第九次习题课

2023 年 12 月 30 日

在椭圆方程的开头，我们学习了很多调和函数的性质，即方程

$$\Delta u = 0$$

的解，其中一条是调和函数不会在区域内部取到最大、最小值。我们研究更一般的椭圆方程：

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u = f, x \in \Omega.$$

事实上对于这类方程，我们有类似的结果，即极值原理：

Theorem 1 (弱极值原理)**.** *设$c \geq 0, f \leq 0, u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$是上述方程的解，那么$u$在边界达到非负最大值，即*

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

作业题

1.设$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的一个解。

(1)如果$c(x) \geq c_0 > 0$，则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \frac{1}{c_0} \sup_{\Omega} |f(x)|$$

(2)如果$c(x) \geq 0$，则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq M \sup_{\Omega} |f(x)|$$

其中M依赖于Ω的直径。

(3)如果$c(x)<0$，试举反例说明上述最大模估计一般不成立。

证明. (1)设u在$x_0\in\Omega$取到最大值，即x_0是最大值点，那么$\Delta u(x_0)\leq 0, u(x_0\geq 0)$，于是

$$f(x_0)=-\Delta u(x_0)+c(x_0)u(x_0)\geq c_0u(x_0)$$

最小值点同理。

(2)令$w(x)=d^2-|x|^2+1, d$是Ω的直径，$u(x)=w(x)v(x)$。得到$v(x)$满足的方程：

$$-(\Delta w(x)v(x)+2\nabla w(x)\cdot\nabla v(x)+w(x)\Delta v(x))+c(x)w(x)v(x)=f$$

即

$$-\Delta v(x)+\frac{2x\cdot\nabla v(x)}{d^2-|x|^2+1}-(\frac{2n}{d^2-|x|^2+1}+c(x))v(x)=\frac{f}{d^2-|x|^2+1}$$

在$v(x)$的最大值点x_0处，有$\nabla v(x_0)=0,\Delta v(x_0)\leq 0$，于是

$$\frac{2n}{d^2+1}v(x_0)\leq(\frac{2n}{d^2-|x_0|^2+1}+c(x_0))v(x_0)\leq\frac{|f(x_0)|}{d^2-|x_0|^2+1}\leq|f(x_0)|$$

于是

$$v(x_0)\leq\frac{d^2+1}{2n}|f(x_0)|$$

最小值同理。

(3)一个简单的例子是考虑立方体$\Omega=[0,\pi]^n, u(x)=\sin(x_1)\cdots\sin(x_n)$满足方程

$$\begin{cases}-\Delta u-nu=0, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

□

2.假设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是有界开集，$u_i(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega}), i=1,2$满足定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u_i+c_i(x)u_i=0, x\in\Omega\\ u_i|_{\partial\Omega}=g_i\end{cases}$$

如果$c_2(x) \geq c_1(x) \geq 0, g_1(x) \geq g_2(x) \geq 0$，则

$$u_1(x) \geq u_2(x)$$

证明. $-u_i$满足同样的方程，由弱极值原理，$-u_i$在边界达到非负最大值，而在$-u_i| - \partial\Omega = -g_i \leq 0$，得知$-u_i$在区域上非正，即$u_i$非负。

再考虑$u = u_2 - u_1$满足的方程：

$$\begin{cases} -\Delta u + c_1(x)u = (c_1(x) - c_2(x))u_2(x) \leq 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g_2 - g_1 \leq 0 \end{cases}$$

同上一步，得到$u = u_2 - u_1$非正。 □

3.假设$\Omega \subset \mathbf{R}^n$是有界开集，$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 - u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g_i \end{cases}$$

的一个解。证明：如果$\max_{\partial\Omega} |g(x)| \leq 1$，则$\max_{\partial\Omega} |u(x)| \leq 1$。

证明. 假设在最大值点有$u(x_0) > 1$，则$\Delta u(x_0) \leq 0, u^3(x_0) - u(x_0) \geq 0$矛盾。最小值同理。 □

