2019秋微分方程(I)期中考试参考解答(宁列?) By 黄文一

1. 缺题目(5个选择)

2. (a). $\dfrac{dx}{dt} = \cos^2(x-t)$

作变换 $y = x-t$. 则 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx}{dt} - 1 = -\sin^2 y$.

①. $\sin y = 0$. 对应原方程特解 $x = k\pi + t$, $k \in \mathbb{Z}$

② $\sin y \neq 0$. 则 $-\dfrac{dy}{\sin^2 y} = dt \Longrightarrow \cot y = t + C$. 故

原方程通积分为 $\cot(x-t) - t = C$.

(b). $(\sqrt{t^2-x^2} + x)dt - t\,dx = 0$ $(\sqrt{t^2-x^2})$

首先 $t=0$ ~~是个~~满足方程, 但此时即有 $x=0$, 舍之.

$t \neq 0$. 作变换 $x = ut$, 则有

$$(|t|\sqrt{1-u^2} + ut)\,dt - t(u\,dt + t\,du) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{1-u^2}\,dt = |t|\,du.$$

①. $u = \pm 1$ 是其特解, 对应原方程特解 $x = \pm t$.

②. $u \neq \pm 1$ 时, 有:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dt}{|t|} \Rightarrow \arcsin u = \operatorname{sgn}(t)\ln|t| + C$$

故通积分为 $\arcsin\dfrac{x}{t} - \operatorname{sgn}(t)\ln|t| = C$.

(c). $(2t^3 + x)dt + (4t^2 x - t)dx = 0$

首先 $t=0$ 是方程一特解.

$t \neq 0$ 时, 将方程写作 $t^2(2t\,dt + 4x\,dx) + (x\,dt - t\,dx) = 0$ 可以

看出 $\mu = \frac{1}{t^2}$ 是一个积分因子. 我们有

$$(2t\,dt + 4x\,dx) + \frac{x\,dt - t\,dx}{t^2} = d\left(t^2 + 2x^2 - \frac{x}{t}\right) = 0.$$

故通积分为 $t^2 + 2x^2 - \dfrac{x}{t} = C$,

(d). $x'+e^{x'}-\frac{1}{2}x=0$

设 $p=x'$. 方程写作 $x=2(p+e^p)$. 关于 $t$ 求导可得

$$p=2p'+2p'e^p \quad (*)$$

①. $p=0$, 代回方程可得特解 $x=2$.

②. $p\neq 0$ 由 (*) 可得 $dt=\frac{2(1+e^p)}{p}dp$. 故方程的通解由下述参数方程表示:

$$\begin{cases} t=\int \frac{2(1+e^p)}{p}dp \ (+C) \\ x=2p+2e^p \end{cases}$$

(e) $x''+3x'-40x=2+(t+1)e^{5t}$.

齐次方程的通解为 $x=C_1e^{5t}+C_2e^{-8t}$. 非齐次的一个特解为

$$x_0=\frac{1}{D^2+3D-40}(2+(t+1)e^{5t})=-\frac{1}{20}\left(1+\frac{D^2+3D}{40}+\cdots\right)1+\frac{1}{(D+8)(D-5)}(t+1)e^{5t}$$

$$=-\frac{1}{20}+e^{5t}\frac{1}{(D+13)D}(t+1)=-\frac{1}{20}+e^{5t}\cdot\frac{1}{13}\left(1-\frac{D}{13}+\frac{D^2}{169}-\cdots\right)\left(\frac{t^2}{2}+t\right)$$

$$=-\frac{1}{20}+e^{5t}\left(\frac{t^2}{26}+\frac{12}{169}t-\frac{12}{13\times169}\right).$$

约去出现的齐次解项, 得原方程通解为

$$x=C_1e^{5t}+C_2e^{-8t}+e^{5t}\left(\frac{t^2}{26}+\frac{12}{169}t\right)-\frac{1}{20}.$$

(f). $x''-2tx'+4x=0$.

