微分方程引论第八次习题课讲义

助教：王鼎涵

2023 年 12 月 10 日

清平乐・画堂晨起

李白

画堂晨起，来报雪花坠。高卷帘栊看佳瑞，皓色远迷庭砌。

盛气光引炉烟，素草寒生玉佩。应是天仙狂醉，乱把白云揉碎。

1 作业题

题目 第二章习题 6 若 $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足

$$-\Delta v \leqslant 0, \quad x \in \Omega,$$

则称 v 在 Ω 上是下调和的。

(1) 证明：对于任意球 $B(x,r) \subset \Omega$，成立

$$v(x) \leqslant \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} v(y)dy.$$

(2) 证明：$\max\limits_{\bar{\Omega}} v(x) = \max\limits_{\partial\Omega} v(x)$。

(3) 设 $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是光滑凸函数，且 u 是 Ω 上的调和函数。证明：$v = \phi(u)$ 是 Ω 上的下调和函数。

(4) 设 u 是 Ω 上的调和函数。证明：$v = |\nabla u|^2$ 是 Ω 上的下调和函数。

解答

(1) 我们先证明 $v(x)$ 小于等于球面平均。为此，令

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} v(x + r \cdot \omega) d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}(\omega),$$

其中 $d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}$ 是 $\mathbf{S}^{n-1}$ 的球面测度。现在我们计算

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \omega \cdot (\nabla v)(x + r \cdot \omega) d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \nu(\omega) \cdot (\nabla v)(x + r \cdot \omega) d\sigma(\omega) \\
&= \frac{r}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{B(0,1)} (\Delta v)(x + r \cdot y) dy \geqslant 0
\end{aligned}$$

其中我们用 ν 表示单位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ 上的外法向量场。于是，我们有

$$\varphi(r) \geqslant \varphi(0) = v(x).$$

最后

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} v(y)dy &= \frac{1}{|B(x,r)|}\int_0^r \left(\int_{\mathbf{S}^{n-1}} v(x+\rho\cdot\omega)d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}(\omega)\right)\rho^{n-1}d\rho \\ &= \frac{1}{|B(x,r)|}\int_0^r |\mathbf{S}^{n-1}|\varphi(\rho)\rho^{n-1}d\rho \\ &\geqslant \frac{|\mathbf{S}^{n-1}|}{|B(x,r)|}\int_0^r v(x)\rho^{n-1}d\rho \\ &= \frac{|\mathbf{S}^{n-1}|}{|B(x,r)|}\frac{r^n}{n}v(x) \\ &= v(x)\end{aligned}$$

(2) 如果 v 在 $\bar{\Omega}$ 内的最大值在 $\partial\Omega$ 上取到，那么就证完了。如果 v 在 $\bar{\Omega}$ 内的最大值在某个 $x_0 \in \Omega$ 上取到，那么根据 (1)，对于足够小的球 $B(x_0,r) \subset \Omega$，有

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} v(y)dy \geqslant v(x_0),$$

从而 $v(y) \equiv v(x_0)$，对任意的 $y \in B(x_0,r)$。这说明 v 的 $v(x_0)$-水平集

$$\{x \in \Omega \mid v(x) = v(x_0)\} \subset \Omega$$

是 Ω 中的非空开集。另一方面根据 $v \in C(\Omega)$ 知这是 Ω 中的闭集，从而根据 Ω 的连通性，

$$\{x \in \Omega \mid v(x) = v(x_0)\} = \Omega.$$

最后再利用连续性就知道 v 在 $\bar{\Omega}$ 上恒等于 $v(x_0)$，从而 v 的最大值也在 $\partial\Omega$ 上取到。

(3) 直接计算即可，

$$\partial_i\phi(u) = \phi'(u)\partial_i u,$$
$$\partial_i^2\phi(u) = \phi''(u)(\partial_i u)^2 + \phi'(u)\partial_i^2 u,$$

于是

$$\Delta\phi(u) = \phi''(u)|\nabla u|^2 + \phi'(u)\Delta u = \phi''(u)|\nabla u|^2 \geqslant 0,$$

所以 $v = \phi(u)$ 是下调和函数。

(4) 注意到 $u \in C^\infty(\Omega)$，$\partial_i u$ 也是调和函数，而 $\phi(x) = x^2$ 是光滑的凸函数，所以根据 (3)，每个 $(\partial_i u)^2$ 是下调和的，它们加起来 $|\nabla u|^2$ 也是下调和的。 □

