第 16 章 2020 秋微分方程 (I) 期末参考解答 (赵班)(By 黄天一)

问题 16.1(30 分)

1. (15 分) 用分离变量法求解下列弦振动方程:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -2b\partial_t u + g(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

   其中 $b > 0$ 是常数.

2. (15 分) 用能量方法证明解的唯一性.

证明

1. 定解问题对应 S-L 边值问题的特征值、特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}(n \geqslant 1).$$

在正交基 $\{X_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}$ 下作 Fourier 展开, 可得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

其中

$$g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

由此可得

$$T_n''(t) + 2bT_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = g_n(t), \quad T_n(0) = T_n'(0) = 0. \tag{16.1}$$

考虑两种情况分类讨论.

(1) 若对任意 $n \geqslant 1$, $b \neq \frac{n\pi}{l}$, 则方程 (16.1) 的特征值为相异复数 $\lambda_n = -b - \sqrt{b^2 - (\frac{n\pi}{l})^2}$, $\mu_n = -b + \sqrt{b^2 - (\frac{n\pi}{l})^2}$. 因此 (16.1) 的解为

$$T_n(t) = \int_0^t \frac{e^{\mu_n(t-s)} - e^{\lambda_n(t-s)}}{\mu_n - \lambda_n} g_n(s)ds.$$

所以原初边值问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \frac{e^{\mu_n(t-s)} - e^{\lambda_n(t-s)}}{\mu_n - \lambda_n} g_n(s)ds\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

其中 λ_n, μ_n, g_n 的定义如前.

(2) 若 $b = \frac{m\pi}{l}$, 其中 $m \geqslant 1$. 则当 $n = m$ 时方程 (16.1) 的特征值为二重根 $-b$, 故其解为

$$T_m(t) = \int_0^t \frac{t-s}{e^{b(t-s)}} g_m(s)ds.$$

所以此时原初边值问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{1 \leqslant n \neq m}\left(\int_0^t \frac{e^{\mu_n(t-s)} - e^{\lambda_n(t-s)}}{\mu_n - \lambda_n} g_n(s)ds\right)\sin\frac{n\pi x}{l} + \left(\int_0^t \frac{t-s}{e^{b(t-s)}} g_m(s)ds\right)\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

其中 λ_n, μ_n, g_n 的定义如前.

2. 设 u_1, u_2 均为初边值问题的解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \partial_x^2 w = -2b\partial_t w, & 0 < x < l, t > 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t \geqslant 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

定义能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (w_t^2 + w_x^2)dx.$$

则有

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l (w_t w_{tt} + w_x w_{tx})dx = \int_0^l w_t(w_{tt} - w_{xx})dx + w_x w_t\Big|_0^l = -2b\int_0^l w_t^2 dx \leqslant 0.$$

由此可得 $0 \leqslant E(t) \leqslant E(0) = 0, \forall t \geqslant 0$. 所以 $E(t) \equiv 0 \Rightarrow w_t \equiv w_x \equiv 0 \Rightarrow w$ 恒为常数. 结合初边值可得 w 恒为零. 所以 $u = v$, 即解是唯一的.

问题 16.2(20 分)

1. (15 分) 求解方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \vec{b}\cdot\nabla u, & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

其中 $\vec{b} = (1, 1, \cdots, 1)$.

2. (5 分) 若 u_0 是可积函数, 当 $t \to +\infty$ 时, 解的渐近形态如何?

证明

1. 利用 Fourier 变换求解. 对 u 关于空间变量 x 作 Fourier 变换, 则

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + |\xi|^2\hat{u} = i(\vec{b}\cdot\xi)\hat{u}, \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi).$$

求解该 ODE 可得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)e^{(i(\vec{b}\cdot\xi) - |\xi|^2)t}.$$

作 Fourier 逆变换可得

$$F^{-1}[e^{(i(\vec{b}\cdot\xi)-|\xi|^2)t}] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2 t}e^{i(t\vec{b}+x)\cdot\xi}d\xi = \frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^n\int_0^\infty e^{-\xi_i^2 t}\cos(x_i+t)\xi_i d\xi_i.$$

