线性无关的定义, 很容易得到  $\mathcal{S}$  中线性无关的定义, 但为了更简便, 大多采用下面的行列式的方法来判定.

## 定义 6.2 (Wronsky 行列式)

设  $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x) \in \mathcal{S}$ , 则

$$W(x) := \det(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad (6.10)$$

称为这些解的 Wronsky 行列式. 

## 推论 6.2

上述 Wronsky 行列式满足下面的刘维尔公式

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{tr} A(x) dx} \iff \frac{dW}{dx} = \text{tr} A(x) W. \quad (6.11) \quad \text{img alt="heart icon" data-bbox="885 700 900 715}}$$

**证明** 计算可得

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad (6.12)$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}y_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{ij}y_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad (6.13)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ii}(x)W \quad (6.14)$$

$$= \operatorname{tr}A(x)W. \quad (6.15)$$

积分形式同样易得.

上面的推论告诉我们, Wronsky 行列式要么在  $(a, b)$  恒为 0, 要么恒不为 0, 也即 Wronsky 行列式在整体上的非 0 性与在一点处等价, 由此可得

### 命题 6.3

$\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x) \in \mathcal{S}$  线性无关等价于对应的 Wronsky 行列式

$$W(x) \neq 0 \quad (a < x < b). \quad (6.16)$$

**证明**  $W(x) \neq 0 \iff W(x_0) \neq 0$ , 这等价于

$$\mathbf{y}_1(x_0), \dots, \mathbf{y}_n(x_0) \quad (6.17)$$

线性无关, 也等价于它们在  $H$  下的像

$$\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x) \quad (6.18)$$

线性无关, 命题得证.

类似地, 也有

### 命题 6.4

$\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x) \in \mathcal{S}$  线性相关等价于对应的 Wronsky 行列式

$$W(x) \equiv 0 \quad (a < x < b). \quad (6.19)$$

上面的讨论了  $\mathcal{S}$  中的一组基, 那么也自然会想到将它们合并成一个矩阵, 即解矩阵


### 定义 6.3

对于方程组 6.4 的一组解, 定义

$$Y(x) := (y_{ij}(x))_{n \times n} = (\mathbf{y}_1(x) \quad \cdots \quad \mathbf{y}_n(x)) \quad (6.20)$$

为方程组的解矩阵, 且易知

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x), \quad (6.21)$$

即  $Y(x)$  是方程组的矩阵解. 特别地, 当上述解组为基本解组 (线性无关) 时, 称矩阵为基 (本) 解矩阵. 

引入基解矩阵有助于讨论问题, 比如如下命题.

### 命题 6.5

设  $\Phi(x)$  是 6.4 的一个基解矩阵, 则对于任一非奇异  $n$  阶常数矩阵  $C$ , 矩阵

$$\Psi(x) = \Phi(x)C \quad (6.22)$$



也是方程组的一个基解矩阵.

**证明** 从线性代数的角度看, 这是显然的.

### 6.1.2 非齐次线性微分方程组

接下来讨论非齐次的情况.

#### 命题 6.6

若  $\Phi(x)$  是对应齐次线性微分方程组的基解矩阵,  $\varphi^*(x)$  是一个特解, 则方程组 6.3 的任一解  $\mathbf{y} = \varphi(x)$  都可表示为

$$\mathbf{y} = \varphi(x) = \Phi(x)\mathbf{c} + \varphi^*(x), \quad (6.23)$$

其中  $\mathbf{c}$  是一个常数列向量.

上述命题指出, 想得到非齐次方程组的解, 只需要知道对应齐次方程组基解矩阵与一个特解, 仿照一阶方程的过程, 下面使用常数变易法可知, 事实上只需要基解矩阵就够了.

设 6.3 有特解  $\varphi^*(x) = \Phi(x)\mathbf{c}(x)$ , 则代入方程 6.3 可得

$$\Phi'(x)\mathbf{c}(x) + \Phi(x)\mathbf{c}'(x) = A(x)\Phi(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{f}(x), \quad (6.24)$$

也即

$$\Phi(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x), \quad (6.25)$$

故

$$\mathbf{c}(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds. \quad (6.26)$$

代入原方程, 可得特解为

$$\varphi^*(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds. \quad (6.27)$$

继而可得 6.3 的通解

$$\mathbf{y} = \Phi(x) \left( \mathbf{c} + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds \right). \quad (6.28)$$

解的形式与一阶方程是类似的.

## 6.2 常系数线性微分方程组

下面一小节讨论一类形式最简单的常系数线性微分方程组, 由于上一节已经建立了相关理论, 由此并不难进行下去.

#### 定义 6.4

常系数线性微分方程组, 是指线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad (6.29)$$

其中  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{f}$  是  $(a, b)$  上连续的向量函数. 特别地, 当  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  时, 称为齐次微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}, \quad (6.30)$$

### 6.2.1 常系数线性微分方程组解的描述

首先考虑齐次的情况. 特别当  $n = 1$  时, 矩阵  $A$  就是一个常数  $a$ , 而方程化为很熟悉的形式

$$\frac{dy}{dx} = ay, \quad (6.31)$$

其通解为  $y = Ce^{ax}$ ,  $C$  为任意常数, 若回到矩阵考虑, 则  $(e^{ax})$  可以视为方程“组”的一阶基解矩阵. 因此自然会考虑, 对于一般的情况是否有基解矩阵  $e^{xA}$ , 进一步得到通解  $\mathbf{y} = e^{xA}\mathbf{C}$ ? 回想在考虑高阶微分方程时, 我们通过对向量定义范数, 使得过去的诸多定性理论可以直接推广, 同样地, 下面首先来讨论矩阵指数的推广.

由数学分析相关内容可知, 指数函数有如下 Taylor 级数展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (6.32)$$

如果希望定义矩阵指数

$$e^A := 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad (6.33)$$

则首要考虑的是收敛性, 因此首先定义如下矩阵范数

#### 定义 6.5

在  $n$  阶矩阵空间  $\mathbb{R}^{n \times n}/\mathbb{R}$  上定义范数, 对任意  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|A\| := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|, \quad (6.34)$$

在不引起歧义的前提下, 也会使用  $|\cdot|$  代替  $\|\cdot\|$  表示范数.

容易验证, 矩阵范数确实是一个范数

#### 命题 6.7

对任意  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , 都有

1.  $\|A\| \geq 0$ , 当且仅当  $A = 0$  时取等.
2.  $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ .
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .
4.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , 特别地, 对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 都有  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ .

有了一些基本理论, 下面开始正题.

#### 命题 6.8

关于矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的幂级数

$$e^A := I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \quad (6.35)$$

绝对收敛.

**证明** 设

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{A^k}{k!}, \quad (6.36)$$

则由范数的性质,

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{A^k}{k!} \right| \quad (6.37)$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|A^k|}{k!} \quad (6.38)$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|A|^k}{k!} \quad (6.39)$$

根据  $\mathbb{R}$  上指数函数展开式的 Cauchy 收敛准则, 对于给定的  $|A| \in \mathbb{R}$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 对于任意  $n > N, p \in \mathbb{N}$ , 都有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \quad (6.40)$$

由此得证.

对比  $\mathbb{R}$  上指数函数的性质, 矩阵的指数也有类似性质.

### 命题 6.9

1.  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $e^A$  都可逆, 且  $(e^A)^{-1} = e^{A^{-1}}$ .
2.  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 若  $A, B$  可交换, 则  $e^{A+B} = e^A e^B$ .
3.  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, P \in GL_n(\mathbb{R})$ , 都有  $e^{PA P^{-1}} = P e^A P^{-1}$ .
4.  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 若  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$  为分块对角阵, 则  $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_s})$ .

其中第四条是在为后面的求解部分做准备.

做完了准备工作, 下面正式开始讨论常系数微分方程组.

### 命题 6.10

矩阵指数函数  $\Phi(x) = e^{xA}$  是常系数齐次线性微分方程组 6.30 的标准基解矩阵.

**证明** 计算得

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{de^{xA}}{dx} \quad (6.41)$$

$$= \frac{d}{dx} \left( I + xA + \frac{x^2}{2!} A^2 + \frac{x^3}{3!} A^3 + \dots \right) \quad (6.42)$$

$$= A + xA^2 + \frac{x^2}{2!} A^3 + \dots \quad (6.43)$$

$$= A \left( I + xA + \frac{x^2}{2!} A^2 + \dots \right) \quad (6.44)$$

$$= A e^{xA} = A \Phi(x) \quad (6.45)$$

故  $\Phi(x)$  是 6.30 的解矩阵. 并且由于

$$\Phi(0) = I, \det \Phi(0) = 1, \quad (6.46)$$

故  $\Phi(x)$  是标准基解矩阵, 命题得证.

由此, 并结合在前一节得到的一般理论有

### 推论 6.3

常系数线性微分方程组 6.29 在区间  $(a, b)$  上的通解为

$$\mathbf{y} = \Phi(x) \left( \mathbf{c} + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) \mathbf{f}(s) ds \right) \quad (6.47)$$

$$= e^{xA} \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A} \mathbf{f}(s) ds. \quad (6.48)$$

其中相应的记号如上节所述.

因为有前一节的铺垫, 上面的理论是很明确的, 由此问题便转化到了求解, 或者说求基解矩阵上. 幸运的是, 线性代数中的 Jordan 标准型理论可以帮助我们解决这一问题.

## 6.2.2 利用 Jordan 标准型求基解矩阵

这部分主要讨论, 对  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 如何求  $\Phi(x) = e^{xA}$ . 根据 Jordan 标准型理论, 对于任意的  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = PJP^{-1}$ ,  $J = \text{diag}(J_{11}(\lambda_1), \dots, J_{sm_s}(\lambda_s))$  为  $A$  的 Jordan 标准型. 根据矩阵指数的性质, 有

$$e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1} \quad (6.49)$$

$$e^{xJ_{ik}} = e^{\lambda_i x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{k \times k} \quad (6.50)$$

事实上, 根据基解矩阵的性质, 由于  $P$  可逆, 故  $e^{xA}P = Pe^{xJ}$  也是方程组的一个基解矩阵 (也即基解矩阵的“等价性”), 因此只要求出  $\Phi'(x) = e^{xA}P = Pe^{xJ}$  即可. 其中  $J$  是容易求的, 并且  $e^{xJ}$  也有很好的形式故只需要确定  $P$  即可, 而  $P$  的构造在 Jordan 标准型也讨论过 (循环子空间分解), 因此总结出如下定理.

### 定理 6.2

设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 相异特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , 重数为  $n_1, \dots, n_s$ , 则方程组 6.30 的基解矩阵为

$$\Phi(x) = \left( e^{\lambda_1 x} P_1(x) \quad \cdots \quad e^{\lambda_s x} P_s(x) \right), \quad (6.51)$$

其中

$$P_k(x) = \left( P_{k1}(x) \quad \cdots \quad P_{kn_k}(x) \right)_{n \times n_k}, \quad (6.52)$$

$$P_{ki}(x) = \mathbf{r}_{ki} + \frac{x}{1!}(A - \lambda_k I)\mathbf{r}_{ki} + \cdots + \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!}(A - \lambda_k I)^{n_k-1}\mathbf{r}_{ki}, \quad (6.53)$$

$$\mathbf{r}_{k.} \in \text{Ker}(A - \lambda_k I)^{n_k} = G(\lambda_k, A). \quad (6.54)$$

且满足  $\mathbf{r}_{k.}$  线性无关.



### 注

1. 上面的  $\mathbf{r}_{k.}$  是  $G(\lambda_k, A)$  的一组基, 但某些  $\mathbf{r}_{k.}$  会在  $\text{Ker}(A - \lambda_k I)^p, p < n_k$  中, 因此上面的  $P_{k.}(x)$  最高次并非总是为  $n_k$ .
2. 与教材 (丁书) 对该定理的描述相比, 上面采用了更简洁的表述.

上面的定理看起来比较繁琐, 但实际上与求 Jordan 型的过程没有很大差别, 实操过程也非常明确:

$$\text{求 Jordan 标准型} \longrightarrow \text{求“生成向量”} \longrightarrow \text{求基解矩阵各列} \longrightarrow \text{得到基解矩阵} \quad (6.55)$$

举个例子 (太懒不举了).

## 6.2.3 复根的实化

最后以一种特殊情况的讨论结束本章内容.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的特征值可能为复数, 这导致使用上面的方法可能会解出复根, 但根据前面的讨论知道方程有与这些复根相等数量的解, 因此需要对得到的复根进行实化. 根据多项式理论可知,  $\varphi_A(\lambda)$  的复根与其共轭根成对出现, 而当  $\mathbf{y}$  作为微分方程的复数解出现时,  $\bar{\mathbf{y}}$  也是方程的复数解, 且

$$\mathbf{u}(x) = \frac{\mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}}}{2} \quad (6.56)$$

$$\mathbf{v}(x) = \frac{\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}}{2i} \quad (6.57)$$

都是方程的实数解, 故可通过一堆共轭复数解得到两个实数解, 故最终方程组的复解均可“实化”. 特别地,

对于复指数函数  $e^{i\lambda x}$ , ( $\lambda, x \in \mathbb{R}$ ), 根据 Euler 公式, 可知

$$\cos \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2} \quad (6.58)$$

$$\sin \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i} \quad (6.59)$$

## 6.3 高阶线性微分方程

本节讨论  $n$  阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (6.60)$$

其中  $a_i(x), f(x) \in C((a, b))$ , 当  $f(x)$  不恒为 0 时, 称为非齐次线性微分方程, 反之为齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (6.61)$$

我们在上一章提到过, 高阶微分方程可以转化为微分方程组, 对线性方程也是如此. 设  $y_k = y^{(k-1)}$  ( $k = 1, \cdots, n$ ), 则原方程等价于

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad (6.62)$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

对应的齐次方程为

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y}, \quad (6.64)$$

各项定义同上. 并且根据前面几节的讨论可知, 方程满足初值条件

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

的解存在且唯一. 上面的  $A(x)$  有非常特殊的形式, 借此我们可以得到很多进一步的结果, 比如当解出等价的微分方程组后, 只需要取第一个分量, 就得到了原方程的解. 下面首先来讨论这些内容.

### 6.3.1 高阶线性微分方程组的一般理论

假设  $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$  分别是齐次线性微分方程 6.61 的  $n$  个解, 则由  $\mathbf{y}$  的定义, 可知方程组 6.64 的  $n$  个相应的解为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_n'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad (6.66)$$

其对应的 Wronski 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(x) & \varphi_2^{n-1}(x) & \cdots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \quad (6.67)$$

可以看出, Wronski 行列式实际上只由第一行的函数组  $\varphi(x)$  决定, 事实上, 这一组解的线性相关性, 也即有如下命题成立

#### 命题 6.11

设  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  是齐次线性微分方程 6.61 的  $n$  个解, 则这一组解线性相关等价于对应的 Wronski 行列式为 0.

特别地, 依赖矩阵  $A(x)$  的特殊形式, 此时刘维尔定理转化为

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_1(s)ds} \quad (a < x < b) \quad (6.68)$$

根据惯例, 下面通过常数变易法向非齐次前进.

#### 命题 6.12

设  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  是 6.61 的一个基本解组, 则非齐次线性方程 6.60 的通解为

$$y = \varphi^*(x) + (C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)), \quad (6.69)$$

其中特解

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) dx, \quad (6.70)$$

$W_k(x)$  是  $W(x)$  中  $n, k$  元素的代数余子式.

**证明** 事实上, 根据已有结论, 只需证明向量函数

$$\Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) f(s) ds \quad (6.71)$$

的第一个分量为  $\varphi^*(x)$ . 计算得 (注意到  $W(x) = \det \Phi(x)$ )

$$\int_{x_0}^x \Phi(x) \Phi^{-1}(s) f(s) ds \quad (6.72)$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{\Phi(x)}{W(s)} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & W_1(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & W_{n-1}(s) \\ * & \cdots & * & W_n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \quad (6.73)$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{W(s)} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(s) \\ \vdots \\ W_n(s) \end{pmatrix} ds \quad (6.74)$$

命题得证.

最后以对二阶微分方程的考虑结束本部分内容.

**命题 6.13**

设  $\varphi(x)$  是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6.75)$$

的一个非零解, 其中  $p(x), q(x) \in C((a, b))$ , 则方程通解为

$$y = \varphi(x) \left[ C_1 + C_2 \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(s) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}} \right] \quad (6.76)$$

**证明** 设  $y = \varphi(x)$  是方程的任意解, 则有刘维尔公式得

$$W(x) = \varphi y' - \varphi' y = C e^{\int p(x) dx}, \quad (6.77)$$

即

$$d\left(\frac{y}{\varphi}\right) = \frac{C}{\varphi^2} e^{-\int p(x) dx}, \quad (6.78)$$

积分即可得上述形式.

**命题 6.14**

若已知二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (6.79)$$

的相应齐次方程的两个线性无关特解  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ , 则其通解为

$$y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{W(s)} f(s) ds. \quad (6.80)$$

根据已有结论, 可以直接计算得到上述结论, 下面再给出一个常数变易法的证明.

**证明** 设非齐次方程有如下形式的解

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x), \quad (6.81)$$

$$y' = C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x) + C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x), \quad (6.82)$$

由于  $\Phi(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x)$ , 且  $\mathbf{f}(x)$  第一个分量为 0 (二阶形式), 故可令

$$C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \quad (6.83)$$

再求一次导数

$$y'' = C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) + C_1(x)\varphi_1''(x) + C_2(x)\varphi_2''(x), \quad (6.84)$$

将两式代入原方程, 综上可得二元一次方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (6.85)$$

解得

$$C_1'(x) = -\frac{\varphi_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)f(x)}{W(x)}, \quad (6.86)$$

积分代入原式, 可得题中式.

**6.3.2 常系数高阶线性微分方程**

下面回到常系数的简单情形, 讨论如下方程组

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \quad (6.87)$$

依然先考虑对应齐次方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \quad (6.88)$$

利用与上一节相同的变换, 高次方程可以化为方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f, \quad (6.89)$$

$$\frac{dy}{dx} = Ay. \quad (6.90)$$

此时  $A$  是一个友方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (6.91)$$

故

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (6.92)$$

$A$  的特征多项式也称为 6.87 的特征方程.

根据前面对常系数线性微分方程组的讨论, 可知

### 定理 6.3

对于常系数微分方程组 6.88, 设  $\varphi_A$  相异根为  $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ , 重数为  $n_1, \cdots, n_s$ , 则方程的一个基本解组为

$$\left( e^{\lambda_1 x} \quad \cdots \quad x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x} \quad \cdots \quad e^{\lambda_s x} \quad \cdots \quad x^{n_s-1} e^{\lambda_s x} \right) \quad (6.93)$$

**注** 可尝试通过常数变易法得到这些解.

**证明** 只需找出一个基解矩阵, 其第一行元素恰如上.

由于  $A$  是友方阵, 故  $d_A = \varphi_A$ , 也即每个  $J_i - \lambda_i$  的“指数”为  $n_i$ , 由此可知  $A$  的每个特征值仅有一个 Jordan 块, 设  $AP = PJ$ , 根据前面的理论可知

$$\Phi(x) = e^{xA} P = P e^{xJ} = P \operatorname{diag}(e^{xJ_1}, \cdots, e^{xJ_s}) \quad (6.94)$$

其中每个  $J_i$  恰好为特征值  $\lambda_i$  对应的一个 Jordan 块

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (6.95)$$

若将  $P$  分为  $s$  个大小分别为  $n_1, \cdots, n_s$  的块, 并且考虑  $A$  限制在其上的作用, 可知 (以  $P_1$  为例)

$$A(P_{11}, \cdots, P_{1n_1}) = (AP_{11}, \cdots, AP_{1n_1}) = (P_{11}, \cdots, P_{1n_1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (6.96)$$

利用已有结论, 可得

$$\Phi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \left( P_{11} \quad xP_{11} + P_{12} \quad \cdots \quad \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} P_{11} + \cdots + P_{1n_1} \right), \quad (6.97)$$

我们要考虑的只是  $P_1$  的第一行, 即

$$\Phi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \left( p_{11} \quad xp_{11} + p_{12} \quad \cdots \quad \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} p_{11} + \cdots + p_{1n_1} \right). \quad (6.98)$$



注意到  $A$  的特殊形式,

$$AP_{11} = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{31} \\ \vdots \\ p_{n1} \\ * \end{pmatrix} = \lambda_1 P_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} \\ \lambda_1 p_{21} \\ \vdots \\ \lambda_1 p_{n-1,1} \\ \lambda_1 p_{n1} \end{pmatrix} \quad (6.99)$$

故  $p_{11} \neq 0$  (否则导致  $P_{11} = 0$ ), 因此在 6.98 中, 可以通过初等变换得到形式更简单的基本解组

$$e^{\lambda_1 x} (1 \quad x \quad \dots \quad x^{n_1-1}) \quad (6.100)$$

$$= (e^{\lambda_1 x} \quad x e^{\lambda_1 x} \quad \dots \quad x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x}) \quad (6.101)$$

对于其它特征值亦然, 命题得证.