题目 第二章习题 7　假设 $\{u_n\} \subset C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数列。如果 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，则 $\{u_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛，且收敛与一个调和函数。

解答

由于 $u_n - u_m \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数，于是根据极值原理，

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \|u_n - u_m\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \to 0, \quad n,m \to \infty$$

根据 Cauchy 收敛准则知 $\{u_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛到某个 $u \in C(\bar{\Omega})$。为了证明 u 是调和的，我们借助平均值公式，而不用直接去估计导数的收敛性。对于任意的 $x \in \Omega$ 以及球 $B(x,r) \subset \Omega$，我们有

$$u_n(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u_n(y)dy,$$

在等式两边取 $n \to \infty$ 的极限，得到

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

所以 $u \in C^2(\Omega)$ 并且是调和的。 $\square$

题目 第二章习题 12 设 $u(x)$ 是球 $B(0,R_0)$ 上的调和函数，对于 $R \in (0,R_0]$ 记

$$\omega(R) = \sup_{B(0,R)} u - \inf_{B(0,R)} u.$$

(1) 利用 Harnack 不等式证明：存在 $\eta \in (0,1)$，使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leqslant \eta\omega(R).$$

(2) 如果 $\sup_{B(0,R_0)} |u(x)| \leqslant M_0$，则存在常数 $\alpha \in (0,1)$，$C > 0$，使得

$$\omega(R) \leqslant C(M_0+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}, \quad R \in (0,R_0].$$

解答

(1) 我们假设 $B(0,R_0/2)$ 上 Harnack 不等式的系数是 $C > 1$，事实上，这个 C 对于 $R \leqslant R_0$ 均适用。于是对于任意的 $R < R_0$，在 $B(0,R/2)$ 上对函数 $w(x) = u(x) - \inf_{B(0,R)} u$ 使用 Harnack 不等式，得到

$$\sup_{B(0,R/2)} u - \inf_{B(0,R)} u = \sup_{B(0,R/2)} w \leqslant C \inf_{B(0,R/2)} w = C \inf_{B(0,R/2)} u - C \inf_{B(0,R)} u,$$

整理一下得到，

$$\begin{aligned} C\left(\sup_{B(0,R/2)} u - \inf_{B(0,R/2)} u\right) &\leqslant (C-1)\left(\sup_{B(0,R/2)} u - \inf_{B(0,R)} u\right) \\ &\leqslant (C-1)\left(\sup_{B(0,R)} u - \inf_{B(0,R)} u\right) \end{aligned}$$

即

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{C}\right)\omega(R).$$

如果 $\inf_{B(0,R_0)} u$ 是有限的，那么上面的计算也可以适用在 $R = R_0$ 的情形。如果 $\inf_{B(0,R_0)} u = \pm\infty$，就不能使用上面的计算了，但是此时一定存在 $\eta_0 \in (0,1)$ 使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) = \eta_0 \omega(R),$$

否则

$$\sup_{B(0,R)} u = \sup_{B(0,R/2)} u, \quad \inf_{B(0,R)} u = \inf_{B(0,R/2)} u,$$

这与 $\inf_{B(0,R_0)} u = \pm\infty$ 相矛盾。这时我们只要把 η 更改成原先的 $1 - \frac{1}{C}$ 与 η_0 中较大的那个即可。

(2) 我们先找到 R 在哪一层，即找到 $i \geqslant 1$，使得

$$\frac{1}{2^i} \leqslant \frac{R}{R_0} < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

于是根据 (1)，

$$\begin{aligned}\omega(R) &\leqslant \omega(\frac{R_0}{2^{i-1}})\\ &\leqslant \eta^{i-1}\omega(R_0)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(i-1)\log_{1/2}\eta}\omega(R_0)\\ &= 2^{\log_{1/2}\eta}\left(\frac{1}{2^i}\right)^{\log_{1/2}\eta}\omega(R_0)\\ &\leqslant 2M_0 2^{\log_{1/2}\eta}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\log_{1/2}\eta}\end{aligned}$$

实际上这里的指数 $\log_{1/2}\eta > 0$ 如果不落在 $(0,1)$ 中，可以把它放小一点。 □

题目 第二章习题 18　求边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x,y) \end{cases}$$

的 Green 函数，其中

(1) Ω 是上半平面；

(2) Ω 是第一象限；

(3) Ω 是带形区域 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R},\ 0<y<l\}$，其中 l 为正常数。

