2021秋微分方程(I) 期中参考解答 (赵列3) By 黄文一.

1. 作变换 $y=ux$. 则

$$(u^2-u)dx+x\,du=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{du}{u^2-u}=0$$

积分、整理可得 $x\frac{u-1}{u}=C \Rightarrow y=\frac{x^2}{x-C}$.

2. 令 $p=y'=\tan\theta \ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$. 则 $y^2=\frac{1}{1+p^2}=\cos^2\theta \Rightarrow y=\pm\cos\theta$.

因此有 $dx=\frac{dy}{p}=\frac{\mp\sin\theta\,d\theta}{\tan\theta}=\mp\cos\theta \Rightarrow x=C\mp\sin\theta$. 故通积分为 $(x-C)^2+y^2=1$.

3. 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda=1$ 为 A的三重特征值. 计算可得

$$A-I=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}. \qquad (A-I)^2=(A-I)^3=0$$

$(A-I)^3\vec{r}=\vec{0}$ 的基础解系为 $\vec{r_{1,0}}=(1,0,0)^T$, $\vec{r_{2,0}}=(0,1,0)^T$, $\vec{r_{3,0}}=(0,0,1)^T$.

而且 $\vec{r_{1,1}}=(A-I)\vec{r_{1,0}}=(1,2,-1)^T$, $\vec{r_{1,2}}=\vec{0}$

$\vec{r_{2,1}}=\vec{r_{3,1}}=(-1,-2,1)^T$, $\vec{r_{2,2}}=\vec{r_{3,2}}=\vec{0}$,

因此 $\vec{R_1}=(1+t,2t,-t)^T$, $\vec{R_2}=(-t,1-2t,t)$, $\vec{R_3}=(-t,-2t,1+t)$

基解矩阵为 $\Phi(t)=e^t\begin{pmatrix}1+t&-t&-t\\2t&1-2t&-2t\\-t&t&1+t\end{pmatrix}$. 通解即为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t((C_1-C_2-C_3)t+C_1)\\e^t(2(C_1-C_2-C_3)t+C_2)\\e^t(2(-C_1+C_2+C_3)t+C_3)\end{pmatrix}. \qquad (\Phi(t)\vec{C})$$

4. Euler方程. 作变换 $t=\ln x$. 则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=x\left(x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}.$$

代回方程可得 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=te^t$. $(*)$

①. 齐次方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=0$ 的通解为 $y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)$.

②. $(*)$ 的一个特解为

$$\frac{1}{D^2-2D+2}(te^t)=e^t\frac{1}{D^2+1}t=e^t(1-D^2+D^4-\cdots)t=te^t.$$

综上得方程通解为 $y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)+te^t=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+\ln x)$

5. 令 $z=y'$, 则原线性方程化为一阶方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\hat{=}A(t)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \quad (*)$$

由 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ 线性无关可得 $(\varphi_1(t), \varphi_1'(t))$, $(\varphi_2(t), \varphi_2'(t))$ 是 $(*)$ 的线性无关解. 由 Liouville 公式可得 $(\operatorname{tr}A(s)=0)$

$$W(t)=\varphi_1(t)\varphi_2'(t)-\varphi_1'(t)\varphi_2(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)ds}=W(t_0)\hat{=}C\neq 0,$$

由上可得 $(|\varphi_1(t)|+|\varphi_1'(t)|)(|\varphi_2(t)|+|\varphi_2'(t)|)\geq|W(t)|=|C|\neq 0$.

结合 $\lim\limits_{t\to+\infty}(|\varphi_1(t)|+|\varphi_1'(t)|)=0$ 可知 $\lim\limits_{t\to+\infty}(|\varphi_2(t)|+|\varphi_2'(t)|)=+\infty$.

6. 设方程的广义幂级数解为 $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+\rho}$. 则有

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)x^{k+\rho-1},\quad y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}.$$

代入方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)(2k+2\rho-1)x^{k+\rho-1}-\sum_{k=0}^{\infty}C_k(2k+2\rho+1)x^{k+\rho}=0$$

即 $C_0\rho(2\rho-1)x^{\rho-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2\rho+1)(C_{k+1}(k+\rho+1)-C_k)x^{k+\rho}=0$

不妨设 $C_0=1$

①. $\rho=0$. 则有 $C_{k+1}(k+1)=C_k\ \ \forall k\geq 0 \Rightarrow C_k=\frac{1}{k!}$. 故一个解为

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$. (*)

②. $\rho=\frac{1}{2}$. 则有 $C_{k+1}(k+\frac{3}{2})-C_k=0\ \ \forall k\geq 0 \Rightarrow C_k=\frac{2^k}{(2k+1)!!}$

一个解为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}x^{k+\frac{1}{2}}$.