**注** 幂零矩阵的指数定义为使之为 0 的最小幂次.

对于复特征值, 前面已讨论过实化问题, 故不再重复.

根据前面的讨论, 可知齐次常系数高阶线性微分方程是容易求的, 而对于非齐次的形式, 只要知道一个特解, 就能得到其所有的解, 但对于不同的  $f$ , 很多时候特解难求, 但对某些特殊情况, 需要很巧妙的“猜”出.

## 第7章 定性理论与分支理论初步

本章主要通过微分方程本身的性质，不借助求解推断其解的性质，这是研究非线性微分方程的一个有效手段.

### 7.1 动力系统，相空间与轨线

首先从物理情形引入. 假设质点  $M$  在时刻  $t$  的空间坐标为  $\boldsymbol{x}$ ，并且其运动速度为  $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ ，仅与  $\boldsymbol{x}$  有关，则可推得质点  $M$  的运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}). \quad (7.1)$$

由此可以给出自治微分方程的定义.

#### 定义 7.1

称微分方程为自治微分方程，若等式右边的函数只和  $\boldsymbol{x}$  有关，也即有形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}). \quad (7.2)$$

若  $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$  满足方程解的存在唯一性定理的条件，则对任何初值条件

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad (7.3)$$

方程有唯一解  $\boldsymbol{x} = \varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ . 我们称  $\boldsymbol{x}$  取值的空间  $\mathbb{R}^n$  为相空间，而称  $(t, \boldsymbol{x})$  取值的空间  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$  为增广相空间.

按照微分方程的几何解释，方程7.2在增广像空间中定义了一个线素场，解  $\boldsymbol{x} = \varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$  在增广像空间中的图像是一条通过点  $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$  与线素场吻合的光滑曲线（积分曲线）.

从运动的观点考虑，方程7.2在相空间中每一点  $\boldsymbol{x}$  给定了一个速度向量  $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (v_1\boldsymbol{x}, \dots, v_n\boldsymbol{x})$ ，因此它在相空间中定义了一个速度场（向量场），而解  $\boldsymbol{x} = \varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$  在相空间给出了一条与速度场吻合的光滑曲线（称之为轨线），其中时间  $t$  为参数，且参数  $t_0$  对应轨线上的  $\boldsymbol{x}_0$ . 随着时间演变，质点坐标  $\boldsymbol{x}(t)$  在相空间中沿着轨线变动.

对比上述两种思考方向可知，积分曲线是增广相空间  $(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n)$  中的曲线，而轨线则是相空间  $(\mathbb{R}^n)$  中的曲线，并且积分曲线沿  $t$  轴对相空间的投影就是相应的轨线，轨线的物理意义在于：它是质点  $M$  的运动轨迹.

多数情况下，方程难以求解，因此需要从向量场  $\boldsymbol{v}$  的特性出发，获取轨线的几何特征，弄清轨线组的拓扑结构图（相图）. 因此，微分方程的定性理论又称为几何理论.

#### 定义 7.2 (平衡点)

对于方程7.2，若  $\boldsymbol{x}_0$  是  $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$  的零点，则此时方程有定常解  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ （可以看作退化的轨线），这时称  $\boldsymbol{x}_0$  为方程的平衡点，通常也称方程的平衡点为奇点

平衡点的意义在于，它表示了运动的平衡态，在其附近的轨线可能出现各种分布.

特别地，若解  $\boldsymbol{x} = \varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$  是一个非定常的周期运动，即存在  $T > 0$  使得

$$\varphi(t + T, t_0\boldsymbol{x}_0) = \varphi(t, t_0\boldsymbol{x}_0), \quad (7.4)$$

则它在相空间中的轨线是一条闭曲线，称为闭轨，随着  $t$  的增大，质点在闭轨上作周期运动.

#### 定义 7.3

对于任何一个自治微分方程，若右端函数满足解的存在唯一性条件，就可以对它做出如上动力学解释，并可引出相空间、轨线、平衡点等概念，在此意义下，称微分方程7.2为一个动力系统.

下面来考察动力系统的几个基本性质.

### 7.1.1 动力系统的性质

#### 积分曲线的平移不变性

这是说, 系统7.2的积分曲线在增广相空间中沿  $t$  轴任意平移后还是7.2的积分曲线.

事实上, 设  $\boldsymbol{x} = \varphi(t)$  是系统7.2的一个解, 则由方程的自治性可知, 对任意常数  $C$ ,  $\boldsymbol{x} = \varphi(t + C)$  也是系统的解.

#### 过相空间每一点轨线的唯一性

这是说, 过相空间中任一点, 系统7.2存在唯一的轨线通过此点.

事实上, 轨线的存在性是显然的, 因此只需证明轨线的唯一性. 假设在相空间的  $\boldsymbol{x}_0$  附近有两条不同的轨线段  $l_1, l_2$  都通过  $\boldsymbol{x}_0$ , 则在增广相空间中至少存在两条不同的积分曲线段  $\Gamma_1, \Gamma_2$  (可能同属于一条积分曲线), 使之在相空间中的投影分别是  $l_1, l_2$ . 现在将  $\Gamma_1$  所在积分曲线沿  $t$  轴向右平移  $t_2 - t_1$ , 则由平移不变性, 得到的  $\tilde{\Gamma}_1$  依然为系统的积分曲线, 并与  $\Gamma_2$  至少有一个公共点.

利用解的唯一性可知,  $\tilde{\Gamma}_1, \Gamma_2$  应完全重合, 从而它们在相空间有相同的投影. 但这导致  $\Gamma_1, \Gamma_2$  也在相空间有相同投影, 矛盾, 因此唯一性得证.

前两条性质说明, 每条轨线都是增广相空间中沿  $t$  轴可平移重合的一族积分曲线的投影, 而且只是这族积分曲线的投影.

由平移不变性还可知, 解  $\varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$  的一个平移解  $\varphi(t - t_0, 0, \boldsymbol{x}_0)$  也是系统的解, 并且二者满足同样的初值条件, 从而由解的唯一性它们恒等, 也即

$$\varphi(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \equiv \varphi(t - t_0, 0, \boldsymbol{x}_0). \quad (7.5)$$

#### 群的性质

系统7.2的解  $\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)$  满足关系式

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, \boldsymbol{x}_0)) = \varphi(t_2 + t_1, \boldsymbol{x}_0). \quad (7.6)$$

使用平移不变性与相同初值下解的唯一性可知上式成立; 另一方面, 上式表明, 在相空间中, 若从  $\boldsymbol{x}_0$  出发的运动沿轨线经过时间  $t_1$  到达  $\boldsymbol{x}_1 = \varphi(t_1, \boldsymbol{x}_0)$ , 再经过时间  $t_2$  到达  $\boldsymbol{x}_2 = \varphi(t_2, \varphi(t_1, \boldsymbol{x}_0))$ , 那么从  $\boldsymbol{x}_0$  出发的运动沿轨线经过时间  $t_1 + t_2$  也到达  $\boldsymbol{x}_2$ .

不妨设对任意的  $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , 系统7.2的解  $\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)$  都在  $-\infty < t < \infty$  上存在 (否则用  $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})/\sqrt{1+|\boldsymbol{v}|^2}$  代替  $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ , 二者具有相同的轨线), 则对任意固定的  $t$ , 解  $\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)$  给出了一个从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^n$  的变换  $\varphi_t$ , 将  $\boldsymbol{x}_0$  映射到  $\varphi(t, \boldsymbol{x}_0)$ . 因此

$$\Sigma := \{\varphi_t : t \in \mathbb{R}\} \quad (7.7)$$

是一个变换的集合, 具有如下性质

1.  $\varphi_0$  为  $\mathbb{R}^n$  中的恒同变换.
2.  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} \iff \varphi_s(\varphi_t(\boldsymbol{x}_0)) = \varphi_{s+t}(\boldsymbol{x}_0), \forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \forall s, t \in \mathbb{R}^1$ .
3.  $\varphi_t(\boldsymbol{x}_0)$  对  $(t, \boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$  连续.

也即  $(\Sigma, \circ)$  是一个群, 具有如上三条性质的单参数连续变换群称为一个**抽象动力系统 (拓扑动力系统)**; 若在此基础上还有  $\varphi_t$  可微, 则称之为**微分动力系统**.

**注** 对于非自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}), \quad (7.8)$$

上面的性质不再成立, 但可以将其视为高一维空间上的自治系统, 也即令

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(s, \mathbf{x}) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

则系统等价于  $n+1$  维相空间中的自治系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{y}). \quad (7.10)$$

## 7.2 解的稳定性

过去我们讨论了解对初值的连续依赖性, 即当初值点充分近时, 它们在一定区域上的积分曲线也会充分靠近, 但当时的讨论方法仅适用于有限闭区间, 当自变量扩展到无穷区间时, 解对初值不一定连续依赖, Poincaré 最早提出这一问题, Lyapunov 研究了这种自变量扩展到无穷区间上时, 解对初值的连续依赖性问题, 下面讨论 Lyapunov 稳定性的内容.

### 7.2.1 Lyapunov 稳定性

#### 定义 7.4 (Lyapunov 稳定性)

考虑方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}), \quad (7.11)$$

其中  $f \in C(\mathbb{R} \times G)$ , 并对  $\mathbf{x}$  满足 Lipschitz 条件. 再假设上述方程有一个解在  $[t_0, \infty)$  有定义, 若对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得只要

$$|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta, \quad (7.12)$$

方程以  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  为初值的解  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  也在  $[t_0, \infty)$  有定义, 并且满足

$$|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t)| < \varepsilon, \quad (7.13)$$

则称方程的解  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  是 (在 Lyapunov 意义下) 稳定的. 假设  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  稳定, 并且存在  $0 < \delta_1 \leq \delta$ , 使得只要

$$|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta_1, \quad (7.14)$$

就有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t)) = 0, \quad (7.15)$$

则称解  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  是 (在 Lyapunov 意义下) 渐进稳定的.

#### 注

1. 若将条件中  $\mathbf{x}_0$  范围改为区域  $D$ , 有上述结论成立, 则称  $D$  是解  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  的渐进稳定域 (或吸引域), 若吸引域是全空间, 则称解  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  是全局渐进稳定的.
2. 若将条件中的  $t \rightarrow +\infty$  改为  $t \rightarrow -\infty$ , 并假设解在  $(-\infty, t_0]$  的存在性, 则可得到负向渐进稳定, 一般来说, 两个方向的渐进稳定性是不同的.

接下来考虑一个例子

#### 例 7.1 讨论方程

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad (7.16)$$

零解的稳定性问题.

解 设  $x(0) = x_0$ , 求解可得

$$x(t) = x_0 e^t. \quad (7.17)$$

则

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| = |x_0 e^t| = |x_0| e^t, \quad (7.18)$$

并且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0| e^t = +\infty, \quad (7.19)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |x_0| e^t = 0, \quad (7.20)$$

由此可知方程的零解负向渐进稳定，正向渐进不稳定。

下面介绍两种判断特解稳定性的方法：Lyapunov 第一方法（线性近似方法）和 Lyapunov 第二方法。为简化讨论，下面只考虑方程的零解的稳定性（即假设  $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ），事实上，通过变换  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \varphi(t)$  总可以将原问题转化为上述情况。

## 7.2.2 线性近似方法

我们将方程 7.11 的右端展开成  $\mathbf{x}$  的线性部分与非线性部分之和，即考虑方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + N(t, \mathbf{x}), \quad (7.21)$$

其中  $A(t)$  是  $n$  阶函数矩阵，对  $t \in [t_0, \infty)$  连续，而函数  $N(t, \mathbf{x})$  在区域

$$G: t \geq t_0, \quad |\mathbf{x}| \leq M \quad (7.22)$$

连续，对  $\mathbf{x}$  满足 Lipschitz 条件，并且有  $N(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  以及  $|N(t, \mathbf{x})| = o(|\mathbf{x}|)$ 。由于需要考虑零解的稳定性，由此只需要考察当  $|\mathbf{x}_0|$  较小时以  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  为初值的解，可以预料，在一定条件下，其零解的稳定性与线性化方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \quad (7.23)$$

的零解的稳定性有密切联系。

特别地，当  $A(t)$  是常矩阵时，利用有关常系数齐次线性微分方程组基解矩阵的结果，容易得到下面的结论：

### 定理 7.1

设线性微分方程 7.23 中的  $A(t) = A$  为常数矩阵，则

1. 零解是正向（负向）渐进稳定的，当且仅当矩阵  $A$  的一切特征值的实部都是负（正）的。
2. 零解是正向（负向）稳定的，当且仅当矩阵  $A$  的一切特征值的实部都是非正（非负）的，并且那些实部为 0 的特征值对应的 Jordan 块可对角化。
3. 零解是正向（负向）不稳定的，当且仅当矩阵  $A$  至少有一个特征值的实部为正，或者有一个实部为 0 的特征值，它的 Jordan 块不可对角化。



一般而言，非线性微分方程 7.21 与线性方程 7.23 的零解具有不同的稳定性，但 Lyapunov 指出，当  $A(t) = A$  为常数矩阵，并且  $A$  的全部特征值实部均为负，或至少有一个具有正实部时，7.21 的零解的稳定性由它对应的线性化方程 7.23 决定，即如下两个定理：

### 定理 7.2

设微分方程 7.21 中的  $A(t) = A$  为常数矩阵，则

1. 若  $A$  的一切特征值的实部都是负的，的方程的零解是渐进稳定的。
2. 若  $A$  的特征值中至少有一个具有正的实部，则方程的零解是不稳定的。



### 证明

1. 需证，只要  $|\mathbf{x}_0|$  充分小，就有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| = 0 \quad (7.24)$$

由于  $A$  的特征值都有负实部, 故存在  $\sigma > 0$ , 使得

$$|e^{tA}| \leq A_0 e^{-\sigma t} \quad (7.25)$$

并且根据  $|N(t, \mathbf{x})| = o(|\mathbf{x}|)$  可知, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|\mathbf{x}| < \delta$  时, 就有

$$|N(t, \mathbf{x})| < \varepsilon |\mathbf{x}|. \quad (7.26)$$

由求解公式可知, 原方程解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} N(s, \mathbf{x}) ds, \quad (7.27)$$

由此估计

$$|\mathbf{x}(t)| \leq |e^{tA} \mathbf{x}_0| + \int_0^t |e^{(t-s)A} N(s, \mathbf{x})| ds \quad (7.28)$$

$$\leq A_0 |\mathbf{x}_0| e^{-\sigma t} + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} |N(s, \mathbf{x})| ds \quad (7.29)$$

$$\leq A_0 |\mathbf{x}_0| e^{-\sigma t} + \varepsilon \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} |\mathbf{x}| ds \quad (7.30)$$

这等价于

$$|e^{\sigma t} \mathbf{x}| \leq A_0 |\mathbf{x}_0| + \varepsilon \int_0^t |e^{\sigma s} \mathbf{x}| ds \quad (7.31)$$

根据 Gronwall 不等式, 可得

$$e^{\sigma t} |\mathbf{x}(t)| \leq A_0 |\mathbf{x}_0| e^{A_0 \varepsilon t} \quad (7.32)$$

$$|\mathbf{x}(t)| \leq A_0 |\mathbf{x}_0| e^{-(\sigma - A_0 \varepsilon)t} \quad (7.33)$$

即当  $t$  充分大时, 有  $|\mathbf{x}|$  充分小.

下面再来说明上面的一个细节, 即证明当  $\mathbf{x}_0$  充分小时,  $|\mathbf{x}| \leq \delta$  (这是为了使用关于  $N$  的估计条件). 令

$$T^* = \sup\{T : |\mathbf{x}(t)| < \delta, \forall t \in [0, T]\}, \quad (7.34)$$

则  $|\mathbf{x}(T^*)| = \delta$ , 且对任意  $t \in [0, T^*]$ , 都有 (重复上面的过程, 由于现在是有限区间, 故不会循环论证)

$$|\mathbf{x}(t)| \leq A_0 |\mathbf{x}_0| e^{-(\sigma - A_0 \varepsilon)t} \quad (7.35)$$

取  $\mathbf{x}_0$ , 使得  $A_0 |\mathbf{x}_0| \leq \frac{\delta}{2}$ , 并取  $\varepsilon$  充分小, 有

$$|\mathbf{x}(t)| \leq A_0 |\mathbf{x}_0| \leq \frac{\delta}{2} \quad (7.36)$$

但这与在  $T^*$  处取值矛盾, 故  $T^* = +\infty$ .

### 7.2.3 Lyapunov 第二方法

Lyapunov 第二方法的动机来自能量观点, 即认为**如果系统的总能量随时间增长而连续地衰减, 直到平衡状态为止, 则振动系统是稳定的**, 反之不然. 比如考虑在竖直圆环轨道上放置小球, 当放在顶端时, 小球受微小扰动后不会回到初始状态 (动能持续增大); 但当放到最底下时, 受微小扰动后 (有摩擦) 运动, 一段时间后仍然能回到初始状态 (动能与势能减少).

考虑自治系统

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = f(\mathbf{y}), \quad (7.37)$$

其中  $f$  在  $D \subset \mathbb{R}^n$  连续, 并且  $0$  是  $f$  的孤立零点, 即存在邻域, 其中无其它零点. 首先作如下定义

#### 定义 7.5

令  $V(\mathbf{y})$  是区域  $\Omega$  上的标量连续函数,  $0 \in \Omega$ , 则

1. 称  $V$  在  $\Omega$  正定, 若  $V(0) = 0$ , 且对任意  $\mathbf{y} \in \Omega \setminus \{0\}$ , 都有  $V(\mathbf{y}) > 0$ .

2. 称  $V$  在  $\Omega$  负定, 若  $V(0) = 0$ , 且对任意  $\mathbf{y} \in \Omega \setminus \{0\}$ , 都有  $V(\mathbf{y}) < 0$ .

再定义  $V$  关于方程组的导数

### 定义 7.6

设  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义  $V$  关于方程组  $\mathbf{y}'_t = f(\mathbf{y})$  的导数

$$V^*(\mathbf{y}) := \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} \quad (7.38)$$

$$= (\nabla V) \cdot \mathbf{y}. \quad (7.39)$$

当  $\Phi(t)$  是对应方程组的解时, 根据上述定义有

$$\frac{d}{dt} V(\Phi(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} \quad (7.40)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_k} \Phi_i(t) \quad (7.41)$$

$$(7.42)$$

### 定理 7.3

若关于方程组 7.37, 存在标量连续函数  $V(\mathbf{y})$ , 在包含原点的某个区域  $\Omega$  正定, 且满足  $V^*(\mathbf{y}) \leq 0$ , 则方程组的解是稳定的.

**证明** 只需要证明对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta$ , 当  $|\mathbf{y}_0| \leq \delta$  时, 必有  $|\Phi(t, \mathbf{y}_0)| < \varepsilon$ .

取  $r > 0$ , 使得  $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$ , 则  $V(\mathbf{y})$  在  $B_r(0)$  正定, 且满足  $V^*(\mathbf{y}) \leq 0$ . 对任意  $0 < \varepsilon < r$ , 令  $S = \{\mathbf{y} : \varepsilon \leq |\mathbf{y}| \leq r\}$ , 则由于  $V(\mathbf{y})$  连续, 它在  $S$  上有最小值, 令

$$\mu = \min_{\mathbf{y} \in S} V(\mathbf{y}). \quad (7.43)$$

由于  $V(0) = 0$ , 故存在  $\delta$ , 对任意  $|\mathbf{y}| \leq \delta$ , 都有  $V(\mathbf{y}) < \mu$ . 下面说明, 这样得到的  $\delta$  就是所需要的  $\delta$ .

对任意  $0 \neq \mathbf{y}_0 \in B_\delta(0)$ , 存在唯一解  $\mathbf{y} = \Phi(t)$  以其为初值, 设解的最大存在区间为  $[0, t_1)$ . 且有

$$V^*(\Phi) = \frac{dV}{dt} \leq 0. \quad (7.44)$$

这表明对任意  $t \in [0, t_1)$ , 都有

$$V(\Phi(t)) \leq V(\Phi(0)) = V(\mathbf{y}_0) < \mu. \quad (7.45)$$

下面说明, 对任意  $t \in [0, t_1)$ , 都有  $|\Phi(t)| < \varepsilon$ , 若不然, 则存在  $\bar{t} \in [0, t_1)$ , 使得  $|\Phi(\bar{t})| = \varepsilon$ , 这导致

$$\Phi(\bar{t}) \in S, \quad V(\Phi(\bar{t})) \geq \mu, \quad (7.46)$$

矛盾. 在此基础上根据延拓定理, 必有  $t_1 = +\infty$ , 即对任意  $t \geq 0$ , 都有

$$|\Phi(t)| < \varepsilon, \quad (7.47)$$

### 定理 7.4

若关于方程组 7.37, 存在标量连续函数  $V(\mathbf{y})$ , 在包含原点的某个区域  $\Omega$  正定, 且满足  $V^*(\mathbf{y}) < 0$ , 则方程组的解是渐进稳定的.