在证明极值原理，以及Hopf引理的时候，我们通过引入辅助函数，合理选取参数得到一个$\mathcal{L}u \geq 0$的函数，来得到最终结果，这是研究椭圆函数的一个非常重要的方法。我们介绍一个更一般的椭圆方程的估计性定理，从中体会这一思路。

Definition 1. 设Ω是有界开集，$\mathcal{L}u = a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu$，这里省略了对$i, j$的求和符号，$u$的下标表示求偏导数。称$\mathcal{L}$是椭圆的，如果系数矩阵$(a_{ij}(x))$是正定的，即：

$$0 \leq \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \forall \xi \neq 0$$

Theorem 2 (整体梯度估计). 设$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$满足$a^{ij}u_{ij} = f(x,u), a^{ij}, b^i \in C^1(\bar{\Omega}), f \in C^1(\Omega \times \mathbf{R})$，则

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| + C$$

其中$C \sim \lambda, diam\Omega, |a^{ij}|_{C^1}, M = ||u||_{L^\infty}, ||f||_{C^1(\Omega \times [-M,M])}$。

证明. 令$\mathcal{L}u = a^{ij}u_{ij}$，则

$$\mathcal{L}(|\nabla u|^2) = 2a^{ij}u_{ik}u_{jk} + 2a^{ij}u_k u_{ijk}$$

求导次数越高的越要先处理，即含u_ijk，我们通过对原方程两边求导将其转化为低阶项：

$$a_k^{ij}u_{ij} + a^{ij}u_{ijk} = f_k(x,u) + f_u(x,u)u_k$$

两边乘u_k，于是替换掉$a^{ij}u_k u_{ijk}$：

$$\mathcal{L}(|\nabla u|^2) = 2a^{ij}u_{ik}u_{jk} + 2f_k u_k + 2f_u u_k^2 - 2a_k^{ij}u_{ij}u_k$$

最后一项用均值不等式

$$|2a_k^{ij}u_k u_{ij}| \leq \frac{\lambda}{n}|u_{ij}|^2 + \frac{n}{\lambda}|u_k|^2|a_k^{ij}|^2$$

对指标求和，得到

$$\Sigma|2a_k^{ij}u_k u_{ij}| \leq \lambda|\nabla^2 u|^2 + \frac{C}{\lambda}|\nabla u|^2$$

第一项利用椭圆性

$$|2a^{ij}u_{ik}u_{jk}| \geq \lambda|\nabla^2 u|^2$$

中间两项是容易处理的，因为$2f_k u_k \leq |\nabla u|^2 + |\nabla f|^2, f_u u_k^2 \leq C|\nabla u|^2$

因此，我们得到

$$\mathcal{L}(|\nabla u|^2) \leq \lambda|\nabla^2 u|^2 - C|\nabla u|^2 - C$$

再引入辅助函数来消掉一阶导数的平方项：

$$\mathcal{L}(u^2) = 2a^{ij}u_{ij}u + 2a^{ij}u_i u_j = 2a^{ij}u_i u_j + 2uf \geq 2\lambda|\nabla u|^2 + C$$

这样一来就消去了一阶导数的平方项。我们还需要消除常数项，为此再引入

$$\mathcal{L}(e^{\beta x_1}) = \beta^2 a^{11}e^{\beta x_1}$$

我们不妨假设Ω落在条形区域$0 \le x_1 \le d$中，那么$\mathcal{L}(e^{\beta x_1})$当$\beta$很大时可以充分大，消去常数项。

因此，我们有$\mathcal{L}(|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \ge 0$，由弱极值原理（这个对一般椭圆方程也是对的）

$$\sup_{\Omega}(|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1}) \le \sup_{\partial\Omega}(|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + e^{\beta x_1})$$

$$\sup_{\Omega}|\nabla u|^2 \le \sup_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 + C$$