故方程通解为 $y(x)=C_1e^x+C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}x^{k+\frac{1}{2}}$.

另解：(*) 给出了一个简单的特解 e^x. 设另一特解(线性无关)为 $\varphi(x)$.

则 $\begin{pmatrix}e^x\\e^x\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\varphi(x)\\\varphi'(x)\end{pmatrix}$ 给出了方程组 $\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2x}&1-\frac{1}{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}$ 的一组线性无关解. 由 Liouville 公式,

$$W(x)=e^x(\varphi'(x)-\varphi(x))=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}(1-\frac{1}{2s})ds}=\frac{C_1e^x}{\sqrt{x}}$$

取 $C_1=1$.

由此得 $\varphi'(x)-\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{d}{dx}(\varphi(x)e^{-x})=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. 积分

得 $\varphi(x)=e^x\int\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$. 故通解为 $y(x)=C_1e^x+C_2e^x\int\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}$.

7. (a). ~~作平移 $\xi=x-1$~~. 计算得系统的平衡点为 (1, 2). 作平移 $\xi=x-1,\ \eta=y-2$. 则得

（本题不在我们的范围内）

$$\dot{\xi}=\eta-4\xi-2\xi^2,\quad \dot{\eta}=\xi.$$

考虑线性主部 $\begin{cases}\dot{\xi}=\eta-4\xi\\\dot{\eta}=\xi\end{cases}$

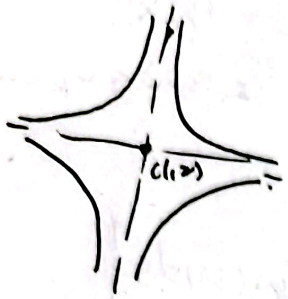
系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4&1\\1&0\end{pmatrix}$. 故 $p=-\mathrm{tr}A=4$, $q=\det A=-1$.

故 (1, 2) 是原系统的鞍点. ~~相图大致为~~: $\xi=0$ 不是特殊方向. 设 $\eta=k\xi$ 是特殊方向. 则

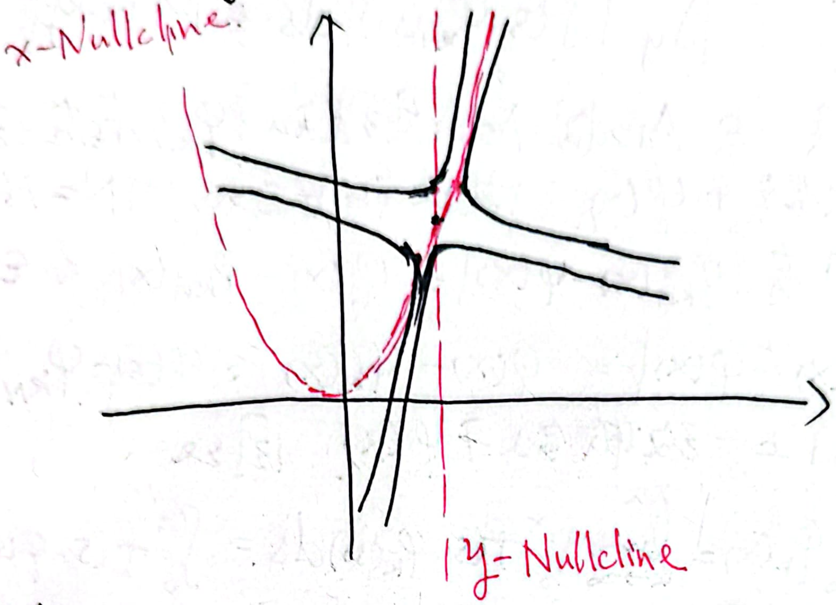
$$k=\left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\eta=k\xi}=\left.\frac{\xi}{\eta-4\xi}\right|_{\eta=k\xi}=\frac{1}{k-4}$$

由此可得 $k^2-4k=1\Rightarrow k=2\pm\sqrt{5}$. 因此平衡点附近的相图

为



(2). x-Nullcline 为 $y=2x^2$, y-Nullcline 为 $x=1$.