应用幂级数法. 设幂级数解为 $x=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n$. 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cdot n(n-1)t^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cdot nt^n+4\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n$$

$$\Downarrow$$

$$(n+2)(n+1)C_{n+2}=(2n-4)C_n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

同理 $C_{2k}=\frac{2k-4}{k(2k-1)}C_{2k-2}$ $(k\geq 2)$ $\quad C_{2k+1}=\frac{2k-3}{k(2k+1)}C_{2k-1}$ $(k\geq 2)$

所以 $C_{2k}=\frac{(2k-4)!!}{k!(2k-1)!!}C_0$, $\quad C_{2k+1}=\frac{(2k-3)!!}{k!(2k+1)!!}C_1$

$C_2=-2C_0$, $C_3=-\frac{1}{3}C_1$. 故方程通解为

$$x(t)=C_0\left(1-2t^2+\sum_{k\geq 2}\frac{(2k-4)!!}{k!(2k-1)!!}t^{2k}\right)+C_1\left(t-\frac{t^3}{3}+\sum_{k\geq 2}\frac{(2k-3)!!}{k!(2k+1)!!}t^{2k+1}\right)$$

3. 作业题. 参见习题课讲义(第三次)

4. 陈助教讲过. 参见第四次讲义.

5. (a).(b) 均在第五次讲义中. (b) 还是作业题.

6. (a). 由连续可微可得 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上局部 L, 故 Cauchy 问题的解存在唯一.

(b). 在存在区间内 $[-h,h]$ 内. 首先有 $\forall t\in[-h,h]$,

$$|\varphi(t;x_0)-\varphi(t;x_0^*)|\leq\left|\int_0^t \big(f(\varphi(s;x_0))-f(\varphi(s;x_0^*))\big)ds\right|+|x_0-x_0^*|$$

$$\overset{\text{局部L}}{\leq}|x_0-x_0^*|+\left|\int_0^t L|\varphi(s;x_0)-\varphi(s;x_0^*)|ds\right| \quad (L=\mathrm{Lip}(f))$$

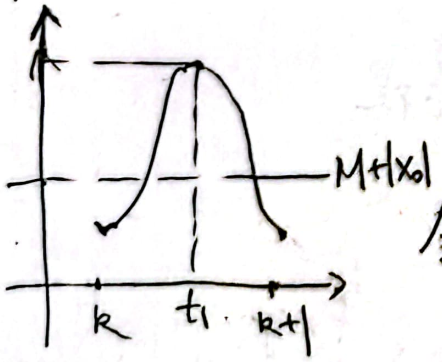
$$\overset{\text{Gronwall}}{\leq}|x_0-x_0^*|e^{L|t|}\leq|x_0-x_0^*|e^{Lh}.$$

所以 $|\varphi(t_1;x_0)-\varphi(t_2;x_0^*)|\leq|\varphi(t_1;x_0)-\varphi(t_2;x_0^*)|+|\varphi(t_2;x_0)-\varphi(t_2,x_0^*)|$

$$\overset{(*)}{\leq}|\varphi(t_1;x_0)-\varphi(t_2,x_0)|+|x_0-x_0^*|e^{Lh}.$$

同一初值下. $\varphi(t;x_0)$ 自然关于 $t$ 连续. 故 $t_2\to t_1$, $x_0^*\to x_0$ 时 $(*)\to 0$.

(c).




假设 $\varphi(t;x_0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上无界. 则存在 $k\in\mathbb{Z}_+$,

s.t. $\varphi(t;x_0)$ 在 $[k,k+1]$ 上的最大值 $M_k>M+|x_0|$

不妨设 $\varphi(t_1;x_0)=M_k>M+|x_0|$, $k<t_1<k+1$.

