微分方程引论习题课讲义

wclw

2023 年 9 月 17 日

本习题课讲义参考了黄天一学长去年的微分方程引论习题课讲义, 对黄天一学长表示巨大感谢.

1 一阶隐式方程

前面我们通常考虑形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ 的方程, 事实上给出了一个对一阶导数的显式表达. 若无法给出显式表达, 则考虑更一般的一阶方程

$$F(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 0. \tag{1}$$

本节探讨该方程的解.

1.1 微分法

设从中可以解出 $y = f(x,p)$, $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
则两边对于 x 求导, 可得

$$p = f'_x + f'_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

即

$$(f'_x - p)\mathrm{d}x + f'_p \mathrm{d}p = 0.$$

化简为关于 x, p 的一阶显式微分方程.

1. 若该方程有通解 $p = u(x, C)$, 则方程 (1) 有通解

$$y = f(x, u(x, C)),\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

2. 若该方程有特解 $p = \omega(x)$, 则方程 (1) 有特解

$$y = f(x, \omega(x)).$$

由于 x, p 有良好的对称性, 故可能容易得到 x 关于 p 的表达但反解较为困难. 故有:

3. 若该方程有通解 $x=v(p,C)$, 则方程 (1) 有通解
$$\begin{cases}x=v(p,C),\\ y=f(v(p,c),p),\end{cases}\quad \forall C\in\mathbb{R}.$$
此时 p 可以看作一个参数.

4. 若该方程有特解 $x=z(p)$, 则方程 (1) 有特解
$$\begin{cases}x=z(p),\\ y=f(z(p),p).\end{cases}$$
此时 p 可以看作一个参数.

注. 微分法适用于可用 x,p 表示 y 的部分方程.

例 1.1. 求解克莱洛方程
$$y=xp+f(p),$$
其中 $f''(p)\not\equiv 0$.

解. 两边对 x 求导, 有
$$p=p+x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$
即
$$(x+f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0.$$

1. $p=C$ 为该方程的一个通解, 则原方程有一个通解为
$$y=Cx+f(C),\ \forall C\in\mathbb{R}.$$

2. $x+f'(p)=0$ 时, $x=-f'(p)$ 为该方程的一个特解, 则原方程有一个特解为
$$\begin{cases}x=-f'(p)\\ y=-f'(p)p+f(p).\end{cases}$$

下考虑特解是否由通解得到, 事实上由于 $f''(p)\neq 0$, 由隐函数定理可解得 $p=\omega(x)$, 且
$$x=-f'(\omega(x)).$$
对 x 求导有,
$$1=-f''(\omega(x))\omega'(x).$$
故
$$\omega'(x)\neq 0.$$
即 $\omega(x)$ 不为常数, 这就证明了特解不能由通解得到.

注. 1. 特解上任意一点 (x_0, y_0) 处的切线为

$$y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)(x - x_0) + y_0 = \omega(x_0)x + f(\omega(x_0)).$$

故通解与特解处的切线相对应, 这也证明了特解不能由通解得到.

2. 对 $f(p) = -\frac{1}{4}p^2$ 的情形, 通解为 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$, 特解为 $y = x^2$. 图像如图 1 所示.

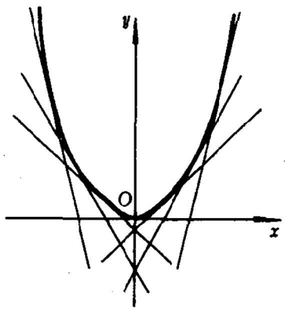

图 1: 例 1.1 解的图像

该图像的特解恰好包络了所有通解.

1.2 参数法

对不明显包含自变量的方程, 即

$$F(y, p) = 0,\ p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

设 $y = g(t),\ p = h(t)$.

1. $h(t) = 0$ 时, y 为常数满足 $F(y, 0) = 0$, 则得到方程的特解.

2. $h(t) \neq 0$ 时, 有

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\mathrm{d}y.$$

故

$$\mathrm{d}x = \frac{g'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t.$$

故微分方程有通解

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{g'(t)}{h(t)}\mathrm{d}t + C \\ y = g(t). \end{cases}$$

例 1.2. 求解微分方程

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 + y^2 = 1.$$

解. 令 $y=\cos t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin t$.

