2022 秋期中参考解答

黄天一　陈禹汐

2022 年 11 月 20 日

一、选择题, 共 20 分.

(1) (C).　　(2) (B).　　(3) (C).　　(4) (D).

二、求解线性微分方程组的初值问题, 共 12 分.

(解法一: 逐项消元) 首先求解可得

$$\frac{dy}{dt} = -y + e^t, \quad y(0) = 0 \Rightarrow y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad \cdots\cdots(4')$$

代入第一个方程可得

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{4} - \frac{te^{-t}}{2} \quad \cdots\cdots(8').$$

代入第三个方程可得

$$\frac{dz}{dt} = -4z + \frac{e^t - e^{-t}}{4} - \frac{te^{-t}}{2} \Rightarrow z(t) = \frac{e^t}{20} - \frac{e^{-t}}{36} - \frac{te^{-t}}{6} - \frac{e^{-4t}}{45}. \quad \cdots\cdots(12')$$

求解完毕.

(解法二: 常系数方程组算法) 计算可得

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 4).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$(重数为 2), $\lambda_2 = -4$(重数为 1). $\cdots\cdots(3')$

1. 计算可得 $(A+I)^2 r = 0$ 的基础解系为 $r_{1,0}^{(1)} = (1,3,0)^T$, $r_{2,0}^{(1)} = (0,-9,1)^T$. 因此

   $$r_{1,1}^{(1)} = (I + A) r_{1,0}^{(1)} = (3,0,1)^T, \quad r_{2,1}^{(1)} = (A + I) r_{2,0}^{(1)} = (-9,0,-3)^T.$$

   因此可得

   $$R_1 = r_{1,0}^{(1)} + t r_{1,1}^{(1)} = (1+3t, 3, t), \quad R_2 = r_{2,0}^{(1)} + t r_{2,1}^{(1)} = (-9t, -9, 1-3t).$$

2. 计算可得 $\lambda_2 = -4$ 的一个特征向量为 $R_3 = (0, 0, 1)^T$.

综上可得齐次方程的基解矩阵为

$$\Phi(t) = (e^{-t}R_1, e^{-t}R_2, e^{-4t}R_3) = \begin{pmatrix} (1+3t)e^{-t} & -9te^{-t} & 0 \\ 3e^{-t} & -9e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & (1-3t)e^{-t} & e^{-4t} \end{pmatrix}. \quad \cdots\cdots(7')$$

计算可得

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & -te^t & 0 \\ \frac{e^t}{3} & -\frac{3t+1}{9}e^t & 0 \\ -\frac{e^{4t}}{3} & \frac{e^{4t}}{9} & e^{5t} \end{pmatrix}. \quad \cdots\cdots(9')$$

结合零初值与非齐次项 $f(t) = (0, e^t, 0)^T$ 可得初值问题的解为

$$\begin{aligned}(x(t), y(t), z(t))^T &= \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}f(s)ds \\ &= \begin{pmatrix} (1+3t)e^{-t} & -9te^{-t} & 0 \\ 3e^{-t} & -9e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & (1-3t)e^{-t} & e^{-4t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -se^{2s} \\ -\frac{3s+1}{9}e^{2s} \\ \frac{e^{5s}}{9} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} (1+3t)e^{-t} & -9te^{-t} & 0 \\ 3e^{-t} & -9e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & (1-3t)e^{-t} & e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{4}(1-2t) - \frac{1}{4} \\ \frac{e^{2t}}{36}(1-6t) - \frac{1}{36} \\ \frac{e^{5t}}{45} - \frac{1}{45} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^t - e^{-t}}{4} - \frac{te^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t}{20} - \frac{e^{-t}}{36} - \frac{te^{-t}}{6} - \frac{e^{-4t}}{45} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(12')\end{aligned}$$

注: 求出了非齐次问题的通解, 但是没代入初值, 得 10 分.

三、求方程的所有实值解.

(1) (共 6 分) $x' = (x+t)^2$.

作变换 $u = x + t$, 则有

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} + 1 = u^2 + 1 \quad \cdots\cdots(2')$$

由此整理积分可得

$$\frac{du}{u^2+1} = dt \Rightarrow \arctan u = t + C \Rightarrow x = \tan(t+C) - t. \quad \cdots\cdots(4')$$

(2) (共 6 分) $t^2x' = tx + x^2$.