解答

(1) 我们用 x,y 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的点，用 $\tilde{x}$ 表示 x 关于 $\partial\mathbb{R}^2_+$ 的反射点，那么通过在 $\tilde{x}$ 的位置放上一个负的单位电荷，即可保证区域的边界电势为 0。于是 Green 函数为

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - \Gamma(y-\tilde{x}).$$

(2) 我们用 x_2, x_3, x_4 分别表示 x 关于 y-轴，x-轴，原点的对称点，通过在 x_2, x_4 处放上单位负电荷，在 x_3 处放上单位正电荷，即可保证区域的边界电势为 0。于是 Green 函数为

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - \Gamma(y-x_2) + \Gamma(y-x_3) - \Gamma(y-x_4).$$

(3) 我们记 $x_n^- = \tilde{x} + (0, 2nl),\ n\in\mathbb{Z}$，以及 $x_n^+ = x + (0,2nl),\ n\in\mathbb{Z}$。于是通过在 x_n^-, x_n^+ 上分别放上负、正电荷，即可保证区域边界 $\mathbb{R}\times\{0,l\}$ 的电势为 0。于是 Green 函数为

$$G(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(y-x_n^+) - \Gamma(y-x_n^-).$$

写出这个表达式后，我们还要验证级数是收敛的以及验证 $G(x,y)$ 的正则性，不过这点我们不做要求。 □

2　补充习题

例题 1 (二阶常微分方程的基础解系). *考虑如下的二阶常微分方程*

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) + 5W^4(r) = 0,$$

其中 $W(r) = (1+r^2/3)^{-1/2}$。求出这个方程的一个基础解系。(提示：注意到 $W(r)$ 是方程 $u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) + u^5(r) = 0$ 的解，并且对任意的 $\lambda > 0$，$\lambda^{1/2}W(\lambda r)$ 也是这个方程的解。)

解答 这是一个有趣的小问题，通过利用关于 λ 的伸缩不变性，我们在 $\lambda^{1/2}W(\lambda r)$ 满足的方程两边对 λ 求导数，并且取 $\lambda=1$ 就得到了一个解。另一个解可以通过标准的"买一送一"技巧得到。这样做可行的原因是乘法算子 $u\mapsto 5W^4(r)u$ 恰好是 $u\mapsto u^5$ 在 $W(r)$ 处的线性化算子。 $\square$

3 数学分析拾遗之子流形上的积分

> To discover something in mathematics is to overcome an inhibition and a tradition. You cannot move forward if you are not subversive.
>
> ——Laurent Schwartz

3.1 测度与积分

为了用更干净地的语言叙述子流形上的积分理论，我们要铺垫一些测度论的知识，核心是集合的测度与函数的积分之间的对应关系。这一小节中较为繁琐的细节将被省略，感兴趣的同学可以参考任意一本实分析教材。懒得看的或许可以直接跳过本小节。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们用测度这个概念取刻画一个集合的大小/体积/面积/长度，比如说，我们愿意接受 $[0,1]^n$ 的测度是 1、$B(0,1)\subset\mathbb{R}^3$ 的测度是 $\frac{4\pi}{3}$ 的事实。抽象地来看，如果有一个空间 X (类比于 $\mathbb{R}^n$)，配上一族 X 的子集组成的集合 $\mathcal{A}$ (在 $X=\mathbb{R}^n$ 的情形下它包含诸如 $[0,1]^n$，$B(0,1)$ 这样的集合)，我们把 $\mathcal{A}$ 中的集合成为**可测集**，再配上一个从 $\mathcal{A}$ 到 $[0,\infty]$ 的函数 μ，被称为测度 (即输入一个集合，输出这个集合的大小)，那么我们把这个三元组 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 成为一个**测度空间**。当然，我们这里的测度函数，不能任意假定，它需要满足一些基本的类似于体积的性质，比如对于两个不交的集合，它们的并集的测度应该等于分别的测度之和。

在 $\mathbb{R}^n$ 上我们有标准的 **Borel 可测集族** $\mathcal{B}$ (它包含了所有的开集，闭集，以及可数个开集的交，可数个闭集的并等等)，还有标准的 **Lebesgue 测度**，通常记为 $m=m_n$，它满足 $m([0,1]^n)=1$，并且具有**平移不变性**，即对任意的可测集 $A\in\mathcal{B}$ 以及任意的 $a\in\mathbb{R}^n$，我们有 $m(a+A)=m(A)$。可以证明，Lebesgue 测度是 $\mathbb{R}^n$ 上唯一满足上述性质的 σ-有限 Borel 测度。此外，根据平移不变性还可以推出**旋转不变性**，即对任意的正交矩阵 $O\in\mathbf{O}(n)$ 和任意的可测集 $A\in\mathcal{B}$，我们有 $O(A)\in\mathcal{B}$，并且 $m(O(A))=m(A)$ (这是一个有趣的练习)。