1. $y=\pm 1$ 为方程的特解.

2. $y\neq \pm 1$ 时, 有

$$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t.$$

   故方程有通解为

$$\begin{cases} x=-t+C \\ y=\cos t. \end{cases}$$

   即方程有通解

$$y=\cos(C-x),\ \forall\, C\in\mathbb{R}.$$

对更一般的微分方程 (1),
若将 x,y,p 均看为变量, 则 $(x,y,p)\in\mathbb{R}^3$ 表示空间中的曲面. 令

$$x=f(u,v),\ y=g(u,v),\ p=h(u,v),$$

其中 u,v 为参数. 由

$$\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x,$$

知

$$g'_u\mathrm{d}u+g'_v\mathrm{d}v=h(f'_u\mathrm{d}u+f'_v\mathrm{d}v).$$

即

$$(g'_u-hf'_u)\mathrm{d}u+(g'_v-hf'_v)\mathrm{d}v=0.$$

1. 若该方程有通解 $v=Q(u,C)$, 则方程 (2.5.1) 有通解

$$\begin{cases} x=f(u,Q(u,C)), \\ y=g(u,Q(u,C)). \end{cases}$$

2. 若该方程有特解 $v=S(u)$, 则方程 (2.5.1) 有特解

$$\begin{cases} x=f(u,S(u)), \\ y=g(u,S(u)). \end{cases}$$

   由于 u,v 有良好的对称性, 故可能容易得到 u 关于 v 的表达但反解较为困难. 此时有另一种对称的表达方式, 在此不做说明.

例 1.3. 求解微分方程

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+y-x=0.$$

解. 令

$$x = u,\ p = v,\ y = u - v^2.$$

于是

$$\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v = v\mathrm{d}u.$$

即

$$(1-v)\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v = 0.$$

1. $v = 1$ 为该方程的一个特解, 故

$$y = x - 1$$

为原方程的一个特解.

2. $v \neq 1$ 时, 有

$$\mathrm{d}u - \frac{2v}{1-v}\mathrm{d}v = 0.$$

知通解为

$$u + 2v + 2\,\mathrm{In}|v-1| = C, \quad \forall\, C \in \mathbb{R}.$$

即

$$u = -2v - \mathrm{In}(v-1)^2 + C, \quad \forall\, C \in \mathbb{R}.$$

故方程有通解为

$$\begin{cases} x = -2v - \mathrm{In}(v-1)^2 + C, \\ y = -2v - \mathrm{In}(v-1)^2 - v^2 + C. \end{cases} \quad \forall\, C \in \mathbb{R}$$

2 *Riccati* 方程

定义 1. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

的方程称作 *Riccati* 方程. 其中 $p(x), q(x), r(x)$ 在区间上连续, 且 $p(x) \not\equiv 0$.

该方程为形式最简单的非线性方程, 但已经无法用初等方法解决. 但有如下两个命题对解进行刻画.

定理 1. 设方程的一个特解为 $\varphi(x)$, 则可用积分法求得通解.

证明. 设 $y(x) = u(x) + \varphi(x)$, $y(x)$ 为方程的解，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = p(u+\varphi)^2 + q(u+\varphi) + r.$$

将 φ 为特解的条件带入, 即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (2\varphi P + q)u + pu^2.$$

即转化为 *Bernoulli* 方程. ■

例 2.1. 求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^2 = bx^{-2}.$$

其中 a, b 为常数.

解.

1. $y = 0$ 不是解.
2. $y \neq 0$ 时, 有

   $$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a = b \cdot \frac{1}{x^2y^2}.$$

   即

   $$-\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{y})}{\mathrm{d}x} + a = b \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (\frac{1}{y})^2.$$

   令 $z = \frac{1}{y}$, 则有

   $$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + a = b \cdot \frac{1}{x^2} \cdot z^2.$$

   即转化为齐次方程.