作变换 $x = ut$, 则 $x' = u't + u$. 代入可得

$$t^2(u't+u) = ut^2 + u^2t^2 \Rightarrow tu' = u^2. \quad \cdots\cdots(2')$$

首先 $u = 0$ 是一特解, 对应着原方程特解 $x = 0(3')$. 若 $u \neq 0$, 则有

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{1}{u} = C - \ln|t|.$$

因此原方程通解为 $x = \frac{t}{C-\ln|t|} \quad \cdots\cdots(6')$.

(3) (共 6 分) $(e^t + x - 1)dt - (\cos x - t)dx = 0$.

注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}(t - \cos x) = \frac{\partial}{\partial x}(e^t + x - 1) = 1.$$

因此原方程是恰当方程 $(2')$. 设其对应的一个通积分为 $\Phi(x,t) = C$, 则

$$\Phi(x,t) = \int_0^t (e^s + x - 1)ds + \phi(x) = e^t - 1 + (x-1)t + \phi(x).$$

$$\Phi(x,t) = \int_0^x (t - \cos u)du + \psi(t) = tx - \sin x + \psi(t).$$

比较上述两式可得

$$\phi(x) = -\sin x, \quad \psi(t) = e^t - t - 1, \quad \Phi(x,t) = e^t - t - 1 + xt - \sin x.$$

因此方程的通积分为 $e^t - t + xt - \sin x = C. \quad \cdots\cdots(6')$

或者直接用课上讲的定理给出的通积分公式来计算:

$$\Phi(x,t) = \int_0^t (e^s + x - 1)ds + \int_0^x (-\cos u)du = e^t - 1 + (x-1)t - \sin x.$$

(4) (共 6 分) $x^3dt + 2t(t - x^2)dx = 0$.

首先 $t = 0$ 是方程一特解 $(1')$, 下面总假设 $t \neq 0$. 作变换 $y = x^2$, 则由原方程可得

$$x^4dt + t(t-x^2)(2xdx) = 0 \Rightarrow y^2dt + t(t-y)dy = 0. \quad \cdots\cdots(3')$$

再作变换 $y = ut$, 则方程化为

$$u^2t^2dt + t^2(1-u)(udt + tdu) = 0 \Rightarrow udt + t(1-u)du = 0. \quad \cdots\cdots(4')$$

$u = 0$ 是一特解, 对应原方程特解 $x = 0$. 若 $u \neq 0$, 则整理可得

$$\frac{u-1}{u}du = \frac{dt}{t} \Rightarrow ut = Ce^u.$$

代回可得通积分 $x^2 = Ce^{\frac{x^2}{t}}$, 特解 $x = 0$ 包含在内. $\cdots\cdots(6')$

(5) (共 6 分) $x'' - 8x' + 7x = (2t-1)e^t + \sin t$.

首先齐次方程的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$, 其通解为 $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{7t}(2')$. 由叠加原理, 只需分别求得方程

$$x'' - 8x' + 7x = (2t-1)e^t(\text{i}), \quad x'' - 8x' + 7x = \sin t(\text{ii})$$

的特解并相加即得原方程特解.

设 (i) 的一个特解为 $x_1(t) = t(At+B)e^t$, 则有

$$x_1'(t) = (At^2 + (B+2A)t + B)e^t, \quad x_1''(t) = (At^2 + (B+4A)t + 2B + 2A)e^t.$$

代入方程 (i) 可得

$$(-12At + 2A - 6B)e^t = (2t-1)e^t \Rightarrow A = -\frac{1}{6},\ B = \frac{1}{9}.$$

即方程 (i) 的一个特解为 $x_1(t) = (-\frac{t^2}{6} + \frac{t}{9})e^t$. $\quad \cdots\cdots(4')$

设 (ii) 的一个特解为 $x_2(t) = C\cos t + D\sin t$, 则

$$x_2'(t) = -C\sin t + D\cos t, \quad x_2''(t) = -C\cos t - D\sin t.$$

代入方程 (ii) 可得

$$(6C - 8D)\cos t + (8C + 6D)\sin t = \sin t \Rightarrow C = \frac{2}{25},\ D = \frac{3}{50}.$$

即方程 (ii) 的一个特解为 $x_2(t) = \frac{2}{25}\cos t + \frac{3}{50}\sin t$.