**证明** 首先由前一条定理可知, 解至少是稳定的. 取  $r > 0$ , 使得  $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$ , 以及  $\varepsilon = r$ , 则存在  $\delta > 0$ , 对任意初值  $\mathbf{y}_0 \in B_\delta(0)$ , 由其决定的唯一解

$$|\Phi_t(\mathbf{y}_0)| < r. \quad (7.48)$$



记  $\Phi(t) = \Phi_t(\mathbf{y}_0)$ , 则由于

$$V^*(\Phi(t)) = \frac{dV}{dt} < 0, \quad (7.49)$$

故  $V$  关于  $t$  单调递减, 且根据其正定性可知  $t \rightarrow +\infty$  极限存在, 若该极限  $\eta \neq 0$ , 则根据  $V$  关于  $t$  的单调递减性可知, 有  $V(\Phi(t)) \geq \eta$ . 由于  $V(0) = 0$ , 故存在  $\alpha$ , 使得对任意  $|\mathbf{y}| < \alpha$ , 都有

$$V(\mathbf{y}) \leq \eta, \quad (7.50)$$


令  $S = \{\mathbf{y} : \alpha \leq |\mathbf{y}| \leq r\}$ , 则  $-V^*$  在  $S$  上有最小值  $\mu > 0$ , 由此积分得

$$V(\Phi(t)) - V(\Phi(0)) \leq -\mu t \quad (7.51)$$

$$V(\Phi(t)) \leq -\mu t + V(\Phi(0)), \quad (7.52)$$

这表明当  $t$  充分大时,  $V < 0$ , 矛盾.

### 定理 7.5

若关于方程组 7.37, 存在标量连续函数  $V(\mathbf{y})$ , 满足  $V(0) = 0$ , 并且在任意  $B_r(0)$  中存在  $a$ , 使得  $V(a) > 0$ , 且满足  $V^*(\mathbf{y}) > 0$ , 则方程组的解不稳定. 

**证明** 只需证明: 存在  $\varepsilon > 0$ , 对任意  $\delta > 0$ , 都存在  $a \in B_\delta(0), t$ , 使得  $|\Phi(t, a)| = \varepsilon$ .

取  $r > 0$ , 使得  $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$ , 故存在  $M > 0$ , 对任意  $\mathbf{y} \in B_r(0)$ , 都有  $|V(\mathbf{y})| \leq M$ . 由题知, 在任意  $B_r(0)$  中存在  $a$ , 使得  $V(a) > 0$ , 只需证明存在  $t$ , 使得  $|\varphi_t(a)| = r$ . 若不然, 则根据连续性, 对任意  $t \geq 0$ , 都有

$$|\Phi_t(a)| < r. \quad (7.53)$$

假设对任意  $t \geq 0$ , 都有  $\Phi_t(a) \in B_\delta(0)$ , 则根据  $V$  对  $t$  的单调性可得

$$V(\Phi(t)) \geq V(\Phi(0)) = V(a). \quad (7.54)$$

而由于  $V(0) = 0$ ,  $V$  连续, 故存在  $\alpha$ , 使得对任意  $|\mathbf{y}| < \alpha$ , 都有

$$V(\mathbf{y}) \leq V(a), \quad (7.55)$$

也可知  $\alpha \leq |\Phi(t)| = r$ . 令  $S = \{\mathbf{y} : \alpha \leq |\mathbf{y}| \leq r\}$ , 则  $V^*(\mathbf{y})$  在  $S$  上有正下界  $\mu$ , 同样积分可知

$$V(\Phi(t)) \geq \mu t + V(a), \quad (7.56)$$

这与  $V(\Phi(t)) \leq M$  矛盾.

最后再给出一个命题.


### 命题 7.1

若存在函数  $V$  在含 0 的区域  $\Omega$  上满足

$$V^* = \lambda V + W, \quad (7.57)$$

其中  $\lambda > 0$ ,  $W$  满足其一: 恒为零、恒非负、恒非正 (或简记为符号不变), 且在原点的任何邻域内存在一点  $a$  使得

$$V(a)W(a) > 0, \quad (7.58)$$

则零解不稳定. 

Lyapunov 第二方法看起来很好, 但很多时候的困难在于找到符合条件的  $V$ . 但往往我们研究的方程都有特定的物理意义, 因此可以得到特殊的  $V$ .

**例 7.2** 考虑方程  $y'' + g(y) = 0$ , 满足  $y(g(y)) > 0, g(0) = 0$ ,  $g$  在  $|y| < k$  连续. 由此方程可得

$$y'(y'' + g(y)) = 0, \quad (7.59)$$



即

$$\left[\left(\frac{1}{2}y'\right)^2\right]' + \left[\int_0^y g(s)ds\right]' = 0, \quad (7.60)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(y) = \frac{1}{2}(y')^2 + \int_0^y g(s)ds, \quad \Omega = \{(y_1, y_2) : |y_1| < k, |y_2| < +\infty\} \quad (7.61)$$

称为**能量**. 若设  $y_1 = y, y_2 = y'$ , 则

$$V(y) = V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_2)^2 + \int_0^{y_1} g(s)ds, \quad (7.62)$$

可知

$$V^*(y) = \frac{dV}{dt} = 0. \quad (7.63)$$

由前面的定理可知零解稳定, 进一步可以看到它不是渐进稳定的, 因为  $V^* \equiv 0$ , 故  $V$  为常数, 即  $V(\Phi(t)) \equiv V(\Phi(0)) = y_0 \neq 0$ , 因此  $\Phi(t)$  不趋于 0.

**例 7.3** 考虑 Lienard 方程  $y'' + y' + g(y) = 0$ ,  $g(y)$  满足上例假设, 讨论零解稳定性.

令  $y_1 = y, y_2 = y'$ , 则方程转化为

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2 - g(y_1) \end{cases} \quad (7.64)$$

若设

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_2)^2 + \int_0^{y_1} g(s)ds, \quad \Omega = \{(y_1, y_2) : |y_1| < k, |y_2| < +\infty\}, \quad (7.65)$$

可知

$$V^*(y) = -y_2^2 \leq 0, \quad (7.66)$$

即零解是稳定的, 若要进一步证明零解渐进稳定, 需要重新构造函数

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_2)^2 + \int_0^{y_1} g(s)ds + \beta y_2 g(y_1). \quad (7.67)$$

$V(0, 0) = 0$  仍然成立, 因此需要保证  $V$  正定. 根据均值不等式,

$$V(y_1, y_2) \geq \frac{1}{2}(y_2)^2 + \int_0^{y_1} g(s)ds - \frac{\beta}{2}(y_2^2 + g(y_1)^2) \quad (7.68)$$

$$= \frac{1-\beta}{2}y_2^2 + \int_0^{y_1} g(s)ds - \frac{\beta}{2}g(y_1)^2 \quad (7.69)$$

可知当  $\beta$  充分小时, 第一项正定, 再由于

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{g(y_1)^2}{\int_0^{y_1} g(s)ds} = 2g'(0), \quad (7.70)$$

故存在  $k_1 > 0$ , 对任意  $|y_1| < k_1$ , 满足

$$g(y_1)^2 \leq C \int_0^{y_1} g(s)ds \quad (7.71)$$

故

$$V(y_1, y_2) \geq \frac{1-\beta}{2}y_2^2 + \left(1 - \frac{\beta C}{2}\right) \int_0^{y_1} g(s)ds, \quad (7.72)$$

若  $\beta < 2/C$ , 则可保证正定. 还要保证  $V^* < 0$ ,

$$V^*(y_1, y_2) = -y_2^2 - \beta g(y_1)^2 + \beta g'(y_1)y_2^2 - \beta g(y_1)y_2 \quad (7.73)$$

$$\leq -y_2^2 - \beta g(y_1)^2 + M\beta y_2^2 + \frac{\beta}{2}(g(y_1)^2 + y_2^2) \quad (7.74)$$

$$= (-1 + M\beta + \frac{\beta}{2})y_2^2 - \frac{\beta}{2}g(y_1)^2. \quad (7.75)$$

取  $\beta$  充分小, 使得

$$M\beta + \frac{1}{2}\beta < \frac{1}{2}, \quad (7.76)$$

可使  $V^* < 0$ .

再取  $\Omega = \{(y_1, y_2) : |y_1| < k_1, |y_2| < +\infty\}$ , 可知方程零解渐进稳定.

**例 7.4** 分析方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\varepsilon x + 2y)(z + 1) \\ \frac{dy}{dt} = (-x + \varepsilon y)(z + 1) \\ \frac{dz}{dt} = -z^3 \end{cases} \quad (7.77)$$

平衡点的稳定性.

**解** 易知平衡点恰好为零点. 根据右边形式, 首先考虑线性化方法, 即考虑

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 0 \\ -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (7.78)$$

可知  $A$  的特征值为  $0, \varepsilon \pm \sqrt{2}i$ , 即得

1. 若  $\varepsilon > 0$ , 则零解不稳定.
2. 若  $\varepsilon < 0$ , 则零解线性稳定.

为了得到更精确的结论, 下面对  $\varepsilon < 0$  情形考虑 Lyapunov 第二方法. 构造二次型

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2, \quad (7.79)$$

计算得

$$V^* = 2ax(\varepsilon x + 2y)(z + 1) + 2by(-x + \varepsilon y)(z + 1) - 2cz^4 \quad (7.80)$$

$$= (2a\varepsilon x^2 + (4a - 2b)xy + 2b\varepsilon y^2)(z + 1) - 2cz^4 \quad (7.81)$$

令  $\Omega = \{(x, y, z) : z > -1\}$ , 并取  $a = 1, b = 2, c = 1$ , 使  $4a - 2b = 0$ , 得到

$$V^* = 2\varepsilon(x^2 + 2y^2)(z + 1) - 2z^4 < 0. \quad (7.82)$$

因此零解渐进稳定.

最后单独考虑  $\varepsilon = 0$  情形, 此时方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y(z + 1) \\ \frac{dy}{dt} = -x(z + 1) \\ \frac{dz}{dt} = -z^3 \end{cases} \quad (7.83)$$

可解得

$$z = \frac{1}{\sqrt{2t + C}}, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = Const, \quad (7.84)$$

这表明零解稳定, 但不是渐进稳定的.

## 7.3 平面动力系统

这一部分考虑最常见的动力系统, 即在二维平面上的动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) \\ \dot{y} = Y(x, y) \end{cases} \quad (7.85)$$

其中  $X, Y$  在  $\mathbb{R}^2$  连续可微.

## 定义 7.7

称  $P(x_0, y_0)$  为 7.85 的初等奇点, 若

$$X(P) = Y(P) = 0, \quad \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right|_P \neq 0. \quad (7.86)$$

在后面的讨论中, 方便起见, 不妨设  $(0, 0)$  是 7.85 的初等奇点. 由于  $X, Y$  连续可微, 故可进行 Taylor 展开

$$X(x, y) = X(0, 0) + \partial_x X(0, 0)x + \partial_y X(0, 0)y + o(\rho) \quad (7.87)$$

$$:= ax + by + \varphi(x, y) \quad (7.88)$$

$$Y(x, y) = Y(0, 0) + \partial_x Y(0, 0)x + \partial_y Y(0, 0)y + o(\rho) \quad (7.89)$$

$$:= cx + dy + \psi(x, y) \quad (7.90)$$

原方程化为

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + \varphi(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + \psi(x, y) \end{cases} \quad (7.91)$$

其中  $\varphi, \psi = o(\rho)$ .

## 7.3.1 平面线性动力系统

首先来研究其齐次形式

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (7.92)$$

我们的目标是画出初等奇点附近的相图.

进行很熟悉的操作, 将其写成向量形式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (7.93)$$

设系数矩阵为  $A$ , 借助 Jordan 标准型理论, 取矩阵  $T$  使得  $T^{-1}AT = J$ , 并设

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (7.94)$$

则方程组 7.92 化为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (7.95)$$

因此可不妨设  $A$  为 Jordan 型. 根据  $A$  特征根情况, 可知  $A$  只需分为以下情况讨论即可

1. 可对角化, 此时  $A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$ ,  $\lambda, \mu \neq 0$ .

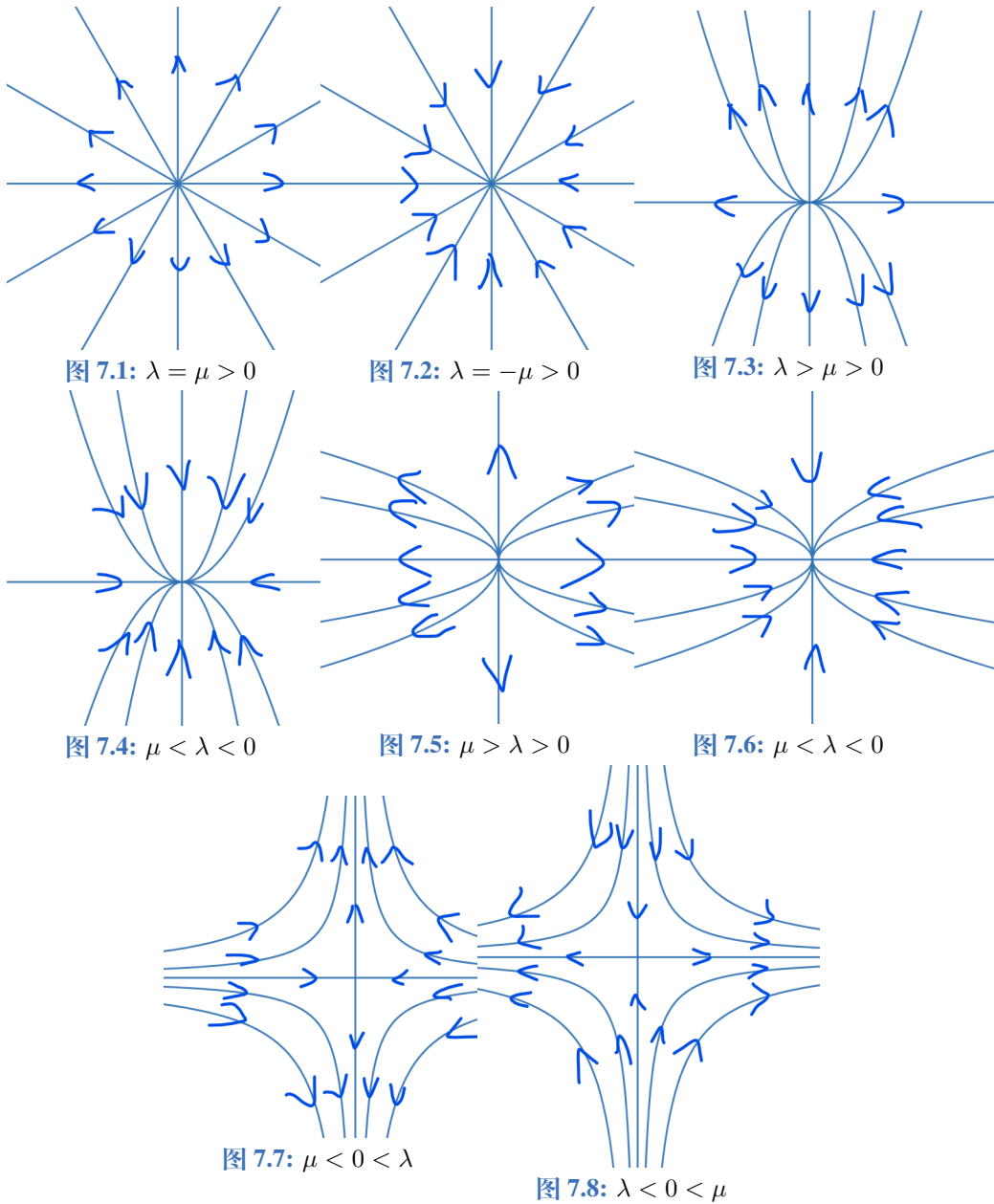
此时原方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases} \quad (7.96)$$

直接求解可知

$$y = C|x|^{\frac{\lambda}{\mu}} \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (7.97)$$

通过讨论  $\lambda, \mu$  的关系, 其相图可分类为星形、双向、鞍点三种, 此时的奇点称为双向奇点.



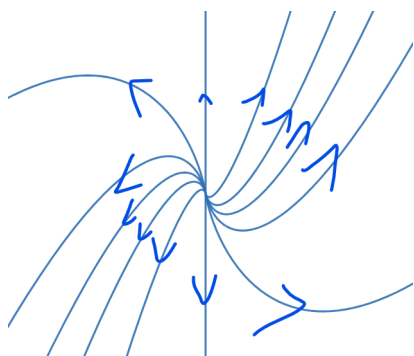
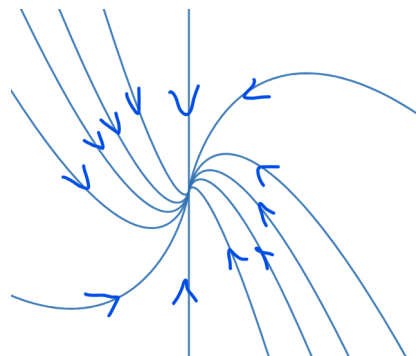
2. 不可对角化, 此时  $A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \neq 0$ . 此时原方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases} \quad (7.98)$$

直接求解可知

$$y = \frac{1}{\lambda} x \ln |x| + Cx \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (7.99)$$

通过讨论  $\lambda$  的大小, 其相图可分类为, 此时的奇点称为单向奇点.

图 7.9:  $\lambda > 0$ 图 7.10:  $\lambda < 0$ 

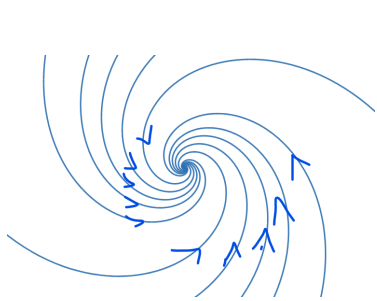
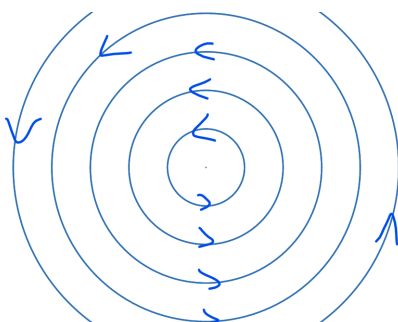
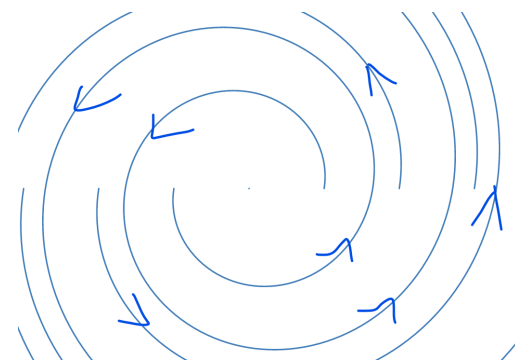
3. 一对共轭复根. 此时  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\beta \neq 0$ . 此时原方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \alpha x + \beta y \end{cases} \quad (7.100)$$

作极坐标换元  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , 可得通解为<sup>1</sup>

$$r = Ce^{\alpha t} = Ce^{\frac{\alpha}{\beta} \theta} \quad (7.101)$$

这里不妨设  $\beta > 0$ , 对应逆时针转动. 通过讨论  $\alpha$  的大小, 其相图可分类为, 此时的奇点称为焦点或中心点.

图 7.11:  $\alpha < 0, \beta > 0$ 图 7.12:  $\alpha = 0, \beta > 0$ 图 7.13:  $\alpha > 0, \beta > 0$ 

总结上述结果, 并通过韦达定理进行区分, 可得如下定理

#### 定理 7.6 (初等奇点分类定理)

对于系统 7.92, 记  $p = -\text{tr}A, q = \det A$ , 则对初等奇点  $(0, 0)$  做如下分类

1. 异号实根:  $q < 0$ , 鞍点.
2. 同号实根:  $q > 0, p^2 > 4q$ , 双向结点.
3. 二重根:  $q > 0, p^2 = 4q$ , 单向结点 (不可对角化) 或星形结点 (可对角化).
4. 共轭根:  $q > 0, 0 < p^2 < 4q$ , 焦点.
5. 共轭虚根:  $q > 0, p = 0$ , 中心点.

此外, 在 2~4 中, 当  $p < 0$  时, 奇点是不稳定的.



<sup>1</sup>事实上, 这里也可以从复数的角度考虑.

通过上面对特殊情况 ( $A$  为 Jordan 型) 的讨论, 我们可以很容易回到一般  $A$  情况, 因为二者的相图仅相差一个线性变换. 也就是说, 特征值不变, 奇点类型不变, 相图种类不变, 只需要找到“特殊方向”, 即当  $t \rightarrow \pm\infty$  时轨线沿该方向趋向于奇点/远离奇点, 即可.

**例 7.5** 作系统在初等奇点处的相图.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases} \quad (7.102)$$

**解** 初等奇点为  $(0, 0)$ , 且  $p = -\text{tr}A = 1$ ,  $q = \det A = -12$ , 可知特征值为两异号实根, 奇点为鞍点. 设特殊方向所在直线为  $y = kx$ , 代入原方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{2x + 3y} = \frac{2 - 3k}{2 + 3k} = k, \quad (7.103)$$

得到  $k = -2, \frac{1}{3}$ . 通过取特殊点, 也可得到轨线方向.