定理 2. 对 *Riccati* 方程的特殊情形

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^2 = bx^m,$$

其中 $a \neq 0, b, m$ 均为常数. 当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 当

$$m = 0,\ -2,\ \frac{-4k}{2k+1},\ \frac{-4k}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

时, 该形式可化为可分离变量的方程.

证明. 不妨设 $a = 1$, 否则可以通过令 $x' = ax$ 化简. 故讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = bx^m.$$

1. $m = 0$ 时,

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^2 = b$$

   为可分离变量的方程.

2. $m=-2$ 时, 在例 2.1中已转化为齐次方程, 进而可转化为可分离变量的方程.

3. $m=\frac{-4k}{2k+1}$ 或 $m=\frac{-4k}{2k-1}$ 时, 请参考丁同仁老师常微分方程讲义 P41 定理 3，变换较为神奇，感觉不太能看出来他的想法?

■

注. 本充分条件为 1725 年 *Daniel Bernoulli* 得到的结果. 事实上该条件同样为必要条件, 在 1841 年被刘维尔证明. 表明即使是形式简单的 *Riccati* 方程, 大部分也是不能用初等积分的办法解的.

3 习题讲解

3.1 作业部分

第一次作业下一周才交，因此在下一次习题课讲.

3.2 补充习题

例 3.1. 解一些方程:

1. $y(1+x^2y^2)\mathrm{d}x=x\mathrm{d}y$.
2. (20 丘赛) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x^6-y^2}+3y$.
3. $(y')^4+y^2=y^4$.
4. $y+xy'=4\sqrt{y'}$.

解.

1. 首先 $x=0,y=0$ 都是特解. $x,y\neq 0$ 时, 为了化齐次, 我们从“让人为难”的一项 $1+x^2y^2$ 着手. 存在两种可能的变换: $x\mapsto\frac{1}{x},y\mapsto\frac{1}{y}$. 我们采用前一种 (后一种也可), 令 $u=\frac{1}{x}$. 则
$$\left(1+y^2/(\frac{1}{x})^2\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{xy}\mathrm{d}y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=-\frac{y}{u}\left(1+\frac{y^2}{u^2}\right).$$
作变换 $z=y/u$, 则方程化为
$$u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}+z=-z-z^3\Rightarrow\frac{u^2z}{\sqrt{z^2+2}}=C(C\neq 0).$$
由此可得原方程的通积分为 $y=Cx\sqrt{2+x^2y^2}(C\neq 0)$, $C=0$ 即对应特解 $y=0$.

2. 从 $\sqrt{x^6-y^2}$ 一项着手, 为了保证齐次, 我们作变换 $u=x^3$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{\sqrt{x^6-y^2}+3y}{3x^3}=\frac{y}{u}+\frac{\mathrm{sgn}u}{3}\sqrt{1-\frac{y^2}{u^2}}.$$

作变换 $z=\frac{y}{u}$, 则方程化为

$$z+u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=z+\frac{\mathrm{sgn}u}{3}\sqrt{1-z^2}\Rightarrow z=\sin\left(\frac{\mathrm{sgn}u}{3}\ln|u|+C\right).$$

由此可得原方程的通解为 $y=x^3\sin(C+\mathrm{sgn}x\ln|x|)$.

3. 本题可以直接硬积分处理，但是做一些变换可以使其更加简单. 如令 $y=\frac{1}{\cos z}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin z}{\cos^2 z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

因此，原方程可以化简为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{\cos z}{\sqrt{\sin z}}.$$

故

$$\pm\frac{\sqrt{\sin z}}{\cos z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}x.$$

对其积分即可（Tip：分子分母同乘 $\cos z$）

4. 设 $y'=p$，$p=0$ 时，$y=0$ 为原方程的特解. $p\neq 0$ 时,

$$x=\frac{4}{\sqrt{p}}-\frac{y}{p}.$$

两边同时对 y 求导,

$$\frac{1}{p}=-\frac{1}{p}+(\frac{y}{p^2}-\frac{2}{p^{\frac{3}{2}}})\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}=\frac{y}{2p}-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}.$$

即转化为一阶线性方程.