综上可得原方程通解为

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{7t} + e^t\left(-\frac{t^2}{6} + \frac{t}{9}\right) + \frac{2}{25}\cos t + \frac{3}{50}\sin t. \quad \cdots\cdots(6')$$

(6) (共 6 分) $2t^2x'' - tx' + (t+1)x = 0$.

$t = 0$ 是方程的正则奇点, 可以运用广义幂级数法. 设广义幂级数解为 $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\rho}$, 则有

$$x'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+\rho) t^{k+\rho-1}, \quad x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+\rho)(k+\rho-1) t^{k+\rho-2}.$$

代回方程整理可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k((k+\rho)(2k+2\rho-3)+1)t^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\rho+1} = 0.$$

比对系数可得

$$C_0(2\rho^2-3\rho+1)=0,\quad C_k((k+\rho)(2k+2\rho-3)+1)+C_{k-1}=0(k\geqslant 1).\quad \cdots\cdots(2')$$

为求得非平凡级数解, 令 $2\rho^2-3\rho+1=0$, 并不妨设 $C_0=1$. 此时:

(a) $\rho=\frac{1}{2}$, 此时有

$$C_k(2k^2-k)+C_{k-1}=0\Rightarrow C_k=\frac{(-1)^k}{k!(2k-1)!!}.$$

此时求得一个特解

$$x_1(t)=\sqrt{t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k-1)!!}t^k.\quad \cdots\cdots(4')$$

(b) $\rho=1$, 此时有

$$C_k(2k^2+k)+C_{k-1}=0\Rightarrow C_k=\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)!!}.$$

此时求得一个特解

$$x_2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)!!}t^{k+1}.$$

上述求得的两个特解是线性无关的, 因此原齐次方程的通解为

$$x(t)=C_1\sqrt{t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k-1)!!}t^k+C_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)!!}t^{k+1}.\quad \cdots\cdots(6')$$

四、S-L 边值问题与物理应用, 共 12 分.

(1) (共 6 分) 此时 S-L 边值问题满足常点条件, 故特征值必然非负. $\cdots\cdots(2')$

(a) $\lambda=0$: 则方程通解为 $y=Ax+B$, 代入边值条件可得 $A=0, Ab+B+A=0\Rightarrow A=B=0$, 即此时边值问题只有零解, 故 0 不是特征值. $\cdots\cdots(3')$

(b) $\lambda>0$: 记 $\omega=\sqrt{\lambda}>0$, 则方程通解为 $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$. 代入边值条件可得

$$\begin{cases}-\omega A\sin\omega a+\omega B\cos\omega a=0,\\ (\cos\omega b-\omega\sin\omega b)A+(\omega\cos\omega b+\sin\omega b)B=0\end{cases}$$

要使上述方程组存在非零解 A,B, 须有

$$\Delta=\begin{vmatrix}-\omega\sin\omega a & \omega\cos\omega a\\ \cos\omega b-\omega\sin\omega b & \omega\cos\omega b+\sin\omega b\end{vmatrix}=0.$$

由此可得 ω 满足方程 $\omega=\cot(\omega(b-a))$. 注意到方程 $\mu=(b-a)\cot\mu$ 有可数个正零点 $\mu_1,\mu_2,\cdots$, 故 $\omega_n=\frac{\mu_n}{b-a}$. 此时求解可得 $B=A\tan\frac{a\mu_n}{b-a}$, 因此边值问题的特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\frac{\mu_n^2}{(b-a)^2},\quad y_n(x)=\cos\left(\mu_n\frac{x-a}{b-a}\right).\quad \cdots\cdots(6')$$