这就完成了证明。 □

在能量估计时，我们用了在方程两边同时乘u积分，应用不等式的方法。这在PDE的研究中也是非常重要的方法，请同学们仔细阅读该定理的证明。

我们回顾波方程的内容。首先对于$n \le 3$维的波方程，我们有具体的求解公式。波方程的解具有有限传播速度，由此我们有决定区域、影响区域的概念。分离变量法求解方程是必考的点。

作业题

1.设$\Phi(x) \in C^2(\mathbf{R}), \alpha \in \mathbf{R}^n, |\alpha| = 1$，则$\Phi(\alpha \cdot x + at)$满足波方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

证明.

$$u(t,x) = \Phi(\alpha \cdot x + at)$$

$$\nabla u = \Phi'(\alpha \cdot x + at)\alpha, \Delta u = \Phi''(\alpha \cdot x + at)|\alpha|^2 = \Phi''(\alpha \cdot x + at)$$

$$u_{tt} = a^2\Phi''(\alpha \cdot x + at)$$

□

2.设$u \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$是初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = \phi(x), x \in \mathbf{R} u_t(x,0) = \psi(x), x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

其中$\phi, \psi \in C_c(\mathbf{R})$。记动能和势能$k(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} u_t^2(x,t)\,dx, p(t) = \frac{a^2}{2}\int_{\mathbf{R}} u_x^2(x,t)\,dx$，证明：1.$k(t)+p(t)$是与时间无关的常数；2.$t$充分大时$k(t)=p(t)$

证明. (1)

$$\frac{d}{dt}(k(t)+p(t)) = \int_{\mathbf{R}} u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{tx}\,dx = \int_{\mathbf{R}} a^2 u_t u_{xx} - a^2 u_{xx} u_t\,dx = 0$$

(2)利用提示

$$u_t = aF'(x+at) - aG'(x-at), u_x = F'(x+at) + G'(x-at)$$

得到

$$k(t) - p(t) = a^2 \int_{\mathbf{R}} -2F'(x+at)G'(x-at)\,dx$$

$x \pm at$的距离是$2at$，当t充分大时，因为初值是紧支的，两点不会同时落在支集里，因此被积函数为零。 □

3.设$u \in C^2(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+)$满足初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, (x,t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

其中$\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$。证明存在常数$C$使得

$$|u(x,t)| \le \frac{C}{t}$$

证明. 由基尔霍夫公式

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial B_{at}(x)} \phi(y) + \nabla\phi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)\,dS$$

因为ϕ, ψ是紧支的，所以尽管积分区域$\partial B_{at}(x)$很大，起作用的总是有限的。设支集的测度为$M < \infty$，则

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{4\pi a^2 t^2}(|\phi|_{C^0} + |\phi|_{C^1} at + t|\psi|_{C^0})M \le \frac{C}{t}$$

这里$|f|_{C^0} = \sup_x |f(x)|, |f|_{C^1} = \sup_x |f(x)| + \sup_x |Df(x)|$ □

4.求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2\alpha u_t = 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \end{cases}$$

证明. 设$u(x,t) = X(x)T(t)$，带入方程

$$\frac{X''}{T''} = \frac{T'' + 2\alpha T'}{a^2 T} = -\lambda$$

则

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$T'' + 2\alpha T' + \lambda a^2 T = 0$$

我们知道关于x的方程有解当且仅当$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}^2, X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1, 2, \ldots$

再来看关于t的方程

$$T_n'' + 2\alpha T_n' + \lambda a^2 T_n = 0$$

由经验解法，我们知道

$$\begin{cases} T_n = e^{-\alpha t}(a_n e^{-\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2 t}} + b_n e^{-\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2 t}}), n < \frac{\alpha l}{a\pi} \\ T_n = e^{-\alpha t}(a_n + b_n t), n = \frac{\alpha l}{a\pi} \\ T_n = e^{-\alpha t}(a_n \cos\sqrt{\lambda a^2 - \alpha^2}t + b_n \sin\sqrt{\lambda a^2 - \alpha^2}t), n > \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