最终可解得原方程具有通解:

$$\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{p}}-C+\mathrm{In}p,\\ y=\sqrt{p}(C-\mathrm{In}p).\end{cases}$$

例 3.2 (一阶线性方程的周期解). 设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x),$$

其中 $a>0$ 为常数, 而 $f(x)$ 为以 2π 为周期的连续函数, 试求方程的 2π 周期解.

解. 由定理 2.4, 该方程的解为

$$
\begin{aligned}
y =& Ce^{-\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_s^x a\mathrm{d}t}\mathrm{d}s \\
\overset{x_0=0}{=}& Ce^{-ax} + \int_0^x f(s)e^{-a(x-s)}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

断言: 方程的解有周期性等价于 $y(0)=y(2\pi)$.

1. 由解的周期性, $y(0)=y(2\pi)$.

2. 当 $y(0)=y(2\pi)$ 时, 下证明 $\forall x \in R$, 有 $y(x)=y(x+2\pi)$.
   令 $u(x)=y(x+2\pi)-y(x)$, 则

   $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y(x+2\pi)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(f(x+2\pi)-ay(x+2\pi))-(f(x)-ay(x))=-au(x).$$

   $u(x)$ 为齐次方程的解, 而 $u(0)=0$, 故 $u(x)\equiv 0$, 即 $\forall x\in R$, 有 $y(x)=y(x+2\pi)$.

则有方程

$$
\begin{aligned}
C &= y(0) \\
&= y(2\pi) \\
&= Ce^{-2\pi a} + \int_0^{2\pi} f(s)e^{-a(2\pi-s)}\mathrm{d}s \\
&= Ce^{-2\pi a} + e^{-2\pi a}\int_0^{2\pi} f(s)e^{as}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

解得

$$C=\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi} f(s)e^{as}\mathrm{d}s.$$

例 3.3. 对方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x).$$

其中 $p(x),q(x)$ 均为以 ω 为周期的周期函数. 则:

1. 若 $q(x)\equiv 0$, 该方程的任意非零解以 ω 为周期, 当且仅当

   $$\bar{p}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} p(x)\mathrm{d}x=0.$$

2. 若 $q(x)\not\equiv 0$, 该方程有唯一的周期解, 当且仅当

   $$\bar{p}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} p(x)\mathrm{d}x\neq 0.$$

证明. 1. 可以直接解得方程存在通解

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}.$$

故任意非零解以 ω 为周期

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y(x) = y(x+\omega), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \\
&\Leftrightarrow Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} = Ce^{-\int_{x_0}^{x+\omega} p(t)\mathrm{d}t}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \\
&\Leftrightarrow e^{-\int_{x}^{x+\omega} p(t)\mathrm{d}t} = 1.
\end{aligned}$$

由于 p 为周期函数，则

$$e^{-\int_{x}^{x+\omega} p(t)\mathrm{d}t} = e^{-\int_{0}^{\omega} p(t)\mathrm{d}t} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

2. 此时上一题中的断言仍然成立, 我们只需证明方程存在唯一满足 $y(\omega) = y(0)$ 的解 $y(x)$ 的充要条件是 $\bar{p} \neq 0$. 设 $y(x)$ 满足初值 $y(0) = y_0$, 则

$$y(x) = e^{-\int_0^x p(s)\mathrm{d}s}\left(y_0 + \int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right).$$

计算可得

$$y(\omega) - y(0) = y_0(e^{-\omega\bar{p}} - 1) + e^{-\omega\bar{p}}\int_0^{\omega} q(s)e^{\int_0^s p(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

若 $\bar{p} \neq 0$, 则求得唯一的 ω-周期解, 对应初值为

$$y_0 = \frac{e^{-\omega\bar{p}}}{1 - e^{-\omega\bar{p}}}\int_0^{\omega} q(s)e^{\int_0^s p(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

若 $\bar{p} = 0$, 由解式可得方程要么不存在周期解, 要么所有解都是周期解, 因此不唯一.

■

例 3.4 (分离型方程的初值问题解的局部唯一性)**.** 考虑分离型方程的初值问题:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x)T(t), \quad x(\xi) = \eta. \tag{2}$$

在 $X(\eta) = 0$ 时, 初值问题存在解 $x \equiv \eta$. 我们希望能给出上述解在局部唯一的充分条件.