(2) (共 6 分) 由物理原理可得

$$m\dot{v} = F - (a + bv^2), \quad v(0) = 0.$$

由已知可得 $F > a$, 否则阻力在初始时刻就大于牵引力, 不可能使火车由静止开始运动. $\cdots\cdots(2')$

(解法一: 利用 Nullcline 研究解的性态) 求解可得方程的一个 Nullcline 为 $L: v = \sqrt{\frac{F-a}{b}} \triangleq v_0$(即使得 $\dot{v} = 0$ 的等斜线), 则 $v = v_0$ 自然成为方程的特解. 由 $f(v) = F - (a + bv^2)$ 关于 $v \in \mathbb{R}$ 连续可微可得满足局部 Lipschitz 条件, 故方程的不同积分曲线必不相交. 在直线 L 下方, 积分曲线严格上升, 且不能与 L 相交, 进而无法穿过 L. 从而 $v(t)$ 单调递增且有上界 v_0, 故极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) \triangleq v_1 \in (0, v_0](4')$. 由方程可得

$$\frac{m\dot{v}}{F - (a + bv^2)} = 1 \Rightarrow t = \int_0^t \frac{m\dot{v}(s)}{F - (a + bv(s)^2)} ds = \int_0^{v(t)} \frac{mdv}{F - (a + bv^2)}.$$

当 $t \to +\infty$ 时, 上式左端趋于 $+\infty$, 若 $v_1 < v_0$, 则右端始终有界, 矛盾! 所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = v_0 = \sqrt{\frac{F-a}{b}}$. $\quad\cdots\cdots(6')$

(解法二: 硬算) 方程整理积分可得

$$\frac{mdv}{(F-a) - bv^2} = dt \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{F-a}} \ln \frac{\sqrt{F-a} + \sqrt{b}v}{\sqrt{F-a} - \sqrt{b}v} = \frac{bt}{m} + C.$$

结合 $v(0) = 0$ 整理可得

$$v(t) = \sqrt{\frac{F-a}{b}} \frac{e^{\frac{2\sqrt{b(F-a)}}{m}t} - 1}{e^{\frac{2\sqrt{b(F-a)}}{m}t} + 1}(5') \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} v(t) = \sqrt{\frac{F-a}{b}}.(6')$$

五、求近似解与最大存在区间; 证明递增, 共 12 分.

(1) (共 5 分) 构造方程的 Picard 序列可得

$$\varphi_0(t) = 0, \quad \varphi_k(t) = \int_0^t (2s\cos s - \varphi_{k-1}(s)^2) ds. \quad \cdots\cdots(1')$$

由此可得

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \int_0^t 2s\cos s ds = \int_0^t \left(2s - s^3 + \frac{s^5}{12} - \frac{s^7}{360} + o(s^7)\right) ds \\ &= t^2 - \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{72} - \frac{t^8}{2880} + o(t^8). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \int_0^t (2s\cos s - \varphi_1(s)^2) ds \\ &= \int_0^t \left[\left(2s - s^3 + \frac{s^5}{12} - \frac{s^7}{360} + o(s^7)\right) - \left(s^4 - \frac{s^6}{2} + o(s^7)\right)\right] ds \\ &= t^2 - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{72} + \frac{t^7}{14} - \frac{t^8}{2880} + o(t^8) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_3(t) &= \int_0^t (2s\cos s - \varphi_2(s)^2)ds \\
&= \int_0^t \left[\left(2s - s^3 + \frac{s^5}{12} - \frac{s^7}{360} + o(s^7)\right) - \left(s^4 - \frac{s^6}{2} - \frac{2s^7}{5} + o(s^7)\right)\right] ds \\
&= t^2 - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{72} + \frac{t^7}{14} + \frac{143}{2880}t^8 + o(t^8) \\
\varphi_4(t) &= \int_0^t (2s\cos s - \varphi_3(s)^2)ds \\
&= \int_0^t \left[\left(2s - s^3 + \frac{s^5}{12} - \frac{s^7}{360} + o(s^7)\right) - \left(s^4 - \frac{s^6}{2} - \frac{2s^7}{5} + o(s^7)\right)\right] ds \\
&= t^2 - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{72} + \frac{t^7}{14} + \frac{143}{2880}t^8 + o(t^8), \cdots
\end{aligned}
$$

综上, 我们得到了初值问题的 $o(t^8)$ 近似解为

$$
x(t) = t^2 - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{72} + \frac{t^7}{14} + \frac{143}{2880}t^8. \quad \cdots\cdots(3')
$$