现在我们已经可以对测度空间 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 中的一个可测子集 $A\in\mathcal{A}$ 谈论测度，即它的大小了，如此从此过渡到一个 X 上函数的积分呢？关键是使用**特征函数**来联系集合与函数。对于 X 中的可测子集 $A\in\mathcal{A}$，我们定义它的特征函数 $\mathbf{1}_A$ 为

$$\mathbf{1}_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

我们定义 $\mathbf{1}_A$ 的**积分**为

$$\int_X \mathbf{1}_A d\mu=\mu(A).$$

立即地，我们可以对有限个特征函数的线性组合，即**简单函数** $f=\sum_{i=1}^m c_i\mathbf{1}_{A_i}$ 定义积分为

$$\int_X f d\mu=\sum_{i=1}^m c_i\mu(A).$$

当然作为例行公事，我们需要验证上面是良好定义的，即这个积分值不依赖于具体的把 f 写成特征函数线性组合的方式，不过我们省略这些没有启发性的细节。接下来，对于一般的函数 $f\colon X\to\mathbb{C}$，它不是简单函数，怎么去定义它的积分呢？答案是：**逼近**！我们可以用一列简单函数 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 去逼

近 (大家先不用细究是在什么意义下逼近) 一般的函数 f，并且用 f_n 积分的极限去定义 f 的积分，即定义

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

我们把能够被一列简单函数所逼近的函数 (还要要求简单函数列的积分极限存在)f 称为**可积函数**，并把可积函数组成的集合记为 $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$。可以验证，可积函数的积分是良好定义的，并且积分算子

$$\int_X \cdot\, d\mu\colon L^1(X,\mathcal{A},\mu)\to\mathbb{C},\quad f\mapsto \int_X f d\mu$$

是一个线性算子。

作为最重要的例子，我们把在 $(X\subset\mathbb{R}^n,\mathcal{B},m)$ 上的积分简写为 (dx 就代表 Lebesgue 测度)

$$\int_X f(x)dx.$$

从范畴论的角度来讲，我们研究了一个测度空间的结构后，还要去研究不同测度空间之间的映射。类似于在线性代数中学习的线性映射、点集拓扑/数学分析中学习的连续/光滑映射，我们定义两个测度空间 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 之间的**可测映射**是满足如下条件的映射 $\Phi\colon X\to Y$

对任意的 Y 中的可测集 $B\in\mathcal{B}$，有 $\Phi^{-1}(B)\in\mathcal{A}$，即可测集在 Φ 下的**原像**是可测集。

实际上，利用可测映射，我们可以将一个空间中的测度结构迁移到另一个空间上。即假设 Φ 是两个空间 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 和 $(B,\mathcal{B})$ 之间的可测映射 (注意第二个空间现在没有测度！)，我们定义测度 μ 在 Φ 下的**推出测度** $\Phi_*\mu$ 是 $(Y,\mathcal{B})$ 上的满足对任意的 $B\in\mathcal{B}$，$(\Phi_*\mu)(B)=\mu(\Phi^{-1}(B))$ 的测度。

作为例子，我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 $\Phi(x)=Ax+b$，其中 $A\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),b\in\mathbb{R}^n$，$\Phi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 这个 Lebesgue 测度空间之间的可测映射，并且对任意的 $B\in\mathcal{B}$，我们有

$$(\Phi_*m)(B)=m(\Phi^{-1}(B))=m(A^{-1}\cdot(B-b))=|\det(A)|^{-1}m((B)).$$

用一种更有启发性的方式来写，我们有

$$(\Phi_*(|\det(A)|m))(B)=m(B),\quad \forall B\in\mathcal{B}$$

从而 $\Phi_*(|\det(A)|m)=m$ 作为测度相等。

最后我们介绍一下**换元积分公式**。假设 $\Phi\colon(X,\mathcal{A},\mu)\to(Y,\mathcal{B},\nu)$ 是可测映射，并且 $\Phi_*\mu=\nu$。那么对于任意的 $f\in L^1(Y,\mathcal{B},\nu)$，我们有 $f\circ\Phi\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$，并且