1. 首先给出初值问题解不唯一的例子: 考虑方程 $x'(t) = \sqrt{|x|}$.

2. 下面给出判定初值问题 (2) 解的局部唯一性的一个充分条件. 设初值问题 (2) 中的 $X(x), T(t)$ 均为连续函数, 且在 η 的某个邻域 $(\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ 上成立 $X(x) = 0 \Leftrightarrow x = \eta$. 若反常积分

$$\left|\int_{\eta}^{\eta\pm\varepsilon} \frac{\mathrm{d}y}{X(y)}\right| = \infty,$$

则 (2) 的解局部唯一.

3. 上述反常积分发散只能作为充分条件而非必要条件, 考虑以下方程:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -t\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} = \begin{cases} -t\sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ t\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

证明. 1. 若 $x(t)$ 是方程的解, 则 $-x(-t)$ 也是方程的解, 因此我们只需讨论方程的正解. 此时有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \mathrm{d}t \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + C \Rightarrow x = \frac{(t+C)^2}{4}.$$

其中 $t > -C$. 方程的负通解为 $-x(-t;C) = -\frac{(C-t)^2}{4}$. 此外, 方程特解为 $x \equiv 0$. 因此初值条件 $x(0) = 0$ 下, 初值问题存在两个不同的解:

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4}, & t \geqslant 0 \\ -\dfrac{t^2}{4}, & t < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(t)\frac{t^2}{4}.$$

2. 假设此时 (2) 的解在局部不唯一, 设 $x(t)$ 是异于特解 $x \equiv \eta$ 的解. 不妨设存在 $\bar{\xi} > \xi$, 使得 $x(\bar{\xi}) = \bar{\eta} \in (\eta, \eta + \varepsilon)$, 设 $t_0 = \sup\{t < \bar{\xi} : x(t) = \eta\}$. 则在区间 $t \in (t_0, \bar{\xi}]$ 上, 总成立

$$\frac{\mathrm{d}x}{X(x)} = T(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\bar{\eta}}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{X(x)} = \int_{\bar{\xi}}^{t} T(s)\mathrm{d}s.$$

令 $t \to t_0^+$, 上式中 LHS 为发散的反常积分, RHS 为有限积分, 矛盾! 因此初值问题的解在局部唯一.

3. 若 $x(t)$ 是上述方程的解, 则 $-x(t)$ 也是方程的解. 因此我们只需求方程的正解. 此时有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = -t\mathrm{d}t \Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{C - t^2}{2}.$$

因此正通解为

$$x = \frac{(C-t^2)^2}{16}, \quad -\sqrt{C} < t < \sqrt{C}(C > 0).$$

负通解为 $x = -\frac{(C-t^2)^2}{16}$. 此时方程在初值条件 $x(0) = 0$ 下存在唯一解 $x \equiv 0$. 但是在 $x = 0$ 附近, 有

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}} = 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}} = -2\sqrt{\varepsilon}.$$

这说明反常积分收敛不是局部解唯一的必要条件.

■

例 3.5 (Gronwall 不等式的应用举例)**.** 已知方程 $\dot{x} = -x + f(t,x)$, 其中 $f \in C(\mathbb{R}^2)$, 且 $|f(t,x)| \leqslant \phi(t)|x|, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$. 若 $\int_0^\infty \phi(t)\mathrm{d}t < +\infty$, 证明方程的任一解在 $t \to \infty$ 时的极限为零.

证明. 任取方程的解 $x(t)$, 令 $y(t) = x(t)e^t$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(xe^t) = e^t f(t,x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^t f(t, ye^{-t}) \Rightarrow y(t) = \eta + \int_0^t e^s f(s, y(s)e^{-s})\mathrm{d}s.$$

由题设条件可得 $t \geqslant 0$ 时, 有

$$|y(t)| \leqslant |\eta| + \int_0^t e^s |f(s, y(s)e^{-s})|\mathrm{d}s \leqslant |\eta| + \int_0^t \phi(t)|y(s)|\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)| \leqslant |\eta| e^{\int_0^t \phi(t)dt} \leqslant |\eta| e^{\int_0^\infty \phi(t)dt} \triangleq M \Rightarrow |x(t)| \leqslant Me^{-t}.$$

因此 $x(t)$ 在 $t \to +\infty$ 时的极限为零. ■

例 3.6 (压缩映射原理证明解的存在唯一性)**.** 设 $I = [a,b]$, 设函数 $f(t)$ 在 I 上连续, $K(t,s)$ 在 $I \times I$ 上连续, 证明: 积分方程

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

在 I 上有唯一解.