定义含参变量积分

$$I_t(x_i) = \int_0^\infty e^{-\eta^2 t}\cos((x_i+t)\eta)d\eta.$$

则有 $I_t(-t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$, 且

$$\begin{aligned} \frac{dI_t}{dx_i} &= -\int_0^\infty \eta e^{-\eta^2 t}\sin((x_i+t)\eta)d\eta = \frac{1}{2t}\int_0^\infty \frac{d}{d\eta}(e^{-\eta^2 t})\sin((x_i+t)\eta)d\eta \\ &= \frac{1}{2t}e^{-\eta^2 t}\sin((x_i+t)\eta)\Big|_0^\infty - \frac{x_i+t}{2t}\int_0^\infty e^{-\eta^2 t}\cos((x_i+t)\eta)d\eta = -\frac{x_i+t}{2t}I_t(x_i). \end{aligned}$$

求解上述 ODE 的初值问题可得

$$I_t(x_i) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x_i+t)^2}{4t}}.$$

代回原 Fourier 逆变换的表达式可得

$$F^{-1}[e^{(i(\vec{b}\cdot\xi)-|\xi|^2)t}]=\frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^{n}I_t(x_i)=\frac{e^{-\frac{nt}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot x}\triangleq K(x,t).$$

则原初值问题的解为

$$u(x,t)=F^{-1}[\hat{u}_0(\xi)\hat{K}(\xi,t)]=(u_0*K)(x,t)=\frac{e^{-\frac{nt}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|y|^2}{4t}-\frac{\vec{b}}{2}\cdot y}u_0(x-y)dy.$$

2. 计算可得

$$\exp\left\{-\frac{|y|^2}{4t}-\frac{\vec{b}}{2}\cdot y\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{4t}(|y+t\vec{b}|^2-|t\vec{b}|^2)\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{|t\vec{b}|^2}{4t}\right\}=e^{\frac{nt}{4}}.$$

因此有

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{e^{-\frac{nt}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{nt}{4}}|u_0(x-y)|dy=\frac{\|u_0\|_1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}.$$

由此可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=0$.

问题 16.3(10 分) 设 u,v 分别满足 $\mathbb{R}^3$ 上的波动方程 $\partial_t^2u-\Delta u=f(x,t)$, $\partial_t^2v-\Delta v=(f\mathbb{1}_E)(x,t)$, 其中 $E=\{(x,t):|x|>|t|\}$, $\mathbb{1}_E(x,t)$ 表示 E 上的示性函数. 并且 $u(x,0)=v(x,0)$, $\partial_tu(x,0)=\partial_tv(x,0)$. 证明: 当 $|x|>|t|$ 时, $u(x,t)=v(x,t)$.

证明 记 $F=\mathbb{R}^n\setminus E=\{(x,t):|x|\leqslant|t|\}$, 令 $w=u-v$, 则 w 满足初值问题

$$\begin{cases}\partial_t^2w-\Delta w=(f\mathbb{1}_F)(x,t)\\ w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0\end{cases}$$

定义能量函数

$$e(t)=\frac{1}{2}\int_{|x|\geqslant|t|}(w_t^2+|\nabla w|^2)dx.$$

设区域 $\Omega(t)=\{x\in\mathbb{R}^3:|x|>|t|\}$, 则 $\partial\Omega(t)$ 在 x 处的单位外法向为 $\nu=-\frac{x}{|x|}$. 当 $t<0$ 时, 边界 $\partial\Omega(t)$ 上点 x 随 t 移动的速度矢量为 $\mathbf{v}=-\frac{x}{|x|}=\nu$; 当 $t>0$ 时, 边界 $\partial\Omega(t)$ 上点 x 随 t 移动的速度矢量为 $\mathbf{v}=\frac{x}{|x|}=-\nu$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt}&=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega(t)}(w_t^2+|\nabla w|^2)\mathbf{v}\cdot\nu dS+\int_{\Omega(t)}(w_tw_{tt}+\nabla w\cdot\nabla(w_t))dx\\&=-\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\int_{\partial\Omega(t)}(w_t^2+|\nabla w|^2)dS+\int_{\Omega(t)}w_t(w_{tt}-\Delta w)dx+\int_{\partial\Omega(t)}w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}dS\\&=-\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\int_{\partial\Omega(t)}(w_t^2+|\nabla w|^2)dS+\int_{\partial\Omega(t)}w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}dS.\end{aligned}$$

若 $t>0$, 则

$$\frac{de}{dt}=-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega(t)}\left(w_t^2+|\nabla w|^2-2w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)dS\leqslant-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega(t)}(w_t-|\nabla w|)^2dS\leqslant0.$$

若 $t<0$, 则

$$\frac{de}{dt}=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega(t)}\left(w_t^2+|\nabla w|^2+2w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)dS\geqslant\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega(t)}(w_t-|\nabla w|)^2dS\geqslant0.$$

综上可得 $e(t)$ 在 $t=0$ 处取得最大值, 此时

$$e(0)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(w_t(x,0)^2+|\nabla w(x,0)|^2)dx=0.$$

综上可得 $0\leqslant e(t)\leqslant e(0)=0\Rightarrow e(t)\equiv0$. 所以在 E 上恒有 $w_t=0,\nabla w=0\Rightarrow w$ 为常数, 结合初值可

得 w 恒为零, 即有 $u(x,t)=v(x,t)$.