$$\int_Y f d\nu = \int_X f\circ\Phi d\mu.$$

回忆欧式空间开集之间的换元积分公式：假设 $U,V\subset\mathbb{R}^n$ 是两个开集，$\Phi\colon U\to V$ 是微分同胚 (即光滑双射，并且逆映射也光滑)，那么对于 V 上的光滑函数 $f\colon U\to\mathbb{C}$，我们有

$$\int_V f(y)dy=\int_V (f\circ\Phi)(x)|\det(d\Phi(x))|dx.$$

可见，用推出测度的语言来说，欧式空间开集之间的换元积分公式等价于

$$dy=\Phi_*(|\det(d\Phi(x))|dx),$$

其中 $|\det(d\Phi(x))|dx$ 代表以 $|\det(d\Phi(x))|$ 为**密度**的测度 (也叫**绝对连续测度**)，它满足对任意的可测集 $A\subset U$，有

$$(|\det(d\Phi(x))|dx)(A)=\int_A |\det(d\Phi(x))|dx.$$

3.2 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形

我们主要复习多变量微积分中的积分理论，特别是在 $\mathbb{R}^n$ 中子流形上的积分。这里我们不得不引入子流形的概念，因为我们要处理的对象不只是二、三维空间中的曲线和曲面，还包括任意维数空间 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面。

定义 1. *我们称 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集 M 为一个 d 维光滑子流形 $(d \leqslant n)$，如果对任意的 $x \in M$，存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U, V，以及微分同胚 $\Phi\colon U \to V$，使得*

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

直观上看，一个 d 维子流形是**局部上**可以通过一个微分同胚“拉平”的东西。一个常用的生成子流形的方式是利用**隐函数定理**，即如果 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是光滑映射，并且存在 $c \in \mathbb{R}^m$，使得对于任意的 $x \in f^{-1}(c)$，都有

$$\operatorname{rank}(df(x)) = m,$$

那么 $f^{-1}(c)$ 是一个余维数 (= 背景空间维数-自己作为子流形的维数) 为 m 的光滑子流形。

作为例子，我们可以考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 $f(x) = |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$，那么对于任意的 $x \in f^{-1}(1) = \mathbf{S}^{n-1}$，有

$$df(x) = (2x_1, \cdots, 2x_n) = 2x \neq 0, \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rank}(df(x)) = 1,$$

于是球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 中的余维数为 1 的光滑子流形 (超曲面)。

不过，对于我们来说最重要的是下面的等式

d 维子流形 = 局部上可以被一个从 $\mathbb{R}^d$ 中开集 U 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射**参数化**的东西。

3.3 子流形上的积分学

根据测度与积分对应的观点，我们要对一个子流形 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f\colon M \to \mathbb{C}$ 定义积分，只要赋予可测空间 $(M, \mathcal{B}(M))$ 一个 (σ 有限的) 测度，其中 $\mathcal{B}(M)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 中继承的子 σ-代数。

注意到，一个 d 维子流形在每个局部上都可以被一个 $\mathbb{R}^d$ 中的开集 (正则) 参数化，即对任意的 $x \in M$，存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U，$x \in U$，$\mathbb{R}^d$ 中的开集 V 以及微分同胚 $\Phi\colon V \to M \cap U$，这个 Φ 就是 M 的一个局部的参数化。通过 Φ，我们可以把 $V \subset \mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度推出到 $M \cap U$ 上，得到 $M \cap U$ 上的测度 $\Phi_*(m_d)$。这里有两个问题，第一个问题是，这里只是得到了 $M \cap U$ 上的一个测度，并没有得到整个 M 上的测度。如果我们想要把每个局部上这样得到的测度“粘”成整个 M 上的一个测度，我们需要一般形式的单位分解这个工具。为了避免这种情况发生，我们将总是考虑**能够“几乎”被单个映射参数化的子流形** M，这里的“几乎”是说 M 虽然可能不能被单个映射参数化，但没有被参数化到的部分是“零测集”(也就是手动把它令为零测度)，从而不会对积分理论产生什么影响。第二个问题是，这里选用不同的参数化所得到的 M 上的测度可能是不同的，我们下面用一个例子说明。

我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的一条直线段 L，

$$\gamma_1\colon [0,1] \to L \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t,t).$$