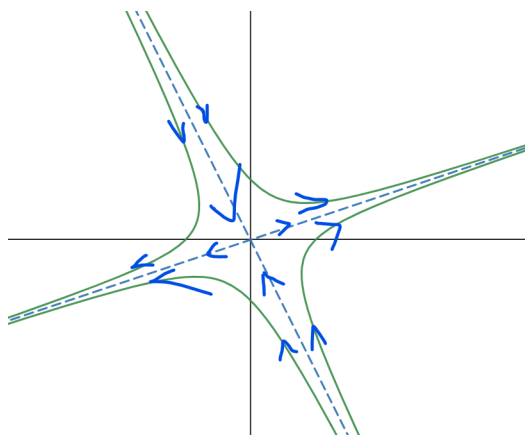


图 7.14: 轨线

**例 7.6** 作系统在初等奇点处的相图.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \quad (7.104)$$

**解** 初等奇点为  $(0, 0)$ , 且  $p = -4$ ,  $q = 3$ , 可知特征值为两正实根, 奇点为双向结点. 设特殊方向所在直线为  $y = kx$ , 代入原方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3x} = \frac{2 + k}{3} = k, \quad (7.105)$$

得到  $k = 1$ . 但奇点是双向结点, 故可知另一个特殊方向为  $x = 0$ . 取特殊点可得轨线方向.

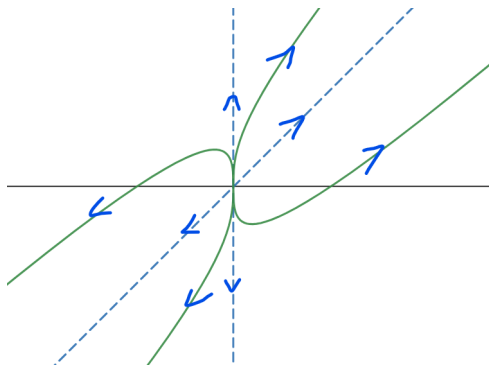


图 7.15: 轨线

### 7.3.2 nullcline 方法

在前面提到过 nullcline, 指在  $\dot{y} = f(x, y)$  中使得右侧等于 0 的曲线, 在平面动力系统中, 借助 nullcline 可以较快确定相图.

**例 7.7** 考虑系统奇点附近相图.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = x - 2 \end{cases} \quad (7.106)$$

**解** 平衡点  $(2, 4)$ , 且 x-nullcline 为  $y = x^2$ , y-nullcline 为  $x = 2$ . 为了在平衡点展开, 将其平移, 平移后的线性化系统为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -4\tilde{x} + \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} \end{cases} \quad (7.107)$$

得到  $p = 4, q = -1$ , 即  $(0, 0)$  为鞍点, 再由于特殊方向为  $y = (2 \pm \sqrt{5})x$ , 因此得到相图

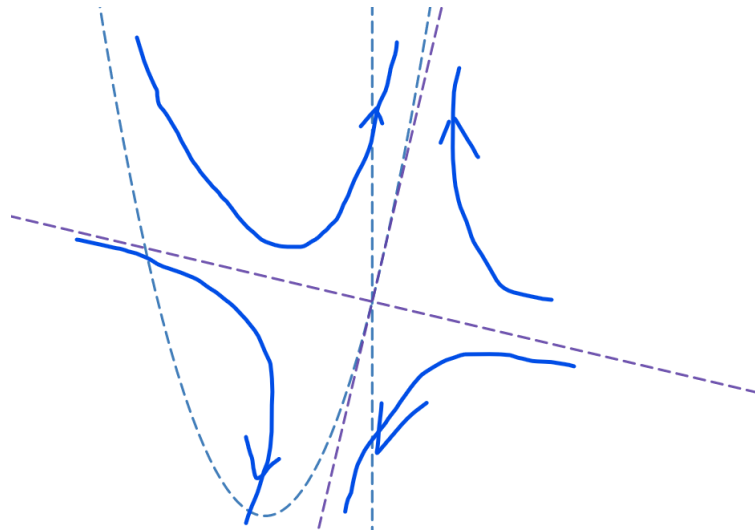


图 7.16: 相图

**例 7.8** 考虑系统奇点附近相图.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = -xy + a(x^2 - 1) = -x(y - a(x - \frac{1}{x})) \end{cases} \quad (7.108)$$

**解**

1.  $a = 0$ .

方程化为

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = -xy \end{cases} \quad (7.109)$$

此时 x-nullcline 为  $x = \pm 1$ , y-nullcline 为  $x = 0, y = 0$ , 在平衡点  $(1, 0)$  处展开得到线性化方程

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x - 1) \\ \dot{y} = -(y + 1) \end{cases} \quad (7.110)$$

省略一些步骤, 总之得到  $(\pm 1, 0)$  是方程的鞍点, 故相图为这里的轨线两边趋向不同奇点, 称为异宿轨线.

2.  $a > 0$ .

此时 x-nullcline 为  $x = \pm 1$ , y-nullcline 为  $y = a(x - \frac{1}{x}), x = 0$ . 根据线性化方程, 可以得到  $(\pm 1, 0)$  依然是

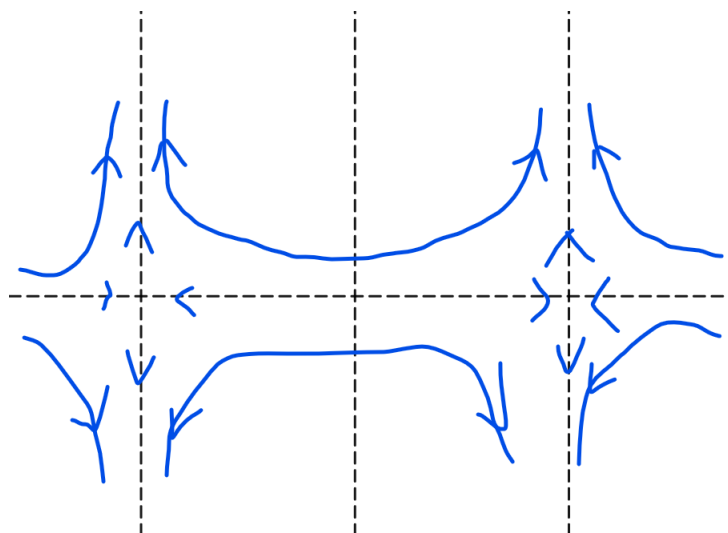


图 7.17: 相图

鞍点,



## 第8章 波动方程

### 8.1 一阶偏微分方程

这里介绍特征线法解一阶 PDE.

考虑方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (8.1)$$

若  $x = x(t)$ , 令  $U(t) = u(x(t), t)$ , 则

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (8.2)$$

若还有  $a(x(t), t) = \partial_t x$ , 则原方程化为

$$\frac{dU}{dt} + b(x(t), t)U(t) = f(x(t), t), \quad (8.3)$$

令  $x(0) = c$ , 则 8.1 等价于

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x(t), t) \\ x(0) = c \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + b(x(t), t)U(t) = f(x(t), t) \\ U(0) = \phi(0) \end{cases} \quad (8.4)$$

在此消去  $c$ , 即可得到一阶偏微分方程的解.

**例 8.1** 解方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (8.5)$$

**解** 考虑方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a \\ x(0) = C \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = 0 \\ U(0) = \phi(C) \end{cases} \quad (8.6)$$

可得  $x(t) = -at + C$ ,  $U \equiv \phi(C)$ , 消去  $C$  得到

$$U(t) = \phi(x(t) + at), \quad u(x, t) = \phi(x + at). \quad (8.7)$$

**例 8.2** 解方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (x+t) \frac{\partial u}{\partial x} + u = x \\ u(x, 0) = x \end{cases} \quad (8.8)$$

**解** 考虑方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) + t \\ x(0) = C \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + U(t) = Ce^t + e^t - t - 1 \\ U(0) = C \end{cases} \quad (8.9)$$

可知

$$x(t) = Ce^t + e^t - t - 1 \quad (8.10)$$

$$U(t) = -t + \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{C(e^t - e^{-t})}{2} \quad (8.11)$$

消去  $C$  得到

$$U(x, t) = \frac{x - t + 1}{2} - e^{-t} + \frac{x + t - 1}{2} e^{-2t} \quad (8.12)$$

## 8.2 波动方程

对于（齐次）方程

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad (8.13)$$

微分算子

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x), \quad (8.14)$$

因此原方程化为

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x)v = 0 \\ (\partial_t - \partial_x)u = v \end{cases} \quad (8.15)$$

对于一般波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t), & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.16)$$

以及边值

1. 第一类边值（Dirichlet 边值）:

$$u(x, t) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega. \quad (8.17)$$

2. 第二类边值（Newman 边值）:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega. \quad (8.18)$$

3. 第三类边值（Robin 边值）:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) + \alpha u(x, t) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega. \quad (8.19)$$

### 8.2.1 问题的简化

对于初值问题8.16，根据其线性性，可以考虑分别关于  $u_1, u_2, u_3$  的三个方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 = 0 \\ u_1(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u_1(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \Delta u_2 = 0 \\ u_2(x, 0) = 0 \\ \partial_t u_2(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t^2 u_3 - \Delta u_3 = f(x, t) \\ u_3(x, 0) = 0 \\ \partial_t u_3(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

则  $u = u_1 + u_2 + u_3$  为方程的解. 如下定理表明，只需要解一个方程，其余二者均可由此解表示.

#### 定理 8.1

设方程如上所设， $u_2 = M_\psi(x, t)$  为对应方程的解，则其余两方程的解为

$$u_1 = \frac{\partial M_\varphi}{\partial t} \quad (8.21)$$

$$u_3 = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau \quad (8.22)$$

**证明** 令  $\tilde{u}_1 = M_\varphi(x, t)$ ，则其满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u}_1 - \Delta \tilde{u}_1 = 0 \\ \tilde{u}_1(x, 0) = 0 \\ \partial_t \tilde{u}_1(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (8.23)$$

若令  $v = \partial_t \tilde{u}_1$ , 则

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = \partial_t(\partial_t^2 \tilde{u}_1 - \Delta \tilde{u}_1) = 0 \\ v(x, 0) = \partial_t \tilde{u}_1(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t v(x, 0) = \partial_t^2 \tilde{u}_1(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

故  $u_1 = \partial_t M_\varphi$  是上面方程的解.

再令  $\tilde{u}_1 = M_{f_\tau}(x, t)$ , (其中  $f_\tau = f(x, \tau)$ ) 则其满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u}_1 - \Delta \tilde{u}_1 = 0 \\ \tilde{u}_1(x, 0) = 0 \\ \partial_t \tilde{u}_1(x, 0) = f(x, \tau) \end{cases} \quad (8.25)$$

若令  $v(x, t) = \tilde{u}_1(x, t - \tau) = M_{f_\tau}(x, t - \tau)$ , 则

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = (\partial_t^2 \tilde{u}_1 - \Delta \tilde{u}_1)(x, t - \tau) = 0 \\ v(x, \tau) = \tilde{u}_1(x, 0) = 0 \\ \partial_t v(x, \tau) = \partial_t \tilde{u}_1(x, 0) = f(x, \tau) \end{cases} \quad (8.26)$$

由此可知, 题中所设  $u_3$  满足

$$\partial_t u_3(x, t) = M_{f_\tau}(x, t - \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \partial_t v d\tau = \int_0^t \partial_t v d\tau \quad (8.27)$$

$$\partial_t^2 u_3 = \partial_t v(x, t)|_{\tau=t} + \int_0^t \partial_t^2 v d\tau \quad (8.28)$$

$$= f(x, t) + \int_0^t \Delta v d\tau \quad (8.29)$$

$$= f(x, t) + \Delta u_3 \quad (8.30)$$

故有

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_3 - \Delta u_3 = (\partial_t^2 \tilde{u}_1 - \Delta \tilde{u}_1)(x, t - \tau) = f(x, t) \\ u_3(x, 0) = 0 \\ \partial_t u_3(x, \tau) = \tilde{u}_3(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (8.31)$$

故  $u_3 = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau$  是上面方程的解.

### 注

1. 若将上面的  $u_3$  写成 Riemann 和的形式, 并注意到对任意常数  $c$ , 都有

$$cM_\psi = M_{c\psi}, \quad (8.32)$$

则

$$u_3 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} M_{f_{t_i}}(x, t - t_i) \Delta t_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} M_{f_{t_i} \Delta t_i}(x, t - t_i) \quad (8.33)$$

即将  $f$  看作外力, 则  $f_t \Delta t$  可看作该力产生的冲量, 其转化成速度引起了弹性体的位移.

这种将非齐次方程组的初值问题的解表示为一系列具有除速度的齐次方程的初值问题的解的叠加的过程, 称为冲量原理 (Duhamel 原理).

2. 若对与齐次方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.34)$$

两边同时做 Fourier 变换, 则得到

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.35)$$

.....

## 8.2.2 一维初值问题

考虑  $\mathbb{R}$  上的波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.36)$$

其中  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ .

根据前面的结论, 只要求初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \partial_x^2 u_2 = 0 \\ u_2(x, 0) = 0 \\ \partial_t u_2(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.37)$$

即可, 由于微分算子可分解为一阶算子乘积

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) \quad (8.38)$$

由此上述初值问题可分解为两个一阶方程

$$\partial_t u_2 - \partial_x u_2 = v \quad (8.39)$$

$$\partial_t u_2 + \partial_x u_2 = 0 \quad (8.40)$$

$$v(x, 0) = \psi(x) \quad (8.41)$$

使用特征线法可解得 (式中令  $y = x + t - 2\tau$ )

$$v(x, t) = \psi(x - t) \quad (8.42)$$

$$u_2(x, t) = \int_0^t \psi(x + (t - 2\tau)) d\tau \quad (8.43)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy \quad (8.44)$$

$$(8.45)$$

利用定理, 可知

$$u_1(x, t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi(y) dy \quad (8.46)$$

$$= \frac{1}{2} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) \quad (8.47)$$

$$u_3(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau \quad (8.48)$$

根据叠加原理, 可知原初值问题的解为

$$u(x, t) = u_1 + u_2 + u_3 \quad (8.49)$$

$$= \frac{1}{2} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau) dy d\tau \quad (8.50)$$

当  $f \equiv 0$  时, 上式称为 D'Alembert 公式, 此时, 初值问题 8.36 的解有如下形式

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t), \quad (8.51)$$


其中  $F, G$  分布称为左行波与右行波

$$F(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2a} \int_0^s \psi(\xi) d\xi \quad (8.52)$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2a} \int_0^s \psi(\xi) d\xi \quad (8.53)$$

上面只是给出了形式解, 为了确保其确实是对应初值问题的解, 我们需要对光滑性做一些要求, 得到如下定理

### 定理 8.2

若  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , 则如上给出的函数  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  且是初值问题 8.36 的解. 

**证明** 计算得

$$\partial_t u(x, t) = F'(x + t) - G'(x - t) + \frac{1}{2} \int_0^t [f(x + (t - \tau), \tau) + f(x - (t - \tau), \tau)] d\tau \quad (8.54)$$

$$\partial_t^2 u(x, t) = F''(x + t) + G''(x - t) + \frac{1}{2} \int_0^t [\partial_x f(x + (t - \tau), \tau) - \partial_x f(x - (t - \tau), \tau)] d\tau + f(x, t) \quad (8.55)$$

$$\partial_x u(x, t) = F'(x + t) + G'(x - t) + \frac{1}{2} \int_0^t [f(x + (t - \tau), \tau) - f(x - (t - \tau), \tau)] d\tau \quad (8.56)$$

$$\partial_x^2 u(x, t) = F''(x + t) + G''(x - t) + \frac{1}{2} \int_0^t [\partial_x f(x + (t - \tau), \tau) - \partial_x f(x - (t - \tau), \tau)] d\tau \quad (8.57)$$


由此可知

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t) \quad (8.58)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (8.59)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \psi(x) \quad (8.60)$$

### 推论 8.1

若  $\varphi, \psi$  以及  $f$  都是  $x$  的偶 (或奇, 或周期为  $l$  的) 函数, 则由上式给出的解  $u$  必为  $x$  的偶 (或奇, 或周期为  $l$  的) 函数. 

**证明** 当  $\varphi, \psi, f$  满足对应条件时,  $F, G$  也满足相应条件, 即满足奇函数条件时,

$$u(-x, t) = F(-x + t) + G(-x - t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{-x-(t-\tau)}^{-x+(t-\tau)} f(y, \tau) dy \quad (8.61)$$

$$= -F(x - t) - G(x + t) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y, \tau) dy \quad (8.62)$$

$$= -G(x - t) - F(x + t) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y, \tau) dy \quad (8.63)$$

$$= -u(x, t) \quad (8.64)$$

偶函数同理, 当满足周期性条件时,

$$u(x + l, t) = F(x + t + l) + G(x + l - t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x+l-(t-\tau)}^{x+l+(t-\tau)} f(y, \tau) dy \quad (8.65)$$

$$= F(x + t) + G(x - t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y, \tau) dy \quad (8.66)$$

$$= u(x, t) \quad (8.67)$$

从 D'Alembert 公式可以看出, 当  $f \equiv 0$  时,  $(x, t)$  的值仅由  $x-t$  到  $x+t$  的值控制, 由此称之为  $(x, t)$  的决定区域, 且在某一梯形面上, 其中值均受  $(x-t, x+t)$  部分取值影响, 这部分称为直线上  $(x-t, x+t)$  的影响区域.

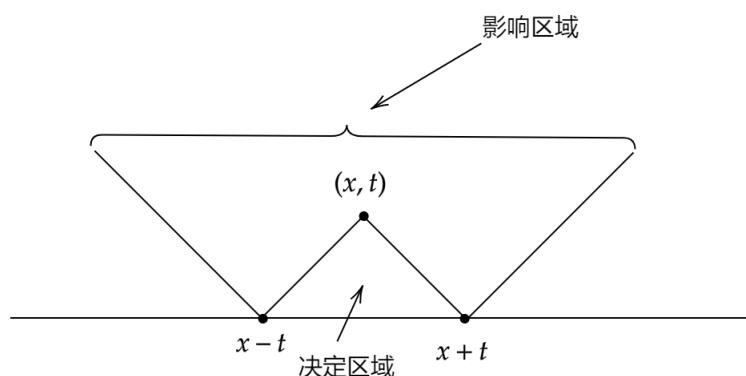


图 8.1: 决定区域与影响区域

### 8.2.3 一维半无界问题

下面考虑方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = g(t) \end{cases} \quad (8.68)$$

其中  $x \in \mathbb{R}_+, t > 0$ .

首先考虑齐次边值情况, 此时  $g \equiv 0$ , 若将三个函数奇延拓, 并令  $\bar{u}$  为新方程解

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{u} - \partial_x^2 \bar{u} = \bar{f}(x, t) \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{\varphi}(x) \\ \partial_t \bar{u}(x, 0) = \bar{\psi}(x) \end{cases} \quad (8.69)$$

则根据 D'Alembert 公式

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}(x+t) + \bar{\varphi}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \bar{\psi}(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \bar{f}(y, \tau) dy d\tau \quad (8.70)$$

当  $x \geq t$  时,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau) dy d\tau \quad (8.71)$$

当  $x < t$  时,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} \psi(y) dy + \frac{1}{2} \left[ \int_{t-x}^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau) dy d\tau + \int_0^{t-x} \int_{t-\tau-x}^{x+t-\tau} f(y, \tau) dy d\tau \right] \quad (8.72)$$

上面只是给出了形式解, 为了使之确实为半无界问题 8.68 的解, 还需要对初值的光滑性做要求, 并且在角点  $(0, 0)$  提一些相容性条件

$$\varphi(0) = 0 \quad (8.73)$$

$$\psi(0) = g'(0) = 0 \quad (8.74)$$

$$\varphi''(0) + f(0, 0) = 0 \quad (8.75)$$

注 三个条件的

### 定理 8.3

若半无界问题的初值  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ , 满足上述相容性条件, 且边值  $g \equiv 0$ , 则由上面给出的形式解  $u(x, t) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  且是半无界问题 8.68 的解. ♥

若  $g(t) \neq 0$ , 则令  $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$ , 则方程化为

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = f(x, t) - g''(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) - g(0) \\ \partial_t v(x, 0) = \psi(x) - g'(0) \\ v(0, t) = 0 \end{cases} \quad (8.76)$$

因此根据前面的结论, 亦可求解.

## 8.2.4 三维初值问题

接着考虑三位波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.77)$$

同样地, 只需求解初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.78)$$

其中  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ , 下面采用球平均法解初值问题.