设初值问题解的最大存在区间为 $J = (\alpha, \beta)(-\infty \leqslant \alpha < 0 < \beta \leqslant \infty)$. 作变换 $u = e^{\int_0^t x(s)ds}$, 则 u 恒大于零且 $x = \frac{u'}{u}$. 代回方程可得 u 满足初值问题

$$
u'' - 2t\cos t \cdot u = 0, \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 0.
$$

$u(t)$ 的最大存在区间与 $x(t)$ 相同. 假设 $\alpha < -\frac{7\pi}{3}$, $\beta > \frac{10\pi}{3}$. 则:

(a) 在区间 $[-\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}]$ 内, 恒成立 $-2t\cos t > -2 \times (-\frac{5\pi}{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3} > 4$. 又因为该区间长度为 $\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{\sqrt{4}}$, 由 Sturm 比较定理可得 $u(t)$ 在该区间内存在零点, 这与 u 恒大于零矛盾! 所以 $-\frac{7\pi}{3} \leqslant \alpha < 0$. $\quad\cdots\cdots(4')$

(b) 在区间 $[\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}]$ 内, 恒成立 $-2t\cos t > -2 \times \frac{8\pi}{3} \times (-\frac{1}{2}) = \frac{8\pi}{3} > 8$. 又因为该区间长度为 $\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{\sqrt{8}}$, 由 Sturm 比较定理可得 $u(t)$ 在该区间内存在零点, 这与 u 恒大于零矛盾! 所以 $0 < \beta \leqslant \frac{10\pi}{3}$. $\quad\cdots\cdots(5')$

注: (i) 近似解的具体求解占 2 分, 如果准确求出了前面两次迭代的结果 (算出 $\varphi_2(t)$ 的近似式) 可以给 1 分; (ii) 最大存在区间的左行解和右行解各占一分, 只要正确证明出有界即可得分.

(2) (共 5 分) 方程两端同乘 $e^{-t^2}x(t)$ 可得

$$
e^{-t^2}x(t)x''(t) - 2te^{-t^2}x(t)x'(t) - e^{t-t^2}x(t)^2 = 0. \quad \cdots\cdots(2')
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{-t^2}x(t)x'(t)) &= e^{-t^2}x(t)x''(t) - 2te^{-t^2}x(t)x'(t) + e^{-t^2}x'(t)^2 \\
&= e^{t-t^2}x(t)^2 + e^{-t^2}x'(t)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

所以 $e^{-t^2}x(t)x'(t)$ 单调递增. $\cdots\cdots(5')$

注: 本题实际可以证明严格递增: 假设存在 t_0 使得 $x(t_0)=x'(t_0)=0$, 由初值问题的存在唯一性可得原方程在该初值下只有零解, 这与 x 非零矛盾! 所以最后的不等式实际上是严格大于. **但是**不加说明直接写严格大于会扣一分.

六、解对初值的连续性, 可微性; Gronwall 不等式应用, 共 10 分.

(1) (共 5 分) 初值问题在定义区域 $D=\{(x,t):t\neq 0\}$ 上可化为显式形式:

$$x'=\sin\frac{x}{t}+\frac{x}{t},\quad x(t_0)=x_0.$$

记 $f(t,x)=\sin\frac{x}{t}+\frac{x}{t}$, 则上述初值问题等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds.$$

注意到 $f\in C^1(D)$, 由此可得 f 在区域 D 上满足局部 Lipschitz 条件. $\cdots\cdots(1')$

任取 $(t_0,x_0)\in D$, 取定 D 中的闭矩形 $R:|t-t_0|\leqslant a,|x-x_0|\leqslant b$, 设 L 为 f 在 R 上的一个 Lipschitz 常数, M 为 $|f|$ 在 R 上的上界. 任意取定解 $x(t;t_0,x_0)$ 的存在唯一区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 内一点 t, 任取 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M+1}e^{-Lh}$, 则任取 $(t_0^*,x_0^*)\in D$ 满足 $|t_0^*-t_0|,|x_0^*-x_0|<\delta$, 有