作为 $\mathbb{R}^2$ 的子集，这条线段是 $L = \{(t,t) \mid t \in [0,1]\} = \operatorname{Im}(\gamma_1)$，但是也有其他参数化它的方式，比如

$$\gamma_2\colon [0,1/2] \to L \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (t/2, t/2).$$

我们用 dx 表示 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度，那么在第一个参数化下，$\gamma_{1*}(dx)(L) = dx([0,1]) = 1$，但是使用第二个参数化得到的 L 的测度是 $\gamma_{2*}(dx)(L) = dx([0,1/2]) = 1/2$，它们是不相等的。

下面我们着手解决第二个问题，事实上，这可以用参数化映射 Φ 自身的信息来修正。

定义 2. *设 $d \leqslant n$，对于从 $\mathbb{R}^d$ 中开集 U 到 $\mathbb{R}^n$ 的光滑映射 $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$，我们用 $d\Phi$ 表示映射 Φ (在某点处) 的 Jacobi 矩阵 (这是一个 $n \times d$ 的矩阵)，称 $g_\Phi = (d\Phi)^T(d\Phi)$ 为 Φ (在某点处的)* **度量矩阵**，*或者* ***Gram*** **矩阵** *(这是一个 $d \times d$ 的矩阵)。*

定理 1. *假设 $\Phi\colon U \to M$ 和 $\Psi\colon V \to M$ 是 d 维子流形 $M \subset \mathbb{R}^n$ 的两个参数化，其中 $U, V \subset \mathbb{R}^d$ 是开集。那么我们有*

$$\Phi_*(|\det(g_\Phi)|^{\frac{1}{2}} m_d) = \Psi_*(|\det(g_\Psi)|^{\frac{1}{2}} m_d),$$

换而言之，对于 M 上任意的 Borel 集 $A \subset M$，我们有

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\Psi^{-1}(A)} |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy,$$

再换而言之，对于 M 上任意的连续函数 $f \in C(M)$，我们有

$$\int_U (f \circ \Phi)(x) |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx = \int_V (f \circ \Psi)(y) |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy.$$

证明. 由于 Φ 和 Ψ 都是微分同胚，存在 U 和 V 之间的微分同胚 $L = \Psi^{-1} \circ \Phi$ 使得 $\Phi = \Psi \circ L$。根据链式法则，我们有

$$d\Phi(x) = d\Psi(L(x)) \circ dL(x), \quad x \in U$$

于是

$$g_\Phi(x) = (d\Phi(x))^T(d\Phi(x)) = (dL(x))^T(d\Psi(L(x)))^T(d\Psi(L(x)))(dL(x)) = (dL(x))^T g_\Psi(L(x))(dL(x)),$$

取行列式就得到

$$|\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} = |\det(dL(x))| \cdot |\det(g_\Psi(L(x)))|^{\frac{1}{2}}.$$

利用上面的计算，对于任意的 Borel 集 $A \subset M$，有

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx &= \int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(dL(x))| \cdot |\det(g_\Psi(L(x)))|^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{L(\Phi^{-1}(A))} |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_{\Psi^{-1}(A)} |\det(g_\Psi(y))|^{\frac{1}{2}} dy
\end{aligned}$$

其中第二个等号处我们利用了关于 $L\colon U \to V$ 的换元积分公式，这就完成了证明。 □

注记. 从上述证明中可以看出，我们额外乘上的因子 $|\det(g_\Phi)|^{\frac{1}{2}}$ 在参数变换下多出来的因子正好和换元积分公式中的因子一致，从而使得在 Φ, Ψ 两个参数化下的积分结果一致。

上面这个定理说明，虽然 $\Phi_*(m_d)$ 可能依赖于参数化 Φ 的选取，但是利用 Φ 的度量矩阵可以修正这个问题，也即 $\Phi_*(|\det(g_\Phi)|^{\frac{1}{2}} m_d)$ 是不依赖于 Φ 的选取的！从而我们可以引入以下的定义。

定义 3. *设 $d \leqslant n$，设 $\Phi\colon U \to M$ 是子流形 $M \subset \mathbb{R}^n$ 的 (任一个) 参数化，我们把测度 $\sigma = \Phi_*(m_d)$ 称为 M 上的* **子流形测度**，*它满足对于任意的 Borel 集 $A \subset M$，有*

$$\sigma(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx,$$

或者等价地说，对于任意的 $f \in C(M)$，有

$$\int_M f d\sigma = \int_U (f \circ \Phi)(x) |\det(g_\Phi(x))|^{\frac{1}{2}} dx.$$