令 $\xi_x=\inf\{k<t<t_1:\varphi(t;x_0)=\cancel{M+|x_0|}\,x\}$ 其中

$\eta_x=\sup\{t_1<t<k+1:\varphi(t;x_0)=\cancel{M+|x_0|}\,x\}$ $M+|x_0|\leq x\leq M_k$

(因为 $\varphi(k;x_0)$, $\varphi(k+1;x_0)\leq M+|x_0|$. 故这样的 $\xi,\eta$ 是存在的).

~~任取 $M+|x_0|\leq x\leq M_k$ 考虑~~

则有 $\varphi'(\xi_x;x_0)\geq 0$ $(*)$ 若不然, 则存在 $\varepsilon>0$, s.t. $\varphi'(t;x_0)<0$ 在 $(\xi_x-\varepsilon,\xi_x)$ 上恒成立, 进而 $\varphi(\xi_x-\varepsilon)>\varphi(\xi_x)=x$. 由介值定理 $\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(k,\xi_x-\varepsilon)$, s.t. $\varphi(\xi;x_0)=x$. 但 $k<\xi<\xi_x<t$. 矛盾! 类似有 $\varphi'(\eta_x;x_0)\leq 0$. 所以 $f(x)=\varphi'(\xi_x;x_0)=\varphi'(\eta_x;x_0)\Rightarrow f(x)=0$.

即 ~~但是，设 $t_2\in(k,t_1)$, s.t. $\varphi(t_2;x_0)=M+|x_0|$. 必存在 $\eta\in(t_2,t_1)$. s.t. $f(\varphi(\eta;x_0))=\varphi'(\eta;x_0)=\frac{\varphi(t_1;x_0)-\varphi(t_2;x)}{t_1-t_2}>0$. 而~~

但这不可能！因为我们可选取 $\eta<t_1$，满足：

① $\varphi(\eta;x_0)<\varphi(t_1;x_0)=M_k$ ② $\varphi(t;x_0)\in(M+|x_0|,M_k]$, $\forall t\in[\eta,t_1]$

中值定理 $\Rightarrow \exists t_2\in(\eta,t_1)$. s.t. $\varphi'(t_2;x_0)=\frac{\varphi(t_1;x_0)-\varphi(\eta;x_0)}{t_1-\eta}>0$. 但

此时即有 $f(\varphi(t_2;x_0))=\varphi'(t_2;x_0)>0$ 且 $\varphi(t_2;x_0)\in(M+|x_0|,M_k)$.

矛盾！ #

7. 自治系统可写作 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{N}(t,\vec{x})$. 其中 $A=\begin{pmatrix}a & -2\\ \frac{1}{2} & a\end{pmatrix}$. 且

$\vec{N}(t,\vec{x})=(xy^2,-2x^2y)^T$ 在局部关于 $(x,y)$ 连续可微（$\Rightarrow$L）且是高阶项.

A 的特征值为 $\lambda=a\pm i$.

① $a>0$. 则零解不稳定

② $a<0$. 则零解渐近稳定

③ $a=0$. 则方程组为 $\begin{cases}\dot{x}=-2y+xy^2\\ \dot{y}=\frac{1}{2}x-2x^2y\end{cases}$ 构造函数：

$V(x,y)=x^2+4y^2$. 则：V 正定且全导数

$$\dot{V}(x,y)=2x(-2y+xy^2)+8y\left(\tfrac{1}{2}x-2x^2y\right)=-14x^2y^2\le 0.$$

故零解稳定.

8. (1). 初始曲面：$\alpha(s)=(0,s)$. $\theta(s)=\varphi(s)$. 验证得

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0\\ a(\varphi(s)) & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

求解 $\begin{cases}\frac{dt}{dy}=1,\quad \frac{dx}{dy}=a(u),\quad \frac{du}{dy}=0\\ t(0)=0,\quad x(0)=s,\quad u(0)=\varphi(s)\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}t=y\\ x=a(u)y+s\\ u=\varphi(s)\end{cases}$

反解得 $\begin{cases}y=t\\ s=x-a(u)t\end{cases}$ 故方程解为 $u=\varphi(x-a(u)t)$.