首先来考虑这样的事实, 利用 Laplace 算子在球面的形式可得

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{2}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} u \quad (8.79)$$

其中  $\Delta_{S^2}$  表示  $S^2$  球面上的 Laplace 算子. 忽略  $\Delta_{S^2}$  项, 方程化为

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad (8.80)$$

$$\partial_t^2 u - (\partial_r^2 u + \frac{2}{r} \partial_r u) = 0 \quad (8.81)$$

若令  $u(t, r) = r^{-k} v(t, r)$ , 则有

$$\partial_r u = -kr^{-(k+1)} v + r^{-k} \partial_r v \quad (8.82)$$

$$\partial_r^2 u = k(k+1)r^{-(k+2)} v - 2kr^{-(k+1)} \partial_r v + r^{-k} \partial_r^2 v \quad (8.83)$$

$$\partial_r^2 u + \frac{2}{r} \partial_r u = r^{-k} \partial_r^2 v + (2-2k)r^{-(k+1)} \partial_r v + k(k-1)r^{-(k+2)} v \quad (8.84)$$

若取  $k=1$ , 则原方程为

$$\partial_t^2 u - \frac{1}{r} \partial_r^2 v = \frac{1}{r} \partial_t^2 v - \frac{1}{r} \partial_r^2 v = 0 \quad (8.85)$$

$$\partial_t^2 v - \partial_r^2 v = 0 \quad (8.86)$$

因此方程可化为简单形式.

回到主题, 首先看  $f \equiv 0$  的齐次方程, 在球坐标下考虑, 根据 Green 公式可知  $\Delta_{S^2}$  项在  $S^2$  球面上积分为 0

$$\int_{S^2} \Delta_{S^2} u d\sigma = \int_{S^2} \nabla \cdot (\nabla u) d\sigma \quad (8.87)$$

$$= \int_{\partial S^2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (8.88)$$

$$= 0 \quad (8.89)$$

因此对方程两边同时在  $S^2$  积分, 可得

$$\partial_t^2 \int_{S^2} u d\sigma - \left( \partial_r^2 \int_{S^2} u d\sigma + \frac{2}{r} \partial_r \int_{S^2} u d\sigma \right) = 0 \quad (8.90)$$

若令  $\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} u(r\sigma, t) d\sigma^1$ , 则方程化为

$$\partial_t^2 \bar{u} - \left( \partial_r^2 \bar{u} + \frac{2}{r} \partial_r \bar{u} \right) = 0 \quad (8.91)$$

再利用前面讨论过的结论, 令  $v = r\bar{u}$ , 则方程与初值满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_r^2 v = 0 \\ v(r, 0) = r\bar{u}(r, 0) = r\bar{\varphi}(r) \\ \partial_t v(r, 0) = r\partial_t \bar{u}(r, 0) = r\bar{\psi}(r) \end{cases} \quad (8.92)$$

其中  $r \geq 0$ .

此时再关于  $r$  作偶延拓, 则利用 D' Alembert 公式

$$r\bar{u}(r, t) = \bar{v}(r, t) = \frac{1}{2}[(r+t)\bar{\varphi}(r+t) + (r-t)\bar{\varphi}(r-t)] + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} y\bar{\psi}(y) dy. \quad (8.93)$$

接下来通过  $v$  来求解  $\bar{u}$ .

Step 1. 首先计算  $\bar{u}(0, t) = u(0, t)$

$$\bar{u}(0, t) = u(0, t) = \partial_r(r\bar{u})|_{r=0} \quad (8.94)$$

$$= \frac{1}{2}[\bar{\varphi}(t) + t\bar{\varphi}'(t) + \bar{\varphi}(t) + (-t)\bar{\varphi}'(-t)] + \frac{1}{2}[t\bar{\psi}(t) - (-t)\bar{\psi}(-t)] \quad (8.95)$$

$$= \bar{\varphi}(t) + t\bar{\varphi}'(t) + t\bar{\psi}(t) \quad (8.96)$$

$$= \frac{d}{dt}(t\bar{\varphi}(t)) + t\bar{\psi}(t) \quad (8.97)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(t\sigma) d\sigma \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \psi(t\sigma) d\sigma \quad (8.98)$$

上面用到了偶延拓的结果, 并注意偶函数的导数为奇函数.

Step 2. 根据平移不变性, 对  $u(x+x_0, t)$  用上一步结论 (注意到相应初值的变化)

$$u(x_0, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(x_0 + t\sigma) d\sigma \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \psi(x_0 + t\sigma) d\sigma \quad (8.99)$$

将  $x_0$  换成  $x$ , 再令  $y = x + t\sigma$ , 则

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \varphi(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \psi(y) dS(y) \quad (8.100)$$

注意到半径变化  $t$  倍时, 面积元变化  $t^2$  倍.

上式称为 **Kirchhoff 公式**. 当  $f \neq 0$  时, 方程解为

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \varphi(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \psi(y) dS(y) + \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{|y-x|=t-\tau} f(y, \tau) dS(y) d\tau \quad (8.101)$$

<sup>1</sup>特别地, 当  $r = 0$  时, 有  $\bar{u}(0, t) = u(0, t)$



## 8.2.5 二维初值问题

三维初值问题可以通过变换  $v = ru$  转化为一维问题, 不过二维不能故技重施, 但我们已经解出了三维波方程, 下面只需将二维强行看作三维即可, 还是从齐次开始.

令  $\tilde{u}(\tilde{x}, t) = \tilde{u}(x_1, x_2, t)$ , 其中  $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , 再令  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x_1, x_2)$ ,  $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(x_1, x_2)$ , 则显然  $\tilde{u}(\tilde{x}, t)$  是三维波方程的解

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \Delta_{\mathbb{R}^3} u = 0 \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \\ \partial_t \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\psi}(\tilde{x}) \end{cases} \quad (8.102)$$

则根据 Kirchhoff 公式

$$\tilde{u}(\tilde{x}, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-\tilde{x}|=t} \varphi(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-\tilde{x}|=t} \psi(y) dS(y) \quad (8.103)$$

由于上式与  $x_3$  无关, 因此可取  $x_3 = 0$ , 重复前面的过程, 取  $x_1 = x_2 = 0$ , 则有

$$u(0, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=t} \varphi(y_1, y_2) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=t} \psi(y_1, y_2) dS(y) \quad (8.104)$$

其中  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = t^2$ ,  $y_3 = \pm \sqrt{t^2 - y_1^2 - y_2^2}$ , 且计算得

$$\int_{|y|=t} \psi(y_1, y_2) dS(y) = 2 \int_{y_3 = \sqrt{t^2 - y_1^2 - y_2^2}} \psi(y_1, y_2) dS(y) \quad (8.105)$$

$$= 2 \int_{y_1^2 + y_2^2 \leq t^2} \psi(y_1, y_2) \sqrt{1 + (\partial_{y_1} y_3)^2 + (\partial_{y_2} y_3)^2} dy_1 dy_2 \quad (8.106)$$

$$= 2 \int_{y_1^2 + y_2^2 \leq t^2} \psi(y_1, y_2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - y_1^2 - y_2^2}} dy_1 dy_2 \quad (8.107)$$

因此

$$u(0, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(0)} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{t^2 - y_1^2 - y_2^2}} dy_1 dy_2 \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(0)} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{t^2 - y_1^2 - y_2^2}} dy_1 dy_2 \quad (8.108)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(0)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy_1 dy_2 \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(0)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy_1 dy_2 \quad (8.109)$$

同样对  $u(x + x_0, t)$  应用上述结论, 可得

$$u(x_0, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(0)} \frac{\varphi(y + x_0)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy_1 dy_2 \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(0)} \frac{\psi(y + x_0)}{\sqrt{t^2 - |y|^2}} dy_1 dy_2 \quad (8.110)$$

根据  $x_0$  任意性, 并令  $z = x_0 + y$ , 可得

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2 \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2 \quad (8.111)$$

上式称为 **Poisson 公式**, 且当  $f \neq 0$  时, 解为

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2 \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2 \quad (8.112)$$

$$+ \int_0^t \left[ \int_{|y-x| \leq t-\tau} \frac{f(y, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2 \right] d\tau \quad (8.113)$$

对比二维与三维波方程的解, 可以得到波传播时的一些特性.

在三维情形中, 一点  $(x, t)$  的值仅依赖于某个球面上的值; 但在二维情形中, 一点  $(x, t)$  的值依赖于某个圆盘上的值. 反过来说, 一个圆盘决定某个大区域上每一点的值; 一个点的取值会影响到某些点的取值. 因此可以给出如下定义

- 依赖区域: 某一点  $(x, t)$  的取值所依赖的点集.
- 决定区域: 某一区域  $D$  中的点均所决定取值的点的集合.
- 影响区域: 某一点能影响到对应取值的点的集合.

若假设影响区域外取值均为 0, 可知初值具有紧支集, 随着  $t$  的演化, 支集会越来越大, 但是具有某一确定的速度, 称为波方程的**有限传播速度**, 与之对应的是热传导方程, 具有无限传播方程.

从二维与三维方程依赖性的不同, 还能得到 **Huygens 原理**, 即三维波的传播既有清晰的波前, 也有清晰的波后, 故也称无后效现象; 而二维波的传播仅有清晰的波前, 故称弥散或后效现象.

以每一点为顶点, 可以画出一个光锥, 顶点上方的锥面是该点的影响区域, 下方是决定该点的区域, 在相对论中, 将上部分称为未来, 下部分称为过去, 波方程导致的这种性质也称为**因果律**.

.....

## 8.2.6 能量估计

相比于求解, 更重要的是分析解的各种性质, 比如借助能量估计, 可以分析波动方程解的唯一性与稳定性. 在波动方程乘上因子  $\partial_t u$ , 则方程化为

$$\partial_t u(\partial_t^2 u - \Delta u) = \frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 - \sum_i [\partial_t u \partial_{x_i}^2 u] \quad (8.114)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 - \sum_i [\partial_{x_i} (\partial_t u \partial_{x_i} u) - (\partial_t \partial_{x_i} u) \partial_{x_i} u] \quad (8.115)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 - \sum_i [\partial_{x_i} (\partial_t u \partial_{x_i} u) - \frac{1}{2} (\partial_t (\partial_{x_i} u)^2)] \quad (8.116)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 - \left[ \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) - \frac{1}{2} \partial_t |\nabla u|^2 \right] \quad (8.117)$$

$$= \partial_t \left[ \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] - \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) \quad (8.118)$$

上式即为**微分形式的能量守恒**, 对应的, 若假设  $u$  与其任意导数在无穷远处为 0, 则对两边积分可得

$$0 = \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] dx - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) dx \quad (8.119)$$


$$= \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] dx - \iint_{\partial \mathbb{R}^n} (\partial_t u \nabla u) \cdot d\vec{S} \quad (8.120)$$

$$= \partial_t \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2] dx \quad (8.121)$$

若令

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2] dx \quad (8.122)$$

则由上面的推导可知,  $E(t)$  关于时间不变, 即  $E(t) = E(0)$ , 这同样表示**能量守恒**.

 **笔记** 对于波动方程

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad (8.123)$$

在不考虑初值情况下, 其解满足以下平移不变性

- 时间平移:

$$u(x, t) \mapsto u(x, t + t_0) \quad (8.124)$$

- 空间平移:

$$u(x, t) \mapsto u(x_0, t) \quad (8.125)$$

- 伸缩变换:

$$u(x, t) \mapsto u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) \quad (8.126)$$

- Lorentz 变换:

$$u(x, t) \mapsto u\left(x - x_v + \frac{x_v - vt}{\sqrt{1 - |v|^2}}, \frac{t - vx}{\sqrt{1 - |v|^2}}\right) \quad (8.127)$$

在上面的能量估计中, 我们左乘的因子  $\partial_t u$  实际上是时间平移不变性的体现, 即将  $t_0$  看作参数, 则  $\partial_t u$  恰好为这个单参变换群的生成元

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{u(x, t+t_0) - u(x, t)}{t_0} = \partial_t u. \quad (8.128)$$

类似地, 其它几类不变性也会对应不同的生成元与守恒量

- 空间不变性: 动量.
- 伸缩不变性:
- Lorentz 不变性: 角动量.

这种将不变性与守恒律相联系的思想非常重要, 即将空间性质与物理量联系在一起, 称为**诺特定理**.

**例 8.3** 第一类边值 (Dirichlet 边值), 先考虑齐次形式 (方便起见, 先省略初值)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (8.129)$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) dx \quad (8.130)$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\partial_t u \nabla u) \cdot d\vec{S} \quad (8.131)$$

$$= 0 \quad (8.132)$$

因此重复前面的过程定义能量, 能量依然守恒.

从上面的例子也可看出, 对于第二类边值的情况, 即  $\partial_n u = \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$  的情形, 能量依然守恒, 但对于第三边值, 只有当  $\alpha > 0$  时, 可以得到  $E(t) \leq E(0)$ .

下面讨论能量估计的一个用处, 即证明解的唯一性与稳定性, 考虑方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = h(x, t) \end{cases} \quad (8.133)$$

#### 定理 8.4

方程 8.144 至多有一个解.



**证明** 假设方程有两个解  $u_1, u_2$ , 则令  $u = u_1 - u_2$ , 则  $u$  满足方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = 0 \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (8.134)$$

由能量估计, 令

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2] dx := \int_{\Omega} e(u) dx, \quad (8.135)$$

其中  $e$  为能量密度, 则  $E(t) = E(0) = 0$ , 这表明  $\partial_t u, \nabla u \equiv 0$ , 故  $u$  为常数, 再结合边值  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , 可知  $u \equiv 0$ , 这表明  $u_1 = u_2$ , 即解唯一.

#### 定理 8.5

当 8.144 中  $h \equiv 0$  时, 方程在下述意义下关于右端项稳定

对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta(\varepsilon, T)$ , 若

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta \quad (8.136)$$

$$\|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta \quad (8.137)$$

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta \quad (8.138)$$

$$\|f_1 - f_2\|_{L^2((0,T),\Omega)} \leq \eta \quad (8.139)$$

$$(8.140)$$

则以  $\varphi_1, \psi_1$  为初值,  $f_1$  为右端项的解  $u_1$  与以  $\varphi_1, \psi_1$  为初值,  $f_2$  为右端项的解  $u_2$  的差在  $0 \leq t \leq T$  上满足

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u_1 - \partial_t u_2\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad (8.141)$$



**注** 上面的  $\|f\|_{L^2(\Omega)}$  表示

$$\left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (8.142)$$

$\|f\|_{L^2((0,T),\Omega)}$  表示

$$\left( \int_0^T \int_{\Omega} |f(x,t)|^2 dx dt \right)^{1/2} \quad (8.143)$$

**证明** 令  $u = u_1 - u_2$ ,  $f = f_1 - f_2$ ,  $\varphi, \psi$  同理, 则

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (8.144)$$

仿照能量估计的过程, 得到

$$\partial_t \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2] dx = \int_{\Omega} f(x,t) \partial_t u dx \quad (8.145)$$

由于

$$\left| \int_{\Omega} f(x,t) \partial_t u dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_t u)^2 dx \quad (8.146)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) dx \quad (8.147)$$

$$(8.148)$$

这表明

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + E(t) \quad (8.149)$$

根据 Gronwall 不等式可得

$$E(t) \leq e^t E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} |f|^2 dx ds \quad (8.150)$$

$$\leq e^T \left( E(0) + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 dx ds \right) \quad (8.151)$$

再令

$$y(t) = \int_{\Omega} |u| dx, \quad (8.152)$$

则

$$y'(t) = 2 \int_{\Omega} u \partial_t u dx \quad (8.153)$$

$$\leq \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} (\partial_t u)^2 dx \quad (8.154)$$

$$\leq y(t) + 2E(t) \quad (8.155)$$

$$\leq y(t) + 2e^T \left( E(0) + \int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 dx ds \right) \quad (8.156)$$

$$(8.157)$$

再利用 Gronwall 不等式, 得到

$$y(t) \leq e^T \left( y(0) + E(0) + \int_{\Omega} |f|^2 dx ds \right) \quad (8.158)$$

这表明  $E, y$  具有同样的界, 则

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)} \leq e^T (\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2((0,T),\Omega)}) \quad (8.159)$$

$$\leq 4\eta^2 e^T \quad (8.160)$$

$$< \varepsilon \quad (8.161)$$

再讨论能量的一个用处, 即得到有限传播速度.

对方程两边同乘  $\partial_t u$ , 并进行一定的变换可以得到

$$\frac{1}{2} \partial_t (\partial_t u)^2 - \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) + \frac{1}{2} \partial_t |\nabla u|^2 = \partial_t e(u) - \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) \quad (8.162)$$

$$= 0 \quad (8.163)$$

考虑一个圆台型区域  $S \in \mathbb{R}^{n+1}$ , 对上式在  $S$  内积分可得

$$0 = \iint_S [\partial_t e(u) - \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u)] dx dt \quad (8.164)$$

$$= \iint_S (\partial_t, \nabla) \cdot (e(u), -\partial_t u \nabla u) dx dt \quad (8.165)$$

$$= \iint_{\partial S} (e(u), -\partial_t u \nabla u) \cdot \vec{n} dS \quad (8.166)$$

记  $S$  的顶面、底面、侧面分别为  $T, B, K$ , 则  $\vec{n}_B = (-1, 0)^T, \vec{n}_T = (1, 0)^T$ , 且侧面  $\varphi(x, t) = |x - x_0|^2 - |R - t|^2 = 0$ , 得到

$$\nabla \varphi = (2(R - t), 2(x - x_0)) \quad (8.167)$$

$$\vec{n}_K = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{(R - t, x - x_0)}{\sqrt{(R - t)^2 + (x - x_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{R - t}{|R - t|}, \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right) \quad (8.168)$$

代入原式可得<sup>2</sup>

$$\int_B e(u)(0) dx = \int_T e(u)(t) dx + \int_K (e(u), -\partial_t u \nabla u) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(R - t, x - x_0)}{\sqrt{(R - t)^2 + (x - x_0)^2}} dS \quad (8.169)$$

$$= \int_T e(u)(t) dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_K \left[ \left[ \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] \frac{R - t}{|R - t|} - \partial_t u \nabla u \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right] dS \quad (8.170)$$

$$= \int_T e(u)(t) dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_K \left[ \left| \partial_t u - \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u \right|^2 + |\nabla u|^2 - \left| \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u \right|^2 \right] dS \quad (8.171)$$

其中定义

$$Flux[0, t] = \int_K \left( |\nabla u|^2 - \left| \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u \right|^2 \right) dS \geq 0 \quad (8.172)$$

上式成立由于梯度方向最大.

则

$$\int_B e(u)(0) = \int_T e(u)(t) + Flux[0, t] \quad (8.173)$$

这表明波演化过程中, 初始时刻的能量等于  $t$  时刻能量 + 侧面流出能量, 且流出能量非负. 这也说明, 若初始时刻  $(u, \partial_t u)|_{t=0} = 0$ , 则  $(u, \partial_t u) \equiv 0$ , 这实际上表示决定区域.

<sup>2</sup> $R - t$  为数, 并且  $t < R$ .


## 8.3 混合问题

### 8.3.1 Sturm-Liouville 问题

#### 定义 8.1

称如下 ODE 齐次边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0 \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases} \quad (8.174)$$

为 Sturm-Liouville 问题, 其中  $\alpha_i, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i > 0$ . 使此问题有非零解的  $\lambda \in \mathbb{R}$  称为此问题的特征值, 相应的非零解称为对应于特征值的特征函数. 

上述问题实质上是算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$  的特征值问题.

#### 定理 8.6

对于 S-L 问题, 有如下结论

1. 所有特征值非负, 特别当  $\beta_1 + \beta_2 > 0$  时, 均为正.
2. 不同特征值对应的特征函数正交, 即

$$\int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx = 0. \quad (8.175)$$

3. 所有特征值组成一个单调递增, 以无穷远点为聚点的序列

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \quad (8.176)$$

4. 任意函数  $f \in L^2((0, l))$  可按特征函数系展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) \quad (8.177)$$

$$C_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}. \quad (8.178)$$


#### 证明

1. 考虑能量估计, 方程两侧同乘  $X(x)$ , 则

$$0 = X X'' + \lambda X^2 \quad (8.179)$$

$$= (X X')' - (X')^2 + \lambda X^2 \quad (8.180)$$

对两边积分可得

$$\lambda \int_0^l X^2(x) dx = \int_0^l X'(x)^2 dx - X(x) X'(x) \Big|_0^l \quad (8.181)$$

因此只需证明  $X(l)X'(l) - X(0)X'(0) \leq 0$  即可.