证明. 我们利用压缩映射原理证明. 设 $\max\limits_{I\times I}|K| = M$, 在函数空间 $C(I)$ 上, 赋予范数 $\|x\| = \max\limits_{t\in I} e^{-M(t-a)}|x(t)|$, 则 $C(I)$ 成为 Banach 空间. 构造算子

$$\mathcal{T} : C(I) \to C(I), \quad (\mathcal{T}x)(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

则任取 $x_1, x_2 \in C(I)$, 有

$$\begin{aligned}
e^{-M(t-a)}|(\mathcal{T}x_1)(t) - (\mathcal{T}x_2)(t)| &\leqslant e^{-M(t-a)} \int_a^t |K(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant e^{-M(t-a)} \int_a^t Me^{M(s-a)} \cdot e^{-M(s-a)}|x_1(s) - x_2(s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \|x_1 - x_2\| e^{-M(t-a)} e^{-M(s-a)}\Big|_a^t \\
&\leqslant (1 - e^{-M(b-a)})\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

进而我们有 $\|\mathcal{T}x_1 - \mathcal{T}x_2\| \leqslant \theta\|x_1 - x_2\|$, 其中 $\theta = 1 - e^{-M(b-a)} \in (0,1)$. 所以 $\mathcal{T}$ 是压缩映射, 由压缩映射原理可得 $\mathcal{T}$ 在 $C(I)$ 中存在唯一的不动点, 进而积分方程在 I 上有唯一解. ■

下面是一个几乎一样的例子，请读者自行完成.

例 3.7. 利用压缩映射原理证明: 当 $|\lambda|$ 充分小时, 积分方程

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

在 $[a,b]$ 上存在唯一解, 这里 $K(t,s)$ 在 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上是连续的.

证明. 设 $\max|K| = M < \infty$. 定义 $C[a,b]$ 上的范数为 $\|\varphi\| = \max\limits_{[a,b]} e^{M(t-a)}|\varphi(t)|$, 则 $(C[a,b], \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间. 定义算子 $\mathcal{T}: C[a,b] \to C[a,b]$ 为

$$(\mathcal{T}\varphi)(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds.$$

则我们有

$$\begin{aligned}|(\mathcal{T}\varphi)(t) - (\mathcal{T}\psi)(t)| &\leqslant |\lambda| \int_a^b M|\varphi(s)-\psi(s)|ds = |\lambda| \int_a^b Me^{-M(s-a)} \cdot e^{M(s-a)}|\varphi(s)-\psi(s)|ds \\ &\leqslant |\lambda|\|\varphi-\psi\| \int_a^b Me^{-M(s-a)}ds \leqslant |\lambda|(1-e^{-M(b-a)})\|\varphi-\psi\|.\end{aligned}$$

因此当 λ 满足 $|\lambda| < (1-e^{-M(b-a)})^{-1}$ 时, $\mathcal{T}$ 成为压缩映射, 进而存在唯一的不动点, 即积分方程存在唯一解 $\varphi \in C[a,b]$. ■

例 3.8 (21mid，课本 P97 5，Picard 迭代方法)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $0 \leqslant x \leqslant a, |y| < b$ 上连续, 且当 $y_1 \leqslant y_2$ 时, $f(x,y_1) \leqslant f(x,y_2)$. 对于所有的 x, $f(x,0) \geqslant 0$. 通过构造 Picard 序列证明: 初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(0) = 0$$

在区间 $0 \leqslant x \leqslant h$ 上存在解, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_R |f(x,y)|.$$

证明. 构造 Picard 序列如下:

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_k(x) = \int_0^x f(s, \varphi_{k-1}(s))\mathrm{d}s (k \geqslant 1).$$

当 $x \in [0,h]$ 时, 我们有:

1. $\varphi_0(x) = 0$.