$$\begin{aligned}
&|x(t;t_0^*,x_0^*)-x(t;t_0,x_0)|\\
\leqslant&|x_0^*-x_0|+\left|\int_{t_0^*}^{t_0}|f(s,x(s;t_0^*,x_0^*))|ds\right|+\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,x(s;t_0^*,x_0^*))-f(s,x(s;t_0,x_0))|ds\right|\\
\leqslant&|x_0^*-x_0|+M|t_0^*-t_0|+L\left|\int_{t_0}^{t}|x(s;t_0^*,x_0^*)-x(s;t_0,x_0)|ds\right|\\
\leqslant&(M+1)\delta+L\left|\int_{t_0}^{t}|x(s;t_0^*,x_0^*)-x(s;t_0,x_0)|ds\right|.
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|x(t;t_0^*,x_0^*)-x(t;t_0,x_0)|\leqslant(M+1)\delta\cdot e^{L|t-t_0|}\leqslant\varepsilon e^{-Lh}\cdot e^{Lh}=\varepsilon.$$

因此初值问题的解 $x(t;t_0,x_0)$ 关于初值 (t_0,x_0) 连续. $\cdots\cdots(3')$

由 $f\in C^1(D)$ 及解对初值的可微性定理可得 $x(t;t_0,x_0)$ 关于 (t_0,x_0) 连续可微, 结合积分方程可构造如下变分方程:

$$\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s))\frac{\partial x(s;t_0,x_0)}{\partial t_0}ds-f(t_0,x_0).$$

$$\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}=1+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s))\frac{\partial x(s;t_0,x_0)}{\partial x_0}ds.$$

因此有

$$\left.\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}\right|_{t=t_0} = -f(t_0,x_0) = -\sin\frac{x_0}{t_0} - \frac{x_0}{t_0}, \quad \cdots\cdots(4')$$

$$\left.\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}\right|_{t=t_0} = 1. \quad \cdots\cdots(5')$$

注: (i) 本题直接套用解对初值的连续性定理扣一分; (ii) 未明确写出变分方程扣一分; (iii) 也可以直接求解来讨论, 视过程的正确性给分.

(2) (共 5 分) 任取方程在某初值 (t_0,x_0) 下的解 $x(t)$, 令 $y(t)=x(t)e^t$, 则 $y(t)$ 满足初值问题

$$y' = f(t, ye^{-t})e^t, \quad y(t_0) = y_0 := x_0e^{t_0}. \quad \cdots\cdots(1')$$

这等价于积分方程

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)e^{-s})e^s ds.$$

任取 $t \geqslant t_0$, 有

$$|y(t)| \leqslant |y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,y(s)e^{-s})|e^s ds \leqslant |y_0| + \int_{t_0}^{t} a(s)|y(s)|ds.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)| \leqslant |y_0|e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \leqslant |y_0|e^{\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)dt} \triangleq M < +\infty \quad \cdots\cdots(4').$$

因此 $|x(t)| = |y(t)|e^{-t} \leqslant Me^{-t}, \forall t \geqslant t_0$, 从而 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0. \quad \cdots\cdots(5')$

七、讨论零解稳定性, 共 10 分.

将方程线性化可得

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(1').$$

计算可得 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - a)^2 + 16$, 故 A 的特征值为 $\lambda = a \pm 4i. \quad \cdots\cdots(2')$

1. $a > 0$: 则零解不稳定. $\cdots\cdots(4')$
2. $a < 0$: 则零解渐近稳定. $\cdots\cdots(6')$
3. $a = 0$: 此时线性近似失效. 构造函数 $V(x,y) = x^2 + y^2$, 则 V 正定 $(7')$ 且全导数

$$\dot{V}(x,y) = 2x(4y - xy^2) + 2y(-4x + \frac{1}{2}x^2y) = -x^2y^2 \leqslant 0 \quad \cdots\cdots(9')$$

所以此时零解稳定. $\cdots\cdots(10')$

注: 全导数那一行两分, 计算正确得一分, 能判定为常负给一分.

八、一阶拟线性 PDE 相关, 共 10 分.