问题 16.4(20 分) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域且边界光滑. 设 $x_0\in\Omega$, $G(x,x_0)$ 表示 Ω 上的格林函数.

1. (10 分) 证明格林函数是唯一的.
2. (10 分) 证明: 对任意 $x\in\Omega\setminus\{x_0\}$, $-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}<G(x,x_0)<0$.

证明

1. 假设 G_1,G_2 均为 Green 函数, 令 $F=G_1-G_2$, 则
$$\Delta_x F(x,x_0)=0,\quad F|_{x\in\partial\Omega}=0.$$
对任一 $x_0\in\Omega$, 由调和函数的最值原理可得
$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|F(x,x_0)|=\max_{x\in\partial\Omega}|F(x,x_0)|=0\Rightarrow F\equiv 0.$$
所以 $G_1\equiv G_2$, Green 函数唯一.
2. 设修正函数为 $H(x,x_0)$, 即 $G(x,x_0)=V(x-x_0)+H(x,x_0)$. 则 H 满足边值问题
$$\begin{cases}\Delta H_x(x,x_0)=0, & x\in\Omega\\ H(x,x_0)=-V(x-x_0), & x\in\partial\Omega\end{cases}$$
对任一 x_0, 由调和函数的最值原理可得
$$\min_{x\in\overline{\Omega}}H(x,x_0)=\min_{x\in\partial\Omega}H(x,x_0)=\min_{x\in\partial\Omega}\frac{1}{4\pi|x-x_0|}>0.$$
所以
$$G(x,x_0)=V(x-x_0)+H(x,x_0)>V(x-x_0)=-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}.$$
另一方面, 由定义可得 $\lim\limits_{x\to x_0}G(x,x_0)=-\infty$, 故存在 $\rho>0$ 使得 $B(x_0,\rho)\subset\Omega$ 且 $G(x,x_0)<0$, $\forall x\in\overline{B(x_0,\rho)}\setminus\{x_0\}$. 由于 G 满足边值问题
$$\begin{cases}\Delta_x G(x,x_0)=0, & \forall x\in\Omega\setminus\overline{B(x_0,\rho)}\\ G(x,x_0)=0, & x\in\partial\Omega\\ G(x,x_0)<0, & x\in\partial B(x_0,\rho)\end{cases}$$
由最值原理可得 $\max\limits_{x\in\Omega\setminus B(x_0,\rho)}G(x,x_0)<0$. 综上可得 $G(x,x_0)<0$.

问题 16.5(20 分) 称函数 u 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上是次调和的, 如果在 Ω 上 $\Delta u\geqslant 0$. 证明: $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是次调和的, 当且仅当对任意的球 $B(x_0,r)\subset\Omega$, 有
$$u(x_0)\leqslant\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega).$$

证明 若 u 是次调和的, 考虑函数
$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega).$$
则求导可得
$$\begin{aligned}\varphi'(r)&=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\nabla u(x_0+r\omega)\cdot\omega dS(\omega)\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x-x_0|=r}\nabla u(x)\cdot\frac{x-x_0}{r}dS(x)\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x-x_0|\leqslant r}\Delta u(x)dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此 $\varphi(r)$ 关于 r 递增, 所以

$$u(x_0)=\lim_{r\to0^+}\varphi(r)\leqslant\varphi(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega).$$

反之, 假设 u 在 Ω 上不是次调和的, 则存在 $x_0\in\Omega$ 使得 $\Delta u(x_0)<0$. 由连续性可设 $R>0$ 使得 Δu 在 $B(x_0,R)\subset\Omega$ 内恒小于零. $\varphi(r)$ 定义如前, 则任取 $0<r<R$, 总有

$$\varphi'(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x-x_0|\leqslant r}\Delta u(x)dx<0.$$

即此时 $\varphi(r)$ 关于 $r\in(0,R)$ 严格递减, 所以

$$u(x_0)=\lim_{r\to0^+}\varphi(r)>\varphi(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega),\quad\forall r\in(0,R),$$

矛盾! 所以 u 在 Ω 上次调和.