根据边值条件

$$\begin{cases} -\alpha_1 X'(0)^2 + \beta_1 X(0) X'(0) = 0 \\ -\alpha_1 X'(0) X(0) + \beta_1 X(0)^2 = 0 \end{cases} \quad (8.182)$$

$$\implies X(0)X'(0) = \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} (\alpha_1 X'(0)^2 + \beta_1 X(0)^2) \geq 0 \quad (8.183)$$

同理可得

$$X(l)X'(l) = -\frac{1}{\alpha_2 + \beta_2}(\alpha_2 X'(l)^2 + \beta_2 X(l)^2) \leq 0 \quad (8.184)$$

因此

$$X(l)X'(l) - X(0)X'(0) \leq 0. \quad (8.185)$$

并且可以发现,  $\lambda = 0$  当且仅当  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

2. 设相异特征值  $\lambda, \mu$  对应特征函数为  $X_\lambda, X_\mu$ , 对前者方程两边同乘  $X_\mu$  积分可得

$$\lambda \int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx = -\int_0^l X_\lambda''(x)X_\mu(x)dx \quad (8.186)$$

$$= -X_\lambda'(x)X_\mu(x) \Big|_0^l + \int_0^l X_\lambda'(x)X_\mu'(x)dx \quad (8.187)$$

同理可得

$$\mu \int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx = -X_\mu'(x)X_\lambda(x) \Big|_0^l + \int_0^l X_\mu'(x)X_\lambda'(x)dx \quad (8.188)$$

做差可得

$$(\lambda - \mu) \int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)dx = [X_\mu'(x)X_\lambda(x) - X_\lambda'(x)X_\mu(x)] \Big|_0^l \quad (8.189)$$

$$= \begin{vmatrix} X_\lambda(x) & X_\mu(x) \\ X_\lambda'(x) & X_\mu'(x) \end{vmatrix} \Big|_0^l \quad (8.190)$$

$$:= J(x) \Big|_0^l \quad (8.191)$$

考虑边值关系

$$\begin{cases} -\alpha_1 X_\lambda'(0) + \beta_1 X_\lambda(0) = 0 \\ -\alpha_1 X_\mu'(0) + \beta_1 X_\mu(0) = 0 \end{cases} \quad (8.192)$$

将上式看作关于  $-\alpha_1, \beta_1$  的线性方程组, 并且由于  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1 + \beta_1 > 0$ , 因此上述方程组有非零解, 表明系数行列式为 0, 即  $J(0) = 0$ . 同理分析  $l$  处的初值, 可知  $J(l) = 0$ , 代入上式, 可得特征函数正交.

### 8.3.2 分离变量法

考虑混合问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t) \end{cases} \quad (8.193)$$

其中  $x \in [0, l], t \geq 0$ .

首先考虑齐次方程:  $f, g_1, g_2 \equiv 0$ , 设  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , 代入方程, 可得到

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (8.194)$$

$$\implies X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda T = 0 \quad (8.195)$$

根据边值  $T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0$  可知,  $X(0) = X(l) = 0$ . 进行能量估计可得

$$0 = \int_0^l X(X'' + \lambda X)dx \quad (8.196)$$

$$= X'X \Big|_0^l - \int_0^l ((X')^2 - \lambda X^2) dx \quad (8.197)$$

$$= \int_0^l (\lambda X^2 - (X')^2) dx \quad (8.198)$$

这表明  $\lambda \geq 0$ , 若  $\lambda = 0$ , 则  $X'' = 0$ , 可得  $X(x) = C_1x + C_2$ , 根据边值可知  $X \equiv 0$ , 代回原方程, 得到零解, 因此舍去该种情况.

再考虑  $\lambda > 0$ , 则从  $X'' + \lambda X = 0$  可解得

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \quad (8.199)$$

利用边值条件, 可知  $C_1 = 0, \sqrt{\lambda}l = n\pi$ , 因此可得到一组解

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.200)$$

设与  $X_n$  对应的函数为  $T_n$ , 则  $T_n$  有形式

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi}{l}t + D_n \sin \frac{n\pi}{l}t \quad (8.201)$$

根据原方程解的叠加性可知

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{n\pi}{l}t + D_n \sin \frac{n\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (8.202)$$

根据初值条件

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (8.203)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} D_n \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (8.204)$$

根据 S-L 问题的推论,  $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}$  为  $L^2$  的正交基, 因此对  $\varphi$  可展开为

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad C_n = \varphi_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l}x dx} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx \quad (8.205)$$

$\psi$  同理, 有

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx = \frac{n\pi}{l} D_n \quad (8.206)$$

故原方程的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{n\pi}{l}t + D_n \sin \frac{n\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (8.207)$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx, \quad D_n = \frac{l}{n\pi} \psi_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx \quad (8.208)$$

上面给出了方程的形式解, 还需要对区域  $(0, l) \times (0, +\infty)$  的角点  $(0, 0), (l, 0)$  规定相容性条件, 即

$$\varphi \in C^3[0, l], \psi \in C^2[0, l], \quad (8.209)$$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0 \quad (8.210)$$

下面考虑  $f \neq 0, g_1, g_2 \equiv 0$  的情形, 有了前面的经验, 可设解有形式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (8.211)$$

若同时展开各函数以及

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (8.212)$$

则有

$$T_n''(t) + \lambda T_n(t) = f_n(t), \quad (8.213)$$



$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T'_n(0) = \psi_n \quad (8.214)$$

解二阶 ODE 可得

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \frac{n\pi}{l}t + \frac{l}{n\pi} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l}t + \frac{l}{n\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{l}(t-\tau) d\tau \quad (8.215)$$

下面再考虑  $f, g_1, g_2 \neq 0$  的一般情形. 我们尝试通过某些变换使得边值为 0, 令

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{(l-x)g_1(t) + xg_2(t)}{l}, \quad (8.216)$$

则边值化为  $v(0, t) = v(l, t) = 0$  的情形, 且  $v$  满足的方程为

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_x^2 v = f(x, t) - \frac{(l-x)g_1(t) + xg_2(t)}{l} \\ v(x, 0) = \varphi(x) - \frac{(l-x)g_1(0) + xg_2(0)}{l} \\ \partial_t v(x, 0) = \psi(x) - \frac{(l-x)g_1'(0) + xg_2'(0)}{l} \end{cases} \quad (8.217)$$

方程转化为了上面第二种情形.

**例 8.4** 用分离变量法解热方程

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = 0, \partial_x u(l, t) + hu(l, t) = 0 \end{cases} \quad (8.218)$$

设  $u(x, t) = T(t)X(x)$ , 则有

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (8.219)$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (8.220)$$

边值  $T(t)X(0) = 0$ , 表明  $X(0) = 0$ , 并且  $\partial_x u(l, t) + hu(l, t) = 0$ , 表明  $T(t)X'(l) + hT(t)X(l) = 0$ , 故关于  $X$  有

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases} \quad (8.221)$$

若  $\lambda < 0$ , 则

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (8.222)$$

且根据初值有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + h(C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0 \end{cases} \quad (8.223)$$

解得  $C_1 = C_2 = 0$ , 零解舍去. 若  $\lambda > 0$ , 则

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad (8.224)$$

根据初值有  $X(0) = C_1 = 0$ ,  $X'(l) + hX(l) = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l + h \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , 即

$$\tan \sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h} \quad (8.225)$$

考虑  $\tan x$  与  $-x/hl$  的交点, 可知交点有无穷多个, 故令  $X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n}x$ , 再根据  $T_n$  满足的方程可解得

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n t}, \quad (8.226)$$

故原方程的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (8.227)$$

利用初值  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , 可知  $A_n = \varphi_n$ .

例 8.5 在圆盘  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  中解位势方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, t) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8.228)$$

极坐标换元, 方程化为

$$\partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u = 0 \quad (8.229)$$

$$u|_{r=1} = \varphi(\cos \theta, \sin \theta) \quad (8.230)$$

令  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , 则

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0 \quad (8.231)$$

$$\implies r^2 \frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \quad (8.232)$$

即得

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \quad (8.233)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R \quad (8.234)$$

前者有边值条件  $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ , 后者为 Euler 方程.

先讨论前者, 若  $\lambda < 0$ , 则可解得

$$\Theta(\theta) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\theta} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\theta} \quad (8.235)$$

但这不满足边值条件 (周期函数), 同理也可舍去  $\lambda = 0$ ,  $\Theta(\theta) = C_1\theta + C_2$ , 因此  $\lambda > 0$ , 且

$$\Theta_n(\theta) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\theta + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\theta \quad (8.236)$$

代入边值条件, 得到  $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z}_+$ , 即  $\lambda_n = n^2$ , 故

$$\Theta_n(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta. \quad (8.237)$$

下面解第二个 Euler 方程, 令  $r = e^t$ , 则有

$$\partial_t R = r \partial_r R \quad (8.238)$$

$$\partial_t^2 R = r \partial_r (r \partial_r R) = r \partial_t R + r^2 \partial_r^2 R \quad (8.239)$$

原方程化为

$$\partial_t^2 R_n - n^2 R_n = 0 \quad (8.240)$$

当  $n \neq 0$  时, 得到

$$R_n = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt} = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \quad (8.241)$$

当  $n = 0$  时, 得到

$$R_0 = C_1 t + C_2 = C_1 \ln r + C_2 \quad (8.242)$$

其中  $r^{-n}, \ln r$  在原点有奇性, 因此取

$$R_n = \begin{cases} r^n, & n > 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (8.243)$$

综上, 令

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) + C_0 \quad (8.244)$$

则由边值条件, 有

$$C_n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (8.245)$$

$$D_n \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (8.246)$$

$$C_0 = \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\theta) d\theta \quad (8.247)$$

**注** 上面没有过多讨论  $\Theta_n(\theta)$  构成正交基, 事实上这与泛函分析中紧算子的特征函数内容有关.

## 第9章 位势方程

位势方程有形式

$$\Delta u = f, \quad x \in \Omega \quad (9.1)$$

也称 Poisson 方程, 当  $f \equiv 0$  时, 称为 Laplace 方程. 与波动方程类似, 也考虑三种边值条件

1. 第一类边值 (Dirichlet 边值):

$$u(x, t) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega. \quad (9.2)$$

2. 第二类边值 (Newman 边值):

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega. \quad (9.3)$$

3. 第三类边值 (Robin 边值):

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) + \alpha u(x, t) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega. \quad (9.4)$$

从另一个角度看, 如果波动方程的解  $u$  与时间无关, 即  $\partial_t^2 u = 0$ , 则波动方程可化为位势方程

$$-\Delta u = f \quad (9.5)$$

因此位势方程的解也常看作一些发展方程的稳态解.

开始正题前, 先进行一些关于调和函数的讨论.

### 9.1 调和函数

#### 定义 9.1 (调和函数)

若函数  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程  $\Delta u = 0$ , 则称之为调和函数.

利用数学分析知识可以证明, 若  $u(x)$  调和, 则  $u(\lambda x), u(x + x_0), u(Ox)$  均调和, 其中  $O$  为正交变换. 为了讨论调和函数的平均值性质, 先给出两个引理.

#### 引理 9.1

设函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) dS(y) \right) dr = \int_0^\infty \left( \int_{|w|=1} f(x_0 + rw) dS(w) \right) r^{n-1} dr \quad (9.6)$$

令  $y = x_0 + rw$  可得最后的式子.

此外还有

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{B(x_0, r)} f(y) dy \right) = \int_{\partial B(x_0, r)} f(y) dS(y). \quad (9.7)$$

#### 证明

下面定义平均值性质.

#### 定义 9.2

若  $u \in C(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , 则

1. 若对任意  $B_r(x) \subset \Omega$ , 都有

$$u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad (9.8)$$

则称  $u$  满足平均值性质.

2. 若对任意  $B_r(x) \subset \Omega$ , 都有

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) \quad (9.9)$$

则称  $u$  满足第二平均值性质.

并且可以断言: 两条平均值性质等价.



**证明**  $2 \Rightarrow 1$

$$\int_{B_r(x)} u(y) dy = \int_0^r \left( \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) dS(y) \right) d\rho \quad (9.10)$$

$$= \int_0^r 4\pi\rho^2 u(x) d\rho \quad (9.11)$$

$$= u(x) \int_0^r 4\pi\rho^2 d\rho \quad (9.12)$$

$$= \frac{4\pi r^3}{3} u(x) \quad (9.13)$$

$1 \Rightarrow 2$  移项, 并对  $r$  求导得

$$4\pi r^2 u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (9.14)$$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (9.15)$$

平均值性质表明, 函数在一点的取值与该点为球心的球面上的平均值相等, 事实上, 调和函数天然有这样的性质.

### 定理 9.1

若  $u$  为  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  上的调和函数, 则满足第二平均值性质: 对任意  $B_r(x) \subset \Omega$ ,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (9.16)$$



**证明**  $\Delta u = 0$  表明对任意  $B_r(x) \subset \Omega$ , 都有

$$0 = \int_{B_r(x)} \Delta u dy = \int_{\partial B(x,r)} \nabla u \cdot \vec{n} dS(y) = \int_{|y-x|=r} (\nabla u)(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \quad (9.17)$$

令  $y = x + rw$ , 则

$$0 = \int_{|w|=1} w(\nabla u)(x + rw) r^2 dS(w) \quad (9.18)$$

$$= r^2 \int_{|w|=1} \frac{d}{dr} (u(x + rw)) dS(w) \quad (9.19)$$

$$= r^2 \frac{d}{dr} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS(w) \quad (9.20)$$

这表明式中积分与  $r$  无关, 恒为定值, 故

$$\int_{|w|=1} u(x + rw) dS(w) = \int_{|w|=1} u(x) dS(w) = u(x) \cdot 4\pi \quad (9.21)$$

因此

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|w|=1} u(x + rw) dS(w) \quad (9.22)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} u(y) dS(y) \quad (9.23)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (9.24)$$

## 定理 9.2

设  $u \in C^2(\Omega)$ , 且对任意  $B_r(x) \subset \Omega$ , 满足

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y), \quad (9.25)$$

则  $u$  光滑且调和.



定理的证明思路与数学分析中证明 Weierstrass 逼近定理的单位近似法类似, 即找到一个性质很好的函数与  $u$  做卷积, 得到的结果仍然能保持良好性质.

**证明** 只需证明:  $u = u * \varphi_\varepsilon$ , 其中光滑化子  $\varphi_\varepsilon$  定义如下:

令  $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ , 且满足

- $\varphi$  径向, 即  $\varphi(x) = \varphi(|x|)$ .
  - 支集在  $B_1(0)$  中.
  - $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \int_{B_1(0)} \varphi(x) dx = 1$
- 则有

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \quad (9.26)$$

$$= \int_0^1 \int_{|w|=1} \varphi(r) r^{n-1} dr dS(w) \quad (9.27)$$

$$= w_n \int_0^1 \varphi(r) r^{n-1} dr \quad (9.28)$$

再令  $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , 则  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon(0))$ , 并且

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \quad (9.29)$$

$$= \int_{B_1(0)} \varphi(y) dy \quad (9.30)$$

$$= 1 \quad (9.31)$$

对任意  $x \in \Omega$ , 取  $\varepsilon < \frac{1}{4} \text{dist}(x, \partial\Omega)$ , 这里  $\text{dist}$  表示点与点集间的距离, 则

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} u(y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \quad (9.32)$$

$$= \int_{\Omega} u(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \quad (9.33)$$

$$= \int_{\Omega \cap B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \quad (9.34)$$

$$= \int_{B_\varepsilon(x)} u(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \quad (9.35)$$

$$= \int_{|r|<\varepsilon} \int_{|w|=1} u(x+rw) \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{rw}{\varepsilon}\right) dr dS(y) \quad (\text{令 } y = x+rw) \quad (9.36)$$

$$= \int_0^1 \int_{|w|=1} u(x+\rho\varepsilon w) \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho dS(y) \quad (\text{令 } \rho = \frac{r}{\varepsilon}) \quad (9.37)$$

$$= \int_0^1 \left( \int_{|w|=1} u(x+\rho\varepsilon w) \frac{1}{\varepsilon^n} dS(y) \right) \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \quad (9.38)$$

$$= u(x) \int_0^1 w_n \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \quad (9.39)$$

$$= u(x) \quad (9.40)$$

再证  $u$  调和, 只需证明, 对任意  $x \in \Omega, r > 0$ , 都有 (否则存在  $x_0$  的邻域, 其中每点均为正, 得到球积分

大于 0)

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0 \quad (9.41)$$

计算得

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = \int_{|y-x|=r} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \quad (9.42)$$

$$= \int_{|w|=1} w(\nabla u)(x+rw) r^{n-1} dS(w) \quad (9.43)$$

$$= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{|w|=1} u(x+rw) dw \quad (9.44)$$

$$= r^{n-1} \frac{d}{dr} S_{n-1} u(x) \quad (9.45)$$

$$= 0 \quad (9.46)$$

这里用到了在证明平均值定理时的操作, 为了避免看起来像循环论证, 这里再补充一些细节, 根据平均值的条件, 可知

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{|y-x|=r} u(y) dS(y) \quad (9.47)$$

$$= \frac{1}{S_{n-1} r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y) dS(y) \quad (9.48)$$

$$= \frac{1}{S_{n-1}} \int_{|w|=1} u(x+rw) dS(w) \quad (9.49)$$

故命题得证.

### 定理 9.3 (Harnack 不等式)

设  $u$  为  $\Omega$  上的非负调和函数, 对任意连通紧集  $V \subset \Omega$ , 存在常数  $C = C(\text{dist}(V, \partial\Omega), n)$ , 使得

$$\sup_{u \in V} u \leq C \inf_{u \in V} u \quad (9.50)$$

其中

$$\text{dist}(V, \partial\Omega) = \inf_{\substack{x \in V \\ y \in \partial\Omega}} |x - y|. \quad (9.51)$$

**证明** 令  $r = \frac{1}{4} \text{dist}(\partial\Omega, V)$ , 对任意  $x, y, |x - y| < r$ , 则对任意  $z \in B(y, r)$ , 都有  $z \in B(x, 2r)$  (三角不等式). 根据调和函数的平均值性质, 有

$$u(x) = \frac{1}{|B_{2r}(x)|} \int_{B_{2r}(x)} u(z) dz \quad (9.52)$$

$$\geq \frac{1}{2^n |B_r(x)|} \int_{B_r(y)} u(z) dz \quad (9.53)$$

$$= \frac{1}{2^n} u(y) \quad (9.54)$$

由于  $V$  为紧集, 因此可取有限个球  $\{B_i\}$  覆盖  $V$ , 且  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ , 通过迭代上面得到的式子, 可知对任意  $x, y \in V$ , 都有

$$u(y) \leq 2^{nN} u(x) \quad (9.55)$$

对左边取  $\inf$ , 右边取  $\sup$ , 命题得证.

### 定理 9.4 (梯度估计)

设  $u \in C(B_R(x_0))$  调和, 则有

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{u \in B_R(x_0)} |u|. \quad (9.56)$$

**证明**  $u$  调和表明  $u$  光滑, 故  $\partial_{x_i} u$  也调和, 则由平均值性质

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \left| \int_{B_R(x_0)} \nabla \cdot (0, \dots, 0, \partial_{x_i} u, 0 \dots, 0)(y) dy \right| \quad (9.57)$$

$$= \frac{1}{|B_R(x_0)|} \left| \int_{\partial B_R(x_0)} u \cdot \vec{n}_i dS(y) \right| \quad (9.58)$$

$$\leq \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} |u| dS \quad (9.59)$$

$$\leq \frac{|\partial B_R(x_0)|}{|B_R(x_0)|} \max_{B_R(x_0)} |u| \quad (9.60)$$

$$= \frac{n}{R} \max_{B_R(x_0)} |u| \quad (9.61)$$

对  $\nabla u(x_0)$  重复上述过程, 可得

$$|\nabla u(x_0)| = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \left| \int_{B_R(x_0)} \nabla \cdot \nabla u(y) dy \right| \quad (9.62)$$

$$= \frac{1}{|B_R(x_0)|} \left| \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) \cdot \vec{n} dS(y) \right| \quad (9.63)$$

$$\leq \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} |u| dS \quad (9.64)$$

$$\leq \frac{|\partial B_R(x_0)|}{|B_R(x_0)|} \max_{B_R(x_0)} |u| \quad (9.65)$$

$$= \frac{n}{R} \max_{B_R(x_0)} |u| \quad (9.66)$$

根据梯度估计可以得到下述推论

#### 命题 9.1

设  $u \in C(B_R)$  为非负调和函数, 则

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0). \quad (9.67)$$

**证明**

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} |u| dS \quad (9.68)$$

$$= \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u dS \quad (9.69)$$

$$= \frac{|\partial B_R(x_0)|}{|B_R(x_0)|} \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u dS \quad (9.70)$$

$$= \frac{n}{R} u(x_0) \quad (9.71)$$

#### 推论 9.1 (Liouville 定理)

若  $u$  为  $\mathbb{R}^n$  上的上有界或下有界调和函数, 则  $u$  为常数.

**证明** 设  $u \leq M$ , 令  $v = M - u \geq 0$ , 则  $v$  为非负调和函数, 因此

$$|\nabla v| \leq \frac{n}{R} v(x_0) \quad (9.72)$$

令  $R \rightarrow +\infty$ , 可得  $\nabla v \equiv 0$ , 即  $v$  为常数,  $u(x) \equiv M$ .



## 9.2 基本解与 Green 函数

### 定义 9.3

若  $\Delta u = \delta$ , 则称  $u$  为基本解, 其中

$$\delta = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (9.73)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (9.74)$$

为 Dirac 函数 (广义函数, 可以简单类比点电荷).



Dirac 函数是一种广义函数, 可以简单类比点电荷, 这里先注意到对任意  $x \neq 0$ , 都有  $\Delta u = 0$ .