(1) (共 5 分) 初始曲面为 $\alpha(s)=(0,s)$, 初值为 $\theta(s)=\varphi(s)$. 计算 Jacobi 行列式可得

$$J=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a(\varphi(s)) & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

故解总是局部唯一的 $(2')$. 考虑初值问题的特征方程

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dy}=1,\ \dfrac{dx}{dy}=a(u),\ \dfrac{du}{dy}=0 \\ t(0)=0,\ x(0)=s,\ u(0)=\varphi(s) \end{cases}$$

由此求解可得 $t=y,x=a(u)y+s,u=\varphi(s)$. $\cdots\cdots(4')$

从前两式可反解得 $y=t,s=x-a(u)t$, 故初值问题的隐式解 $u(x,t)$ 由 $u=\varphi(x-a(u)t)$ 确定. $\cdots\cdots(5')$

(2) (共 5 分) 若 $a(u)=1$, 则初值问题的解即为 $u=\varphi(x-t)$, 它自然成为整体解. 故对任意 C^1 函数 φ 整体解都存在. $\cdots\cdots(1')$

若 $a(u)=4u$, 则初值问题的解由 $u=\varphi(x-4ut)$ 确定. 我们断言: 此时整体解存在当且仅当 $\varphi'(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

设上半平面的整体解存在. 若存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得 $\varphi'(\alpha)<0$, 则存在 $\alpha_1<\alpha_2$, 使得 $\varphi(\alpha_1)>\varphi(\alpha_2)$. 令 $\alpha=x-4ut$, 则由隐式解可得 $x=\alpha+4t\varphi(\alpha)$. 考虑两条特征线 $L_1: x=\alpha_1+4\varphi(\alpha_1)t, L_2: x=\alpha_2+4\varphi(\alpha_2)t$, 则二者存在交点, 交点处的 t 值为

$$T=\frac{1}{4}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_2)}>0.$$

注意到 $u(x,t)$ 在两条特征线上的取值分别为 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2)$, 二者不相等, 从而 $u(x,t)$ 在它们的交点处取值不唯一, 矛盾! $\cdots\cdots(3')$

反之, 我们来构造上半平面的整体解. 任取 $t\in\mathbb{R}_+,\alpha\in\mathbb{R}$, 考虑函数 $x(t,\alpha)=\alpha+4t\varphi(\alpha)$, 则

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}=1+4t\varphi'(\alpha)\geqslant 1.$$

由此可得 $x(t,\alpha)$ 关于 $\alpha\in\mathbb{R}$ 严格递增, 且值域为 $\mathbb{R}$. 故对任意固定的 $t>0$, 可反解出 $\alpha=\alpha(t,x),\forall t\in\mathbb{R}_+,x\in\mathbb{R}$, 由隐映射定理可得 $\alpha(t,x)$ 也是 C^1 函数. 对 $x=\alpha+4t\varphi(\alpha)$ 两边求偏导可得

$$1=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+4t\frac{\partial\alpha}{\partial x}\varphi'(\alpha)\Rightarrow\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{1}{1+4t\varphi'(\alpha)}.$$

$$0=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+4\varphi(\alpha)+4t\frac{\partial\alpha}{\partial t}\varphi'(\alpha)\Rightarrow\frac{\partial\alpha}{\partial t}=-\frac{4\varphi(\alpha)}{1+4t\varphi'(\alpha)}.$$

令

$$u(x,t)=\frac{\alpha(t,x)-x}{4t}(t>0),\quad u(x,0)=\varphi(x).$$

则 $u\in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R})$, 且当 $t>0$ 时, 有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{x-\alpha(t,x)}{4t^2}+\frac{1}{4t}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{(x-\alpha)(1+4t\varphi'(\alpha))-4t\varphi(\alpha)}{4t^2(1+4t\varphi'(\alpha))}=\frac{\varphi'(\alpha)(x-\alpha)}{t(1+4t\varphi'(\alpha))}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{4t}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-1\right)=-\frac{\varphi'(\alpha)}{1+4t\varphi'(\alpha)}.$$

因此 $u_t+4uu_x=0(t>0,x\in\mathbb{R})$. 故 $u(t,x)$ 即为初值问题在上半平面的 C^1 整体解. $\cdots\cdots(5')$