再通过边值条件确定系数：

$$\begin{cases} a_n + b_n = \tilde{a_n} \\ -\alpha(a_n + b_n) + \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n a^2}(b_n - a_n) = \tilde{b_n}, n < \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a_n} \\ -\alpha a_n + b_n = \tilde{b_n}, n = \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a_n} \\ -\alpha a_n + \sqrt{\lambda_n a^2 - \alpha^2} b_n = \tilde{b_n}, n > \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

其中$\tilde{a_n} = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \tilde{b_n} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

解得

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(\tilde{a_n} - \frac{\tilde{a_n}+\tilde{b_n}}{\sqrt{\alpha^2-\lambda_n a^2}}) \\ b_n = \frac{1}{2}(\tilde{a_n} + \frac{\tilde{a_n}+\tilde{b_n}}{\sqrt{\alpha^2-\lambda_n a^2}}), n < \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a_n} \\ b_n = \alpha\tilde{a_n} + \tilde{b_n}, n = \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \tilde{a_n} \\ b_n = \frac{\alpha\tilde{a_n}+\tilde{b_n}}{\sqrt{\lambda_n a^2-\alpha^2}}, n > \frac{\alpha l}{a\pi} \end{cases}$$

最终我们得到

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & e^{-\alpha t}\Sigma_{n<\frac{\alpha l}{a\pi}}(a_n e^{-\sqrt{\alpha^2-\lambda_n a^2 t}} + b_n e^{-\sqrt{\alpha^2-\lambda_n a^2 t}})\sin\frac{n\pi}{l}x \\ & + e^{-\alpha t}\Sigma_{n>\frac{\alpha l}{a\pi}}(a_n\cos\sqrt{\lambda a^2-\alpha^2}t + b_n\sin\sqrt{\lambda a^2-\alpha^2}t)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ & + e^{-\alpha t}(a_{n_0} + b_{n_0}t)\sin\frac{n_0\pi}{l}x \end{aligned}$$

上式中，如果$n_0 = \frac{\alpha l}{a\pi}$不是整数，则最后一项不出现。 □

接下来介绍一点Fourier变换的内容。我们在数学分析学过的Fourier变换是这样定义的：

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{ix\xi}dx$$

我们通常要求f在Schwartz函数类($\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$)里，也就是$f$及其任意阶导数都要衰减得比$|x|^{-k}$快。Schwartz函数类太小了，我们想要找到一种途径能对更广泛的函数定义Fourier变换。

对于一般的函数来说，上面的表达式未必有意义，但是对Schwartz函数总是有效的，因此一个想法是把Fourier变换挪到一个Schwartz函数上去。我们知道，对于$f, g \in \mathcal{S}$

$$\int \hat{f}(x)g(x)dx = \int\int f(\xi)e^{-ix\xi}g(x)dxd\xi = \int f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi$$

因此我们对一般的函数，也可以做同样的事情。这里有一个问题：上式告诉了我们$\int \hat{f}g$的值，也就是说，给我一个Schwartz函数，$\hat{f}$给出一个值。那么$\hat{f}$究竟是什么呢？事实上，$\hat{f}$是$\mathcal{S}$上的连续函数，叫做缓增分布。

这个定义要与原来的相容，也就是说，通过$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{ix\xi}dx$定义的Fourier变换，我们也能够将其看成缓增分布。我们可以把好的函数等同于分布：把ϕ等同于$\mathcal{S}$上的这个函数：$\phi : \mathcal{S} \to \mathbf{C}, g \mapsto \int \phi g$。用$\langle \phi, g\rangle$表示分布$\phi$作用在Schwartz函数$g$上。

函数可以看作分布，分布不一定是函数，举一个简单的例子：$\delta_0 : \mathcal{S} \to \mathbf{C}, g \mapsto g(0)$，显然没有哪个函数满足这个条件。