2. 若 $|\varphi_k(x)| \leqslant b$, 则

$$|\varphi_{k+1}(x)| \leqslant \int_0^x |f(s,\varphi_k(s))|\mathrm{d}s \leqslant \int_0^x \max_R |f|\mathrm{d}s \leqslant Mh \leqslant b.$$

由归纳法即得 $|\varphi_k(x)| \leqslant b, \forall x \in [0,h], \forall k$. 另一方面, 有

1. $\varphi_1(x) = \int_0^x f(s,0)\mathrm{d}s \geqslant 0 = \varphi_0(x)$.

2. 若 $\varphi_k(x) \geqslant \varphi_{k-1}(x)$, 则

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = \int_0^x (f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s)))\mathrm{d}s \geqslant 0.$$

由归纳法即得 $\varphi_0(x) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots, \forall x \in [0,h]$. 由上述可得在 $[0,h]$ 上, φ_k 逐点收敛于某个函数 φ, 且 $\varphi_0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \cdots \leqslant \varphi$.

另一方面, 在 $[0,h]$ 上, 我们已证明了 $\{\varphi_k\}$ 一致有界, 又由

$$|\varphi_k(x)-\varphi_k(y)| = \left|\int_0^x f(s,\varphi_{k-1}(s))\mathrm{d}s - \int_0^y f(s,\varphi_{k-1}(s))\mathrm{d}s\right| \leqslant \left|\int_y^x |f(s,\varphi_{k-1}(s))|\mathrm{d}s\right| \leqslant M|x-y|.$$

因此 $\{\varphi_k\}$ 等度连续. 由 Arzelà-Ascoli 定理可得 $\{\varphi_k\}$ 存在一致收敛子列 $\{\varphi_{k_n}\}$, 一致极限即为 φ. 由此可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 对任意 $n \geqslant N, x \in [0,h]$, 有

$$|\varphi_{k_n}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

故对任意 $k \geqslant k_N$, 有

$$|\varphi_k(x) - \varphi(x)| = \varphi(x) - \varphi_k(x) \leqslant \varphi(x) - \varphi_{k_N}(x) < \varepsilon.$$

即说明了 φ_k 在 $[0,h]$ 上一致收敛于 φ. 因此

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \int_0^x f(s,\varphi_k(s))\mathrm{d}s = \int_0^x f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s.$$

所以 $\varphi(x)$ 是初值问题的一个解. ■

4 补充内容

该部分的 2、3 两个内容在泛函分析或者数学分析 B3 课程中会学到，此处不要求掌握.

4.1 *Lip* 条件与局部 *Lip* 条件

定义 2 (*Lipschitz* 条件)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内满足

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

常数 $L > 0$. 称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y 满足 Lip-条件.

定义 3 (局部 *Lipschitz* 条件)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 上连续，求对于区域内任意一点 (x_0,y_0)，存在一个矩形 Q，使得 $(x_0,y_0)\in Q\subset G$，且在 Q 内满足 *Lipschitz* 条件，此时称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y 满足局部 Lip-条件.

注. 自然从函数 x^2+y^2 来看，对 y 有连续的偏导数，因此满足局部 *Lip* 条件，但是在 R 上对 y 不满足全局 *Lip* 条件.

定理 3 (有界闭集合中局部 Lip 和全局 Lip 的等价性)**.** G 为有界闭集合，则连续函数 f 满足局部 *Lip* 条件等价于满足全局 *Lip* 条件.

证明. 全局 *Lip* 即得局部 *Lip*，只需要证明局部 *Lip* 可以得到全局 *Lip*.

假设 f 在 G 上不满足全局 *Lip* 条件，则对 $\forall n$，$\exists\, x_n\neq y_n$，满足

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant n|x_n-y_n|.$$

由于 G 为紧集，则 $\exists\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0\in\ G$.