首先来考虑 Laplace 方程的径向对称解, 即满足  $u(x) = u(|x|)$  的解. 使用球坐标中的 Laplace 算子, 并注意到  $u$  与角度无关, 可得

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{n-1}{r} \partial_r u = 0 \quad (9.75)$$

令  $v = \partial_r u$ , 则  $v$  满足方程

$$\partial_r v + \frac{n-1}{r} v = 0 \quad (9.76)$$

解得

$$v(r) = \frac{C_1}{r^{n-1}} \quad (9.77)$$

因此

$$u(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & n = 2 \\ \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & n \geq 3 \end{cases} \quad (9.78)$$

### 定义 9.4

对  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , 称

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2 \\ \frac{1}{w_n |x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (9.79)$$

为  $\Delta u = 0$  的基本解, 其中  $w_n$  为  $n$  维球面的表面积.



为了求解位势方程, 下面做一些准备工作.

### 引理 9.2 (Green 公式)

设  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , 则

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} [\nabla \cdot (u \nabla v) - \nabla u \cdot \nabla v] dx \quad (9.80)$$

$$= \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (9.81)$$

同理也有

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx \quad (9.82)$$

将两式相减可得第二 Green 公式

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (9.83)$$



Green 公式实际上是分部积分的过程.

## 9.2.1 Green 函数

## 命题 9.2

设  $n = 3$ ,  $u \in C(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  且调和, 则对任意  $x_0 \in \Omega$ , 都有

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ -u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|x - x_0|} \right) + \frac{1}{|x - x_0|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \quad (9.84)$$

**证明** 由于  $\frac{1}{|x - x_0|}$  在  $x_0$  处的奇性, 故将  $x_0$  用球  $B_\varepsilon(x_0)$  挖去, 记  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)$ , 根据  $\Delta u = 0$  的平移不变性, 不妨设  $x_0 = 0$ , 则区域变为  $0 \in \Omega - x_0$ , 仍记为  $\Omega$ , 即需证

$$u(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ -u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \quad (9.85)$$

记  $v = -\frac{1}{4\pi|x|}$ , 在  $\Omega_\varepsilon$  上对  $u, v$  使用第二 Green 公式得到

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dS \quad (9.86)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ -u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \left[ -u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \quad (9.87)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ -u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{u}{x^2} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (9.88)$$

分别计算后两项, 根据平均值性质, 第二项

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{u}{x^2} dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} u(x) dS = u(0) \quad (9.89)$$

第三项使用散度定理

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{B_\varepsilon} \Delta u dx = 0 \quad (9.90)$$

因此

$$u(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ -u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS. \quad (9.91)$$

可以看出, 上面的过程实际上仅由  $u$  以及  $\partial_n u$  的边值给出了  $u$  在区域  $\Omega$  上的取值, 但很多时候我们仅知道二者之一, 甚至都不知道 (比如混合边值情形), 因此我们希望, 上述  $u$  的表达式可以仅与一类边值有关.

若函数  $g$  在  $\Omega$  内调和, 且  $g|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi|x - x_0|}$ , 若对  $u, g$  使用第二 Green 公式, 可得

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (9.92)$$

用 9.84 中的表达式加上式可得

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left[ u \frac{\partial}{\partial n} \left( g - \frac{1}{4\pi|x - x_0|} \right) - \left( g - \frac{1}{4\pi|x - x_0|} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \quad (9.93)$$

$$= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left( g - \frac{1}{4\pi|x - x_0|} \right) dS \quad (9.94)$$

若令

$$G(x, x_0) = -g(x) + \frac{1}{4\pi|x - x_0|}, \quad (9.95)$$

则 (其中  $\varphi = u|_{\partial\Omega}$ )

$$u(x_0) = - \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G}{\partial n}(x, x_0) dS(x) \quad (9.96)$$

因此, 我们的目标转化为求出上面的  $G$ , 这样的  $G$  被称为 Green 函数.

## 定义 9.5 (Green 函数)

定义  $\Omega$  上算子  $-\Delta$  的 Green 函数  $G(x, x_0)$  满足

1.  $G$  在  $\Omega$  上除  $x_0$  外二阶连续可微.
2. 对任意  $x \in \partial\Omega$ ,  $G(x) = 0$ .
3.  $-G(x, x_0) + \frac{1}{4\pi|x-x_0|}$  在  $x_0$  有限, 并且处处连续可微且调和.



Green 函数有很多良好的性质, 比如对称性.

## 命题 9.3

设  $G$  为 Green 函数, 则对任意  $a, b \in \Omega$ , 都有

$$G(a, b) = G(b, a). \quad (9.97)$$



证明思路与上一命题类似.

**证明** 考虑函数  $u = G(x, a), v = G(b, x)$ , 同样将  $a, b$  挖去, 记

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\bar{B}_\varepsilon(a) \cup \bar{B}_\varepsilon(b)) \quad (9.98)$$

对二者使用第二 Green 公式, 可得

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (9.99)$$

$$= \int_{\partial\Omega} - \int_{|x-a|=\varepsilon} - \int_{|x-b|=\varepsilon} \quad (9.100)$$

利用 Green 函数的性质 2, 可知第一项为 0, 记后两项分别为  $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ , 则

$$A_\varepsilon = \int_{|x-a|=\varepsilon} \left[ \left( u - \frac{1}{4\pi|x-a|} \right) \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left( u - \frac{1}{4\pi|x-a|} \right) \right] dS \quad (9.101)$$

$$+ \int_{|x-a|=\varepsilon} \frac{1}{4\pi|x-a|} \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{|x-a|=\varepsilon} v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi|x-a|} \right) dS \quad (9.102)$$

$$= \int_{|x-a|=\varepsilon} \left[ \left( u - \frac{1}{4\pi|x-a|} \right) \Delta v - \Delta \left( u - \frac{1}{4\pi|x-a|} \right) v \right] dS + \dots \quad (9.103)$$

$$= 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{|x-a|=\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{|x-a|=\varepsilon} v dS \quad (9.104)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{|x-a|<\varepsilon} \Delta v dx + \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{|x-a|=\varepsilon} v dS \quad (9.105)$$

$$= v(a) = G(b, a) \quad (9.106)$$

同理可得  $B_\varepsilon = -u(b) = -G(a, b)$ , 得证.

现在的问题为, 如何求出某一区域的 Green 函数? 首先考虑如下两类特殊情况:

## 1. 半空间.

根据 Green 函数的性质, 可令

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - g(x) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - \frac{1}{4\pi|x-x^*|}, \quad (9.107)$$

其中  $x^* \notin \Omega$ , 则这样的  $G$  满足 1,3, 若要满足 2, 根据对称性, 只需令  $x^*$  为  $x_0$  关于边界平面的反射即可.

2. 球  $B_R(0)$ .

球面对称实际上对应反演变换, 设

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi|x-x_0|} - \frac{C}{4\pi|x-x^*|}, \quad (9.108)$$

并令  $\rho = |x-x_0|, \rho^* = |x-x^*|$ , 则根据边界条件可得几何关系

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x_0|} \quad (9.109)$$

由此可得

$$C = \frac{R}{|x_0|}, \quad x^* = \frac{R^2}{|x_0|^2} x_0 \quad (9.110)$$

进一步, 此时

$$\nabla G = -\frac{x-x_0}{4\pi|x-x_0|^3} + \frac{R}{|x_0|^2} \frac{x-x_0^*}{|x-x_0^*|^3} \quad (9.111)$$

当  $|x| = R$  时

$$\nabla G = -\frac{x-x_0}{4\pi|x-x_0|^3} + \frac{|x_0|^2}{R^2} \frac{x-x_0^*}{|x-x_0^*|^3} \quad (9.112)$$

$$= -\frac{x}{4\pi|x-x_0|^3} \left(1 - \frac{|x_0|^2}{R^2}\right) + \frac{1}{4\pi|x-x_0|^3} \left(x_0 - \frac{|x_0|^2}{R^2} x_0^*\right) \quad (9.113)$$

$$= -\frac{x}{4\pi|x-x_0|^3} \left(1 - \frac{|x_0|^2}{R^2}\right) \quad (9.114)$$

因此

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \nabla G \cdot \vec{n} \quad (9.115)$$

$$= -\frac{R^2 - |x_0|^2}{4\pi R|x-x_0|^3} \quad (9.116)$$

由此可得 **Poisson 公式**

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{4\pi R} \int_{|x|=R} \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|^3} dS(x) \quad (9.117)$$

根据 Poisson 公式, 我们可以得到一些更精确的结果, 比如

#### 命题 9.4 (Harnack 不等式)

设  $u$  在  $B_R(x_0)$  调和且非负, 则

$$\frac{R}{R+r} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{R}{R-r} \frac{R+r}{R-r} u(x_0) \quad (9.118)$$

其中  $r = |x - x_0| < R$



**证明** 不妨设  $x_0 = 0$ , 则  $r = |x| < R$ , 根据 Poisson 公式可得

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{|x-y|^3} dS(y) \quad (9.119)$$

由于  $R-r \leq |x-y| \leq R+r$ , 故

$$u(x) \leq \frac{R^2 - r^2}{4\pi R} \frac{1}{(R-r)^3} \int_{|y|=R} u(y) dS(y) \quad (9.120)$$

$$= \frac{R+r}{4\pi R(R-r)^2} \cdot 4\pi R^2 u(0) \quad (9.121)$$

$$= \frac{R(R+r)}{(R-r)^2} u(0) \quad (9.122)$$

另一边同理.

## 9.3 极值原理与最大模估计

### 9.3.1 极值原理

考虑方程

$$\mathcal{L}u := -\Delta u + c(x)u = f(x) \quad (9.123)$$

**定理 9.5 (弱极值原理)**

假设  $c(x) \geq 0, f(x) < 0$ , 若  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  且满足方程 9.123, 则  $u(x)$  不能在  $\Omega$  达到它在  $\bar{\Omega}$  上的非负最大值, 即只能在边界达到.



**证明** 若不然, 设  $u$  在  $x_0 \in \Omega$  达到最大值  $M \geq 0$ , 则  $\nabla u(x_0) = 0, \Delta u(x_0) < 0$ , 故

$$\mathcal{L}u(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq 0 \quad (9.124)$$

这与  $f(x_0) < 0$  矛盾.

**定理 9.6**

假设  $c(x) \geq 0, f(x) \leq 0$ , 若  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  满足方程 9.123, 且  $u(x)$  在  $\bar{\Omega}$  上存在正最大值, 则  $u(x)$  必在边界达到最大值, 并且

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u^+(x) \quad (9.125)$$

其中  $u^+(x) = \max\{u, 0\}$ .



这时候不能直接使用前面的方法导出矛盾, 不过可以将问题向那个方向化归, 考虑  $u^\varepsilon = u + \varepsilon v$ , 使得

$$\mathcal{L}u^\varepsilon = f(x) + \varepsilon \mathcal{L}v < 0 \quad (9.126)$$

若  $v$  有界, 则利用弱极值原理有

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} (u + \varepsilon v) + \varepsilon M \leq \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v)^+ + \varepsilon M \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon M \quad (9.127)$$

再令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即证.

回顾上面的过程, 我们对  $v$  作了许多要求:

- $v \geq 0$ .
- $\mathcal{L}v \leq 0$ .
- $v \leq M$ .

下面就来寻找这样的  $v$ .

**证明** 不妨设  $0 \in \Omega$ , 令  $d = \text{dist}(\Omega)$ ,  $v = |x| - d^2 \leq 0$ ,  $u^\varepsilon = u + \varepsilon v$ ,

$$\mathcal{L}u^\varepsilon = f(x) + \varepsilon(-\Delta(|x|^2 - d^2) + c(x)(|x|^2 - d^2)) \quad (9.128)$$

$$= f(x) - 2n\varepsilon - c(x)\varepsilon(d^2 - |x|^2) \quad (9.129)$$

$$< 0 \quad (9.130)$$

根据弱极值原理, 有

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} (u + \varepsilon v) + \varepsilon d^2 \leq \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v)^+ + \varepsilon d^2 \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon d^2 \quad (9.131)$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即证.

为了证明后面的强极值原理, 首先证明 Hopf 引理.

**定理 9.7 (Hopf 引理)**

设  $B_R \subset \mathbb{R}^n$ , 且在其上  $c(x) \geq 0$  有界, 若  $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\bar{B}_R)$  满足

1.  $\mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u \leq 0, x \in B_R$ .
2. 存在  $x_0 \in \partial B_R$ , 使得  $u(x)$  在  $x_0$  达到在  $\bar{B}_R$  上的严格非负最大值, 且当  $x \in B_R$  时,  $u(x) < u(x_0)$ .

则

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} > 0. \quad (9.132)$$

其中  $\nu$  与  $\partial B_R$  在  $x_0$  点的单位外法向量  $\bar{n}$  的夹角小于  $\frac{\pi}{2}$ .



**证明** 根据假设以及连续性,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{x=x_0} \geq 0$  是显然的, 只需要证明其严格大于 0.

仿照前面的思路, 构造  $w(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$ , 寻找  $v$  使得  $w$  在  $x_0$  取最大值, 则

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0, \quad (9.133)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0 \quad (9.134)$$

为此将  $w$  改为  $w = u + \varepsilon v - u(x_0)$ , 若  $v(x_0) = 0$ , 则  $w$  有非负最大值 (在一个点取到非负值, 则最大值必然非负). 也就是说,  $v$  需要满足

$$\mathcal{L}v \leq 0 \quad (9.135)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} = 0 \quad (9.136)$$

$$v(x_0) = 0 \quad (9.137)$$

为了说明  $w$  在  $x_0$  取到极大值, 我们分两步进行:

1. 借助极大值原理说明  $w$  最大值必定在边界取到.
2. 说明  $w$  在边界上的极大值在  $x_0$  取到.

取  $v(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$ , 其中  $\alpha > 0$  待定, 则当  $|x| = R$  时有  $v(x) = 0$ , 并且

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla v \quad (9.138)$$

$$= \frac{x}{|x|} \cdot (-2\alpha x) e^{-\alpha|x|^2} \quad (9.139)$$

$$= -2\alpha|x|e^{-\alpha|x|^2} \quad (9.140)$$

$$< 0 \quad (9.141)$$

以及

$$\Delta v = \sum \partial_{x_i}(-2\alpha x_i e^{-\alpha|x|^2}) \quad (9.142)$$

$$= -2\alpha n e^{-\alpha|x|^2} + 4\alpha^2|x|^2 e^{-\alpha|x|^2} \quad (9.143)$$

$$\mathcal{L}w = \mathcal{L}u - c(x)u(x_0) + \varepsilon \mathcal{L}v \quad (9.144)$$

$$= \mathcal{L}u - c(x)u(x_0) + \varepsilon[(-4\alpha^2|x|^2 + 2\alpha n)e^{-\alpha|x|^2} + c(x)(e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2})] \quad (9.145)$$

$$\leq \varepsilon(-4\alpha^2|x|^2 + 2\alpha n + c(x))e^{-\alpha|x|^2} \quad (9.146)$$

$$\leq 0 \quad (9.147)$$

上面最后一步当  $\alpha$  充分大时成立, 因此可以使用弱极值原理.

当然, 为了避免 0 点对最后一步放缩的影响, 我们在挖去 0 点的区域  $B_R^* = \{x : \frac{R}{2} < |x| < R\}$  使用弱极值原理, 可知  $w$  在  $\overline{B_R^*}$  上非负最大值必在边界取到, 边界有  $|x| = \frac{R}{2}$  和  $|x| = R$  两部分, 当  $x = \frac{R}{2}$  时, 取  $\varepsilon$  充分小, 可使得

$$w(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon(e^{-\alpha\frac{R^2}{4}} - e^{-\alpha R^2}) < 0 \quad (9.148)$$

因此  $w$  极大值在  $|x| = R$  取到, 并且由于  $v(R) = 0$ ,  $u(x_0)$  为  $u$  的极大值, 故  $w \leq 0$ , 即  $w$  极大值在  $x_0$  取到, 命题得证. +

### 定理 9.8 (强极值原理)

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为有界连通开集,  $c(x) \geq 0$  有界, 若  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  在  $\Omega$  上满足  $\mathcal{L}u \leq 0$ , 且  $u$  在  $\Omega$  内达到非负最大值, 则  $u$  在  $\overline{\Omega}$  上恒为常数.



**证明** 令  $M = \max_{\overline{\Omega}} u(x) \geq 0$ ,  $O = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ , 只需证明  $O = \Omega$ , 等价于证明  $O$  非空 (这是显然的), 且  $O$  既开又闭.

任取  $\{x_n\} \subset O$ ,  $x_n \rightarrow x$ , 则根据  $u$  的连续性可知

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = M \quad (9.149)$$

故  $O$  为闭集.

再证  $O$  开, 若不然, 存在  $x_0 \in \Omega \setminus O$ ,  $R > 0$  使得  $B_R(x_0)$  与  $\partial O$  相切于  $y_0$ , 则

1.  $u$  在  $y_0$  达到  $u$  在  $\bar{\Omega}$  上的非负最大值.
2. 对任意  $x \in B_R(x_0)$ ,  $u(x) \leq u(y_0) = M$ .

根据 Hopf 引理, 有  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(y_0) > 0$ , 又因  $y_0 \in \Omega$  达最大值, 故  $\nabla u(y_0) = 0$ , 矛盾, 故  $O$  为开集.

综上, 命题得证.

### 命题 9.5

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为有界连通开集, 若  $u \in C(\bar{\Omega})$  满足平均值性质, 则除非  $u$  为常数, 否则  $u$  只在  $\partial\Omega$  达到最大值与最小值.

**证明** 只考虑最大值情形, 令  $O = \{x \in \Omega : u(x) = M\} \neq \emptyset$ , 则  $O$  为闭集, 再说明  $O$  开. 对任意  $x_0 \in O$ , 存在  $r_0$ , 使得  $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$ , 根据平均值性质有

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B_{r_0}(x_0)|} \int_{B_{r_0}(x_0)} u(y) dy \quad (9.150)$$

而  $u(y) \leq M$ , 故  $u(y) \equiv M$ , 即  $B_{r_0}(x_0) \subset O$ , 即  $O$  为开集, 命题得证.

## 9.3.2 最大模估计

考虑位势方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (9.151)$$

### 定理 9.9 (最大模估计)

设  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  为方程 9.151 的解, 则有

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq G + CF \quad (9.152)$$

其中  $G = \max_{\partial\Omega} |g(x)|$ ,  $F = \max_{\Omega} |f(x)|$ ,  $C = C(n, \text{diam}(\Omega))$  为常数.

**证明** 不妨设  $0 \in \Omega$ , 则对任意  $x \in \Omega$ ,  $|x| < d$ . 令

$$w(x) = u(x) - \left( G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2) \right) \quad (9.153)$$

则

$$-\Delta w = -\Delta u + \Delta \left( \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2) \right) \quad (9.154)$$

$$= f(x) - F \quad (9.155)$$

$$\leq 0 \quad (9.156)$$

$$w|_{\partial\Omega} = g(x) - \left( G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2) \right) \Big|_{\partial\Omega} \quad (9.157)$$

$$\leq g(x) - G \quad (9.158)$$

$$\leq 0 \quad (9.159)$$

根据弱极值原理, 有

$$\max_{\bar{\Omega}} w(x) \leq \max_{\partial\Omega} w(x) \leq 0 \quad (9.160)$$

故

$$u(x) \leq G + \frac{F}{2n}d^2 \quad (9.161)$$

同理再令

$$w(x) = -u(x) - \left(G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2)\right) \quad (9.162)$$

则

$$-\Delta w = \Delta u + \Delta \left(\frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2)\right) \quad (9.163)$$

$$= -f(x) - F \quad (9.164)$$

$$\leq 0 \quad (9.165)$$

$$w|_{\partial\Omega} = -g(x) - \left(G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2)\right)\Big|_{\partial\Omega} \quad (9.166)$$

$$\leq -g(x) - G \quad (9.167)$$

$$\leq 0 \quad (9.168)$$

同理可得

$$-u(x) \leq G + \frac{F}{2n}d^2 \quad (9.169)$$

综上所述得证.

最大模估计意味着解的稳定性和唯一性, 设

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f_1(x), & x \in \Omega \\ u_1(x) = g_1(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_2 = f_2(x), & x \in \Omega \\ u_2(x) = g_2(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (9.170)$$

则由最大模估计, 有

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| + C \max_{\bar{\Omega}} |f_1 - f_2| \quad (9.171)$$

特别当  $f_1 = f_2, g_1 = g_2$  时, 可得  $u_1 = u_2$ , 这蕴含了解的唯一性.

除了最大模估计, 还可以仿照波动方程进行能量估计. 对于方程9.151, 当  $g \equiv 0$  时, 两边同乘  $u$ , 分部积分可得

$$\int_{\Omega} u(-\Delta u)dx = \int_{\Omega} f(x)u(x)dx \quad (9.172)$$

$$= - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (9.173)$$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (9.174)$$

根据 Cauchy 不等式, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 都有

$$|fu| \leq \varepsilon |u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |f|^2 \quad (9.175)$$

取  $\varepsilon \cdot 4d^2 = \frac{1}{2}$ , 则有

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f(x)u(x)dx \quad (9.176)$$

$$\leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |f|^2 dx \quad (9.177)$$

$$\leq 4d^2 \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |f|^2 dx \quad (9.178)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C_1 \int_{\Omega} |f|^2 dx \quad (9.179)$$



即得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq 2C \int_{\Omega} |f|^2 dx \quad (9.180)$$

上面用到了 Friedrichs 不等式, 最后再来证明这一结论.