我们接下来介绍曲面上的Fourier变换。假设$\Sigma \in \mathbf{R}^n$是C^1曲面，dS是Σ上的标准测度，或者通俗一点叫面积元、体积元，那么dS是缓增分布：$\langle dS, g\rangle = \int_\Sigma g(x)dS$。对于$\Sigma$上的函数$f$，$fdS$也是$\Sigma$上的测度(当然$f$需要满足一定的可积性条件，这里不过多展开，假设$f$是紧支连续就好)，那么作用在$\mathcal{S}$上，

$$\langle fdS, g\rangle = \int_\Sigma f(x)g(x)dS$$

因此我们可以定义fdS的傅里叶变换：

$$\langle f\hat{dS}, g\rangle = \langle fdS, \hat{g}\rangle = \int_\Sigma \int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{ix\xi}g(\xi)dS_x d\xi$$

我们看一个例子。

Theorem 3. 设V是$\mathbf{R}^n$的k维子空间，$V^\perp$是其正交补空间，$d\sigma, d\sigma^\perp$是V和$V^\perp$的标准测度，则

$$\hat{d\sigma} = (2\pi)^k d\sigma^\perp$$

证明. 不妨设$V = \{(x_1, \dots, x_n)|x_{k+1} = \dots = x_n = 0)\}, V^\perp = \{(x_1, \dots, x_n)|x_1 = \dots = x_k = 0)\}$。记$(x_1, \dots, x_n) = (x', x'')$，其中$x' = (x_1, \dots, x_k), x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$。根据定义，我们只要证明

$$\int_{\mathbf{R}^k} \hat{\phi}(x', 0)dx' = (2\pi)^k \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \phi(0, x'')dx'' \forall \phi \in \mathcal{S}$$

令$\Phi(x') = \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \phi(x', x'')dx''$，则$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n-k}), \hat{\Phi}(\xi') = \phi(\hat{\xi'}, 0)$，两边同时做Fourier逆变换，

$$\Phi(x') = (2\pi)^{-k} \int_{\mathbf{R}^k} \hat{\phi}(\xi', 0) e^{ix'\xi'} d\xi'$$

取$x' = 0$即证。 □

Theorem 4. *设M是$\mathbf{R}^n$中的C^1曲面，余维数是k。若$u = u_0 dS$，u_0是M上的紧支L^2函数，则*

$$\int_{|\xi|<R} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq CR^k \int_M |u_0|^2 dS$$

证明. 我们知道C^1曲面局部可以写成函数的图像：存在$n-k$个分量，不妨设为前$n-k$个，使得剩下k个分量(局部)可以写成$n-k$个分量的C^1函数，即$x'' = h(x'), (x', x'') \in M$。简单起见，我们只对这一片曲面做证明。曲面的面积元和x'平面的面积元差一个连续函数：$dS = a(x)dx'$。

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i(x'\xi' + h(x')\xi'')} u_0(x') a(x') dx'$$

固定ξ''，这是在$\mathbf{R}^{n-k}$上的积分，我们有Parseval等式

$$\int |\hat{u}(\xi)| d\xi' = (2\pi)^{n-k} \int |u_0|^2 a^2 dx' \leq C \int_M |u_0|^2 dS$$

在$|\xi''| < R$上积分即证。 □

在曲面上，我们有Parseval等式的替代品：

Theorem 5. *设M是C^1曲面，$\phi \in C_c(\mathbf{R}^n), u = u_0 dS, u_0 \in L^2(M)$且$u_0$是紧支的。则*

$$\lim_{R \to +\infty} \int |\hat{\phi}(\xi)| \phi(\frac{\xi}{R}) R^{-k} d\xi = (2\pi)^{n-k} \int_M |u_0(x)|^2 (\int_{N_x} \phi(y) d\sigma_y) dS_x$$

这里N_x是把M在x处的法平面移动到过原点所得的k维子空间。