根据子列的选取，$\{x_{n_k}\}$ 应满足：

$$|x_{n_k}-y_{n_k}|\leqslant\frac{|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|}{n_k}\to 0,\ as\ k\to\infty.$$

这里利用了 f 在 G 上的有界性，故 $y_{n_k}\to x_0$.

f 满足局部 *Lip* 条件，故 $\exists\, B_r(x_0)$，$r>0$，f 在 $B_r(x_0)\cap G$ 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|.$$

故

$$n_k\leqslant\frac{|f(x_{n_k})-f(y_{n_k}|}{|x_{n_k}-y_{n_k}|}\leqslant L.$$

对较大的 n_k 即得矛盾. ■

4.2 *Banach* 不动点定理，压缩映射原理

定义 4 (压缩映射)**.** (X,d) 为度量空间，若从 X 到 X 的映射 T 满足，$\exists\,\alpha\in(0,1)$，使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y),\quad\forall\,x,y\in X.$$

定理 4 (*Banach* 不动点定理，压缩映射原理)**.** 完备度量空间到自身的压缩映射一定有不动点，且不动点唯一.

证明. 任取 $x_0\in X$，定义迭代序列

$$x_{n+1}=Tx_n.$$

则 $d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant \alpha d(x_n,x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n d(x_1,x_0)$. 故

$$d(x_{n+p},x_n)\leqslant\sum_{k=1}^{p}d(x_{n+k},x_{n+k-1})\leqslant\sum_{k=1}^{p}\alpha^{n+k-1}d(x_1,x_0)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\ \to 0,\ as\ n\to\infty.$$

该表达式对任意 p 成立，因此 $\{x_n\}$ 为基本列.
由 X 的完备性可知，$\exists\, x^*\in X$，s.t. $d(x_n,x^*)\to 0$，$as\ n\to\infty$.
故

$$d(Tx^*,x^*)\leqslant d(Tx^*,Tx_n)+d(Tx_n,x_n)+d(x_n,x^*)\leqslant\alpha d(x^*,x_n)+d(x_{n+1},x_n)+d(x_n,x^*)\to 0.$$

则 $Tx^*=x^*$.
下说明唯一性. 假设 y^* 也为不动点，则

$$d(x^*,y^*)=d(Tx^*,Ty^*)\leqslant\alpha d(x^*,y^*).$$

则 $d(x^*,y^*)=0$，有 $x^*=y^*$. ■

4.3 Arzela-Ascoli

参考课本 P82 页.

5 附注

本部分列举了需要用到的定理.

定理 5 (一阶齐次线性方程的通解)**.** 一阶齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0.$$

的通解为

$$y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s},\ \forall C\in\mathbb{R}.$$

定理 6 (一阶非齐次线性方程的通解)**.** 一阶非齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x).$$

的通解为

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}(\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s+C),\ \forall C\in\mathbb{R}.$$

定理 7 (Gronwall 不等式)**.** 令 k 是非负常数, $f(x), g(x)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续非负函数, 且满足不等式

$$f(x) \leqslant k + \int_{\alpha}^{x} f(s)g(s)\mathrm{d}s,\ \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

则

$$f(x) \leqslant k e^{\int_{\alpha}^{x} g(s)\mathrm{d}s}.$$

定理 8 (Gronwall 不等式, 微分形式)**.** 令 $f \in C^1([\alpha, \beta])$ 非负, 且满足

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \leqslant g(x)f(x),\ \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

其中 $g(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 非负. 则有

$$f(x) \leqslant f(\alpha) e^{\int_{\alpha}^{x} g(s)\mathrm{d}s},\ \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

定理 9 (Arzela-Ascoli)**.** $\{\varphi_i(x)\}$ 为一列有界闭区间 I 上的连续函数，满足：

1. 一致有界：$|\varphi_i(x)| \leqslant k,\ \forall\, i,\ \forall\, x$
2. 等度连续：$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta$，对 $\forall x_1,\ x_2 \in I,\ |x_1 - x_2| < \delta$ 时，有

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \leqslant \epsilon,\ \forall\, i$$

则 $\exists\, \{\varphi_{i_j}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.