#### 定理 9.10 (Friedrichs 不等式)

设  $u \in C_0^1(\Omega)$ , 则

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 4d^2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (9.181)$$

其中  $d = \text{diam}(\Omega)$ .



**证明** 由于  $\text{diam}(\Omega) = d$ , 故可做边长为  $2d$  且平行于坐标轴的  $n$  维立方体将  $\Omega$  包含其中, 不妨设此立方体为

$$Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 2d, i = 1, \dots, n\}. \quad (9.182)$$

令

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & x \in \Omega \\ 0, & x \in Q \setminus \Omega \end{cases} \quad (9.183)$$

则显然  $\tilde{u} \in C_0^1(Q)$ , 且

$$\tilde{u}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} \partial_{x_1} \tilde{u}(\xi, \dots, x_n) d\xi. \quad (9.184)$$

根据 Schwarz 不等式可得

$$\tilde{u}^2(x) \leq x_1 \int_0^{x_1} |\partial_{x_1} \tilde{u}(\xi, \dots, x_n)|^2 d\xi \quad (9.185)$$

$$\leq 2d \int_0^{2d} |\partial_{x_1} \tilde{u}(\xi, \dots, x_n)|^2 d\xi \quad (9.186)$$

两端对  $x$  在  $Q$  上积分, 则有

$$\int_Q \tilde{u}^2(x) dx \leq 2d \int_0^{2d} \dots \int_0^{2d} \int_0^{2d} |\partial_{x_1} \tilde{u}(\xi, \dots, x_n)|^2 d\xi dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (9.187)$$

$$\leq 4d^2 \int_0^{2d} \dots \int_0^{2d} |\partial_{x_1} \tilde{u}(\xi, \dots, x_n)|^2 d\xi dx_2 \dots dx_n \quad (9.188)$$

$$= 4d^2 \int_Q |\partial_{x_1} \tilde{u}|^2 dx \quad (9.189)$$

$$\leq 4d^2 \int_Q |\nabla \tilde{u}|^2 dx \quad (9.190)$$

得证.

## 第 10 章 热传导方程

形如

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x, t), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.1)$$

的方程称为热传导方程（简称热方程），通常也会带有对应边值：

1. Dirichlet:

$$u|_{\partial\Omega} = g(x, t) \quad (10.2)$$

2. Newman:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = g(x, t) \quad (10.3)$$

3. Robin:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \Big|_{\partial\Omega} = g(x, t) \quad (10.4)$$

正如其名，热方程来源于热传导问题. 考虑铁棒的传热，或水池中墨水的扩散，种群的发展，都可以通过热传导方程描述，因此热方程也称扩散方程.

求解热方程有如下几种方法：

1. 分离变量法：适用于  $\Omega = [0, l], [0, l]^2$  或圆盘区域.
2. Fourier 变换法：适用于  $\mathbb{R}^n$ .

### 10.1 初值问题

下面考虑方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.5)$$

我们主要讨论 Fourier 变换法.

#### 10.1.1 Fourier 变换回顾

若  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ，定义  $f$  的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.6)$$

Fourier 变换可以看成是物理空间到频率空间的变换，很多时候可以给问题带来新的视角.

Fourier 变换有很多良好的性质，下面逐一讨论.

若  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ，即  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  且  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{|\beta|} |\partial^\alpha f(x)| < +\infty$ ，对任意  $\alpha, \beta$ ，则

1. 令  $(\tau_{x_0} f)(x) = f(x - x_0)$ ，则

$$\widehat{\tau_{x_0} f(x)} = e^{-2\pi i x_0 \cdot \xi} \hat{f}(\xi). \quad (10.7)$$

计算即得

$$\widehat{\tau_{x_0} f(x)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - x_0) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.8)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i (y+x_0) \cdot \xi} dy \quad (10.9)$$

$$= e^{-2\pi i x_0 \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \quad (10.10)$$

$$= e^{-2\pi i x_0 \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \quad (10.11)$$

也就是说, 物理空间的平移体现在频率空间就是作像旋转.

2. 令  $(S_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$ , 则

$$\widehat{S_\lambda f}(\xi) = \lambda^{-n} \hat{f}(\lambda^{-1}\xi). \quad (10.12)$$

计算即得

$$\widehat{S_\lambda f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.13)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \lambda^{-1} y \cdot \xi} \lambda^{-n} dy \quad (10.14)$$

$$= \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \lambda^{-1} \xi} dy \quad (10.15)$$

$$= \lambda^{-n} \hat{f}(\lambda^{-1}\xi) \quad (10.16)$$

3. 对于多重指标  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , 记  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ,  $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ , 则

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi). \quad (10.17)$$

只考虑对某个  $x_j$  求一阶导数的情形, 即

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.18)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.19)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} (2 - \pi i \xi_j) f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.20)$$

$$= (2\pi \xi_j) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.21)$$

$$= (2\pi \xi_j) \hat{f}(\xi) \quad (10.22)$$

4.  $\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f}(\xi) = \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ .

只考虑最简单情形, 计算即得

$$\widehat{-2\pi i x_j f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i x_j f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.23)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.24)$$

$$= \partial_{\xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.25)$$

$$= \partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi) \quad (10.26)$$

5. 卷积性质: 令

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy, \quad (10.27)$$

则对任意  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , 有  $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$  (本条暂且不证).

有了 Fourier 变换, 也可定义 Fourier 逆变换

$$f^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad (10.28)$$

若  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , 则有  $(\hat{f})^\vee = f$ .

**例 10.1** 若  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 则  $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}$ .

**证明** 令  $F(x) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$ , 则

$$F'(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.29)$$

$$= (\pi i) \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-x^2})' e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (10.30)$$

$$= (\pi i)(2\pi i \xi \hat{f}(\xi)) \quad (10.31)$$

$$= -2\pi^2 \xi \hat{f}(\xi) \quad (10.32)$$

$$= -2\pi^2 \xi F(\xi) \quad (10.33)$$

故

$$\begin{cases} F'(\xi) + 2\pi^2 \xi F(\xi) = 0 \\ F(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \end{cases} \quad (10.34)$$

解得  $F(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}$ .

从逆变换的角度看, 上例告诉我们  $(e^{-\pi^2 \xi^2})^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ , 并且有

$$(e^{-4\pi^2 \xi^2 t})^\vee(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (10.35)$$

当  $n \geq 1$  时,

$$(e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t})^\vee(x) = \prod_{j=1}^n (e^{-4\pi^2 \xi_j^2 t})^\vee(x) \quad (10.36)$$

$$= \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} \quad (10.37)$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (10.38)$$

回到热传导方程, 对方程10.5两边关于  $x$  作 Fourier 变换, 根据前面的性质可以推出

$$-\widehat{\Delta f}(\xi) = -\sum_{j=1}^n \widehat{\partial_{x_j}^2 f}(\xi) \quad (10.39)$$

$$= -\sum_{j=1}^n (2\pi i \xi_j)^2 \hat{f}(\xi) \quad (10.40)$$

$$= 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) \quad (10.41)$$

因此有

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases} \quad (10.42)$$

由此可解得

$$\hat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 |\xi|^2 t \hat{\varphi}(\xi) \quad (10.43)$$

故

$$u(x, t) = (e^{-4\pi |\xi|^2 t})^\vee * \varphi \quad (10.44)$$

$$= \left( \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) * \varphi \quad (10.45)$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy \quad (10.46)$$

表面上式在  $t = 0$  处有奇性, 实际上不然.

令 (称为 Heat Kernel)

$$K(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (10.47)$$

$$K_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} K(t^{-1/2}x), \quad t > 0 \quad (10.48)$$

则  $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(y)\varphi(x-y)dy$ .

对  $\{K_t\}_{t>0}$  有

1.  $\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} K(x) dx = 1.$
2.  $\int_{\mathbb{R}^n} |K_t(x)| dx = 1.$
3. 对任意  $\eta > 0$ ,  $\int_{|x|>\eta} |K_t(x)| dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+.$

故  $\{K_t\}_{t>0}$  是一族逼近恒定,  $u(x, t) = K_t * \varphi \rightarrow \varphi, \quad t \rightarrow 0^+$ , 这是因为

$$|u(x, t) - \varphi(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_t(y) (\varphi(x - y) dy - \varphi(x)) \right| \quad (10.49)$$

$$\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} |\varphi(x - y) - \varphi(x)| dy \quad (10.50)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} |\varphi(x - \sqrt{t}z) - \varphi(x)| dz \quad (10.51)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|z|>R} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \alpha \|\varphi\|_{L^\infty} dz + \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|z|<R} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \alpha |\varphi(x - \sqrt{t}z) - \varphi(x)| dz \quad (10.52)$$

其中第一部分

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|z|>R} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \alpha \|\varphi\|_{L^\infty} dz \leq \frac{\alpha \|\varphi\|_{L^\infty}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|y|>R} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dz < \varepsilon \quad (10.53)$$

第二部分由  $\varphi$  连续性, 对任意  $|z| < R$ , 当  $t \rightarrow 0$  时都有  $|\varphi(x - \sqrt{t}z) - \varphi(x)| < \varepsilon$ , 故

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|z|<R} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \alpha |\varphi(x - \sqrt{t}z) - \varphi(x)| dz \leq C\varepsilon \quad (10.54)$$

得证.

关于热方程的解, 有以下性质:

1. 即使初值并不连续, 但  $u \in C^\infty$ , 对任意  $t > 0$ .
2.  $\sup_x |u(x, t)| \leq \sup_x |\varphi(x)|.$
3. 热方程沿时间不能反向演化.
4. 无限传播速度: 对于任意  $t > 0$ , 任何  $x$  处温度均不为 0.

下面我们考虑更一般的情况, 即

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.55)$$

对方程两边作 Fourier 变换, 可得

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} = \hat{f}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases} \quad (10.56)$$

解得

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi) + \int_0^t e^{-4\pi^2 |\xi|^2 (t-s)} \hat{f}(\xi, s) ds \quad (10.57)$$

作 Fourier 逆变换可得

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds \quad (10.58)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-s) f(y, s) dy \quad (10.59)$$

上式称为 Poisson 公式,  $\Gamma(x, t; y, s) = K(x-y, t-s)$  称为热方程的基本解.

## 10.2 极值原理与最大模估计

考虑热传导方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \Omega \times \{t > 0\} \\ u(x, t) = \varphi(x), & \Omega \\ u(x, t) = h(x, t), & \partial\Omega \times \{t \geq 0\} \end{cases} \quad (10.60)$$

令  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ , 定义抛物边界  $\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T$

### 定理 10.1 (极值原理)

假设  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  满足方程

$$\mathcal{L}u := \partial_t u - \Delta u = f \leq 0 \quad (10.61)$$

则  $u(x, t)$  在  $\overline{Q_T}$  上的最大值必在抛物边界  $\partial Q_T$  上达到, 即

$$\max_{\overline{Q_T}} U(X, t) = \max_{\partial Q_T} u(x, t) \quad (10.62)$$



**证明** 令  $M = \max_{\overline{Q_T}}$ ,  $m = \max_{\partial Q_T}$ , 要证  $M = m$ .

Step 1. 设  $f < 0$ , 若  $M > m$ , 设  $u$  在  $(x_0, t_0) \in Q_T$  达到最大值  $M$ , 则  $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0, \Delta u(x_0, t_0) \leq 0$ , 故

$$\mathcal{L}u(x_0, t_0) \geq 0 \quad (10.63)$$

矛盾.

Step 2. 设  $f \leq 0$ , 令  $v = u - \varepsilon t$ , 则

$$\mathcal{L}v = \mathcal{L}u - \varepsilon = f - \varepsilon < 0 \quad (10.64)$$

由 Step 1, 有

$$\max_{\overline{Q_T}} u - \varepsilon T \leq \max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\partial Q_T} v \leq \max_{\partial Q_T} u \quad (10.65)$$

故  $\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\partial Q_T} u + \varepsilon T$ .

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 得证.

### 推论 10.1

假设  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  满足方程

$$\mathcal{L}u = \partial_t u - \Delta u = f \geq 0 \quad (10.66)$$

则  $u$  在  $\overline{Q_T}$  上的最小值必在抛物边界上  $\partial Q_T$  上达到, 即  $\min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\partial Q_T} u$



### 推论 10.2 (比较原理)

设  $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  满足

$$\mathcal{L}u \leq \mathcal{L}v, \quad u|_{\partial Q_T} \leq v|_{\partial Q_T} \quad (10.67)$$

则在  $\overline{Q_T}$  上  $u \leq v$ .



## 10.2.1 最大模估计

## 定理 10.2

设  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  是方程

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, & (0, l) \times \{t > 0\} \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in [0, l] \\ u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t) \end{cases} \quad (10.68)$$

的解, 则  $\max_{\overline{Q_T}} |u(x, t)| \leq FT + B$ , 其中

$$F = \max_{Q_T} |f|, \quad B = \max\{\max_{x \in [0, l]} |\varphi|, \max_{t \in (0, T)} |g_1(t)|, \max_{t \in (0, T)} |g_2(t)|\}. \quad (10.69)$$



**证明** 令  $v = Ft + B \mp u$ , 则  $\mathcal{L}v = F \mp f \geq 0$ ,  $v|_{\partial Q_T} = Ft + B \mp g_i \geq 0$ , 由前面的推论,

$$\min_{\overline{Q_T}} v = \min_{\partial Q_T} v \geq 0, \quad (10.70)$$

故  $v(x, t) = Ft + B \mp u \geq 0$ ,  $|u(x, t)| \leq Ft + B$ , 命题得证.

**注** 根据最大模估计, 也可得到解的稳定性.

对于第三类边值问题, 考虑一维情形

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (0, l) \times \{t > 0\} \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad (\partial_x u + hu)(l, t) = \mu_2(t), h > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.71)$$

解的唯一性, 只需证明方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (0, l) \times \{t > 0\} \\ u(0, t) = 0, \quad (\partial_x u + hu)(l, t) = 0, h > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (10.72)$$

只有零解, 若不然, 则方程的解有正德最大值或负的最小值, 由极值原理, 正的最大值可在边界取到 (即无限长矩形的三条边), 根据边值、初值条件可知必该值在  $x = l$  处取到, 设在  $(l, t^*)$  达到最大值, 则  $\partial_x u(l, t^*) \geq 0$ , 故

$$(\partial_x u + hu)(l, t^*) > 0 \quad (10.73)$$

矛盾, 故  $u$  无法达到正最大值, 同理可证  $u$  无法达到负最小值, 故  $u \equiv 0$ .

再考虑第二类边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x_0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.74)$$

只需证明方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 \\ u(x_0) = 0 \end{cases} \quad (10.75)$$

只有零解.

令  $\tilde{u}(x, t) = w(x)u(x, t)$ , 则  $u = \tilde{u}/w$ ,

$$u_x = -\frac{w_x}{w^2}\tilde{u} + \frac{\tilde{u}_x}{w}, \quad u_{xx} = \left(-\frac{w_{xx}}{w^2} + 2\frac{w_x^2}{w^3}\right)\tilde{u} - 3\frac{w_x}{w^2}\tilde{u}_x + \frac{\tilde{u}_{xx}}{w} \quad (10.76)$$

即

$$0 = \mathcal{L}u = \frac{\tilde{u}_t}{w} + \left(\frac{w_{xx}}{w^2} - 2\frac{w_x^2}{w^3}\right)\tilde{u} + \frac{2w_x}{w^2}\tilde{u}_x - \frac{\tilde{u}_{xx}}{w} \quad (10.77)$$

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \quad \tilde{u}_x(l, t) = (w_x u + u_x w)(l, t) = w_x(l, t)u(l, t) = \frac{w_x(l, t)}{w(l, t)}\tilde{u}(l, t) \quad (10.78)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0 \quad (10.79)$$

取  $w(x) = -x + l + 1$ , 则上述方程变为

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = \frac{2}{-x+l+1}\tilde{u}_x + \frac{2}{(-x+l+1)^2}\tilde{u} \\ \tilde{u}(0, t) = 0, \quad (\tilde{u}_x + \tilde{u})(l, t) = 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (10.80)$$

再令  $v(x, t) = e^{-\lambda t}\tilde{u}(x, t)$ , 则可得  $v$  满足的方程为

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = \frac{2}{(-x+l+1)}v_x - \left(\lambda - \frac{2}{(-x+l+1)^2}\right)v \\ v(0, t) = 0, \quad (v_x + v)(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (10.81)$$

取  $\lambda > 2$ , 则  $\lambda - \frac{2}{(-x+l+1)^2} > 0$ , 断言:  $v$  在  $Q_T$  上的正最大值在边界取到.

若不然, 设在  $(x_0, t_0)$  取到最大值, 则

$$v_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad v_x(x_0, t_0) = 0, \quad v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0, \quad \left(\lambda - \frac{2}{(-x+l+1)^2}\right)v(x_0, t_0) > 0 \quad (10.82)$$

代入方程可知矛盾.

仿照第三类边值的过程, 设  $v$  在  $(\bar{x}, \bar{t})$  取到正的最大值, 则它只能位于  $x = l$  上, 因此  $v_x(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0, v(\bar{x}, \bar{t}) > 0$ , 这导致  $(v_x + v)(l, \bar{t}) > 0$ , 矛盾.

故  $v$  不能达到正最大值, 同理可证  $v$  也不能达到负最小值, 故  $v \equiv 0, u \equiv 0$ .

### 定理 10.3

假设  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ , 是初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t), \quad \mathbb{R} \times \{0 < t \leq T\} \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (10.83)$$

的有界解, 则

$$\sup_{\overline{Q_T}} |u(x, t)| \leq T \sup_{Q_T} |f(x, t)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad (10.84)$$

**证明** 令  $F = \sup_{Q_T} |f(x, t)|, \Phi = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|, M = \sup_{Q_T} |u(x, t)|$ .

对任意  $l > 0$ , 在  $Q_T^l = (-l, l) \times (0, T]$  上考虑辅助函数

$$w(x, t) = Ft + \Phi + v_l(x, t) \pm u(x, t) \quad (10.85)$$

其中  $v_l(x, t) = \frac{M}{l^2}(x^2 + 2t)$ .

则

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = F \pm f(x, t) \geq 0 \\ w|_{t=0} = \Phi + \frac{M}{l^2}x^2 \pm \varphi(x) \geq 0 \\ w|_{x=\pm l} \geq M \pm u \geq 0 \end{cases} \quad (10.86)$$



根据极值原理,  $\min_{\overline{Q_T^l}} w = \min_{\partial Q_T^l} w \geq 0$ . 取  $l$  充分大, 使得  $(x_0, t_0) \in Q_T^l$ , 由于  $w(x_0, t_0) \geq 0$ , 故

$$|u(x_0, t_0)| \leq Ft_0 + \Phi + \frac{M}{l^2}(x_0^2 + 2t_0) \quad (10.87)$$

令  $l \rightarrow +\infty$ , 则有  $|u(x_0, t_0)| \leq FT + \Phi$

**注** 上述命题中有界性可放宽为  $|u(x, t)| \leq e^{A|x|^2}$ ,  $(x, t) \in Q_T$ .

## 10.2.2 能量估计

### 定理 10.4 (能量估计)

假设  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ , 是初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f, & (x, t) \in Q_T = (0, l) \times (0, T] \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (10.88)$$

的解, 则

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^l |u(x, t)|^2 dx + 2 \int_0^T \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \leq M \left( \int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right) \quad (10.89)$$

**证明** 在方程两边同乘  $u$  积分可得

$$\frac{1}{2} \partial_t u^2 - \partial_x(uu_x) + u_x^2 = fu \quad (10.90)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l |u|^2 dx - (uu_x)|_0^l + \int_0^l |u_x|^2 dx = \int_0^l f u dx \quad (10.91)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l |u|^2 dx + \int_0^l |u_x|^2 dx = \int_0^l f u dx \quad (10.92)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^l f^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx \quad (10.93)$$

忽略第二项可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_0^l u^2 dx}_{y(t)} \leq \underbrace{\int_0^l f^2 dx}_{y(t)} + \int_0^l u^2 dx \quad (10.94)$$

使用 Gronwall 不等式可得

$$y(t) \leq e^t y(0) + e^t \int_0^t \int_0^l f^2(x, s) dx ds \quad (10.95)$$

$$\int_0^l u^2 dx \leq e^T \left( \int_0^l \varphi^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, s) dx ds \right) \quad (10.96)$$

将上式代入忽略前的不等式, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l |u|^2 dx + \int_0^l |u_x|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^l f^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx \quad (10.97)$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^l f^2 dx + \frac{1}{2} e^t \left( \int_0^l \varphi^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2 dx dt \right) \quad (10.98)$$

对两边从 0 到  $t$  积分, 可得

$$\frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx + \int_0^t \int_0^l u_x^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^l \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l f^2 dx dt + \frac{1}{2} (e^t - 1) \left[ \int_0^l \varphi^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2 dx dt \right] \quad (10.99)$$

$$\leq \frac{1}{2} e^T \left( \int_0^l \varphi^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2 dx dt \right) \quad (10.100)$$

左边关于  $t$  取  $\max$ , 命题得证.

根据上面的能量不等式, 同样可以说明解的唯一性.