注记. 实际上我们这里通过参数化构造的子流形 M^d 上的测度就对应于从 $\mathbb{R}^n$ 上的标准 *Riemann* 度量 $g_{\mathbb{R}^n}$ 继承而来的度量对应的体积形式，即度量 $\iota^* g_{\mathbb{R}^n}$ 对应的体积形式 $\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d$。上面不同参数化下的 g_Φ 就是不同局部坐标下度量矩阵 (g_{ij}) 的不同形式。

一个潜在的问题是，我们怎么知道上面定义的子流形测度和我们在欧氏几何中的想法一致？我们可以通过几个例子说明。比如说，在欧氏几何中，我们希望一个几何对象的长度/面积/体积是在正交变换下不变的，这对于我们定义的子流形测度也对。假设参数化映射是 $\Phi\colon U \to M$，那么 M 在正交变换 $O \in \mathbf{O}(n)$ 下变为 $O(M)$，它仍然是 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形，并且具有参数化 $O \circ \Phi\colon U \to O(M)$，在这个参数化下计算 M 的子流形测度得到

$$\sigma(O(M)) = \int_U |\det((d\Phi)^T O^T O (d\Phi))|^{\frac{1}{2}} dx = \int_U |\det((d\Phi)^T (d\Phi))|^{\frac{1}{2}} dx = \sigma(M).$$

再比如，我们希望这个**子流形测度能够和 $\mathbb{R}^n$ 本身的 Lebesgue 测度相容**。粗略地来说，我们可以验证，假设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 是一张超平面 (= 余 1 维仿射子流形)，$A \subset \Sigma$ 是一个可测集。我们考虑“无穷多个”A 沿着 Σ 的法向 n“堆叠”而成的一个高度为 h 的柱子，即 $A_h = \{a + t \cdot n \in \mathbb{R}^n \mid a \in A,\ t \in [0, h]\}$，这是一个 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，根据 Lebesgue 测度的旋转不变性，我们可以通过某个正交变换 $O \in \mathbf{O}(n)$ 把 A_h 变成 $O(A) \times [0, h]$，其中 $O(A) \subset \mathbb{R}^{n-1}$，于是 $m_n(A_h) = m_n(O(A) \times [0, h]) = m_{n-1}(O(A)) \times h$。而 $A \subset \Sigma$ 的子流形测度也在正交变换下不变，从而 $\sigma(A) = m_{n-1}(O(A))$，于是我们就证明了 $m_n(A_1) = \sigma(A) \times h$。这个相容性的更加精确表述由所谓的扭曲 Fubini 定理 (twisted Fubini) 刻画。

下面我们讨论几个最常见的例子，它们包括 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线、作为函数图像的超曲面、球面，对于这些对象，我们总是选取最常用的参数化。

第一个例子：曲线

我们用 $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一条参数曲线 L。按照子流形测度的定义，L 上的子流形测度是 $\gamma_*(m_1)$，其中 m_1 是区间 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 测度。这里参数化 γ 对应的度量矩阵是

$$g_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \cdots \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \cdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = |\gamma'(t)|^2, \quad t \in [a, b]$$

于是 L 的长度是

$$\text{Length}(L) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

对于曲线 L 上的连续函数 $f \in C(L)$，它的曲线积分是

$$\int_L f d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

作为具体的例子，我们可以考虑平面上的圆圈 $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$。为了得到它的一个参数化，我们回忆**三角函数**的定义，

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

它们都是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数，并且满足 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$，对任意的 $x \in \mathbb{R}$。再回忆我们把 π 定义为 sin 函数在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的第一个零点 (在第五次习题课讲义中，我们的定义是 cos 函数在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上第

一个零点的两倍，这两者是等价的)。对于任意的 $(x,y)\in\mathbf{S}^1$，$x,y\in[-1,1]$，根据介值定理，存在 $\theta\in[0,2\pi)$，使得 $x=\cos\theta$，此时 $y^2=1-x^2=\sin^2\theta$，那么通过对 θ 加上或者减去一个 π，可以使得 $y=\sin\theta$，也即 $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$。综上，我们得到了 $\mathbf{S}^1$ 的一个标准的参数化

$$\gamma\colon[0,2\pi]\to\mathbf{S}^1,\quad \theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta).$$

现在我们可以计算圆的周长，

$$\mathrm{Length}(\mathbf{S}^1)=\int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|dt=2\pi.$$