8. 构造函数 $V(x,y)=x^2+y^2$, 则V正定且全导数

$$\dot V(x,y) = -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^4 = -2(x^4+y^4)$$

负定 ⇒ 系统零解渐近稳定.

9. Pf. 构造Picard序列: $\varphi_0(x)=0$, $\varphi_k(x)=\int_0^x f(s,\varphi_{k-1}(s))\,ds \ (k\geq 1)$

当 $x\in[0,h]$ 时, 我们有:

①. $\varphi_0(x)=0$ ②. 若 $|\varphi_k(x)|\leq b$, 则:

$$|\varphi_{k+1}(x)| \leq \int_0^x |f(s,\varphi_k(s))|\,ds \leq \int_0^x \max_R |f|\,ds \leq Mx \leq Mh \leq b \quad (*)$$

由归纳法即知 $|\varphi_k(x)|\leq b$, $\forall x\in[0,h]$, $\forall k$. 另一方面,

①. $\varphi_1(x)=\int_0^x f(s,0)\,ds \geq 0 = \varphi_0(x)$.

②. 若 $\varphi_k(x) \geq \varphi_{k-1}(x)$, 则

$$\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x) = \int_0^x \left(f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s))\right)ds \geq 0$$

由归纳法即知 $\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots$, $\forall x\in[0,h]$. $(**)$

由(*)+(**)立得 $\varphi_k(x)$ 逐点收敛到某个函数 $\varphi(x)$. 且 $\varphi_0\le\varphi_1\le\cdots\le\varphi_k\le\cdots\le\varphi$.

另一方面 在 $[0,h]$ 上，由 在 $[0,h]$ 上，(*)可得 $\{\varphi_k\}$ 一致有界. 又由

$$|\varphi_k(x)-\varphi_k(y)|=\left|\int_0^x f(s,\varphi_{k-1}(s))ds-\int_0^y f(s,\varphi_{k-1}(s))ds\right|$$

$$\le\left|\int_y^x |f(s,\varphi_{k-1}(s))|ds\right|\le M|x-y|$$

可得 $\{\varphi_k\}$ 等度连续. 由 Arzelà-Ascoli 定理知 $\{\varphi_k\}$ 存在一致收敛子列 $\{\varphi_{k_n}\}$，它一致收敛于 $\varphi(x)$. 由此知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, $\forall n\ge N$, 有 $x\in[0,h]$ 有 $|\varphi_{k_n}(x)-\varphi(x)|=\varphi(x)-\varphi_{k_n}(x)<\varepsilon$. 故有 $\forall k\ge k_N$. 有 $|\varphi_k(x)-\varphi(x)|=\varphi(x)-\varphi_k(x)\le\varphi(x)-\varphi_{k_N}(x)<\varepsilon$ 这说明 $\varphi_k(x)$ 在 $[0,h]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$. 因此

$$\varphi(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\lim_{k\to\infty}\int_0^x f(s,\varphi_k(s))ds=\int_0^x f(s,\varphi(s))ds.$$

$\Rightarrow\varphi(x)$ 是初值问题的一个解. 毕.

10. 参见第五次习题课讲义.

11. Pf. 将方程改写为 $\frac{dx}{dt}=Ax+(B(t)-A)x$. 则有

$$e^{-At}\left(\frac{dx}{dt}-Ax\right)=e^{-At}(B(t)-A)x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x)=e^{-At}(B(t)-A)x$$

$$\Downarrow$$

$$x=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-s)}(B(s)-A)x(s)ds.$$

其中 $x_0=x(0)$ 为初值. 由于 A 的特征值实部皆负 故存在 $\alpha>0$ 与 $M>0$, s.t. $\|e^{At}\|\le Me^{-\alpha t}$. 令 $y=e^{-At}x$. 则 $\forall t\ge0$,

$$|y|\le|x_0|+\int_0^t \|B(s)-A\|\cdot|y(s)|ds$$

$$\underset{\text{Gronwall}}{\le}|x_0|e^{\int_0^t\|B(s)-A\|ds}\le|x_0|e^{\int_0^\infty\|B(s)-A\|ds}\triangleq N.$$

因此 $|x(t)|\le\|e^{At}\|\cdot|y(t)|\le MNe^{-\alpha t}\longrightarrow0$ as $t\to+\infty$. 零解渐近稳定. 毕.