这样我们就证明了单位圆的周长是 2π。同样道理，对于圆周 $\mathbf{S}^1$ 上的连续函数 $f\in C(\mathbf{S}^1)$，它的积分是

$$\int_{\mathbf{S}^1}fd\sigma_{\mathbf{S}^1}=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta.$$

值得一提的是，我们在数学分析 A3/B2 中学习的 Fourier 级数理论就是在 $L^2(\mathbf{S}^1)$ 上发展的 (习惯上我们把 $\mathbf{S}^1$ 写成 $\mathbf{T}$，因为在高维情形 Fourier 级数是在 $L^2(\mathbf{T}^n)$ 上发展的)。这个理论的一个基本结果是在测度 $\frac{1}{2\pi}d\sigma_{\mathbf{S}^1}$ 下，$\{e^{ikx}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 构成了 $L^2(\mathbf{S}^1)$ 的一组标准正交基 (Hilbert 基)。高维的情形也是类似的，即在测度 $\frac{1}{(2\pi)^n}(d\sigma_{\mathbf{S}^1})^{\otimes n}$ 下 (这是一个乘积测度)，$\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mid\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n\}$ 构成了 $L^2(\mathbf{T}^n)$ 的一组标准正交基。老师上课提到过，如果我们考虑 $\mathbf{S}^2$ 而不是 $\mathbf{T}^2$ 去作为 $\mathbf{S}^1$ 上 Fourier 级数的高维推广，那么在测度 $\frac{1}{4\pi}d\sigma_{\mathbf{S}^2}$ 下，**球调和函数** $\{Y_{l,m}(\theta,\varphi)\mid l\in\mathbb{N},-l\leqslant m\leqslant l\}$ 构成了 $L^2(\mathbf{S}^2)$ 的一组标准正交基。

第二个例子：作为函数图像的超曲面

我们考虑 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中开集 U 上的光滑函数 $f\colon U\to\mathbb{R}$ 的图像

$$\Gamma(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\mid x\in U\}\subset\mathbb{R}^n.$$

这自然是 $\mathbb{R}^n$ 的一个余一维的光滑子流形，即一张超曲面，并且有自然的参数化

$$\Phi\colon U\to\Gamma(f),\quad x\mapsto(x,f(x))$$

从几何上看，这个参数化就是将 f 定义域中的点 $x\in U$ 向上“提升”到它的图像 $\Gamma(f)$ 上去。在这个标准的参数化下，我们可以计算 $\Gamma(f)$ 的子流形测度。首先我们有

$$d\Phi(x)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\cdots&\\&&&1\\\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)&\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)&\cdots&\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I_{n-1}}\\\nabla f(x)\end{pmatrix},$$

于是

$$g_\Phi(x)=(d\Phi(x))^T(d\Phi(x))=\begin{pmatrix}1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x)&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(x)\\\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x)&1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)&\cdots&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(x)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(x)&\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(x)&\cdots&1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)\end{pmatrix}=\mathbf{I_{n-1}}+\nabla f(x)\otimes\nabla f(x),$$

根据众所周知的行列式计算技巧，我们得到

$$\det(g_\Phi(x))=1+|\nabla f(x)|^2,$$

于是 $\Gamma(f)$ 的子流形测度是 $\sigma = \Phi_*(\sqrt{1+|\nabla f|^2}m_{n-1})$. 据此，我们可以计算这张超曲面的面积

$$\sigma(\Gamma(f)) = \int_U \sqrt{1+|\nabla f(x)|^2}dx.$$

同样道理，对于任意的 $\Gamma(f)$ 上的连续函数 $g \in C(\Gamma(f))$，它的曲面积分是

$$\int_{\Gamma(f)} g d\sigma = \int_U g(x, f(x))\sqrt{1+|\nabla f(x)|^2}dx.$$

作为具体的例子，我们可以考虑 n 维球面 $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$。它虽然不是一个函数的图像(尝试证明这一点！)，但是它可以“差不多”写成 2 个函数图像的并，比如说

$$\mathbf{S}^n = \mathbf{S}^n_{>0} \cup \mathbf{S}^n_{<0} \cup \mathbf{S}^n_{=0},$$

其中

$$\mathbf{S}^n_{>0} = \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n \mid x_{n+1} > 0\},$$

$\mathbf{S}^n_{<0}$ 和 $\mathbf{S}^n_{=0}$ 是类似定义的。注意到 $\mathbf{S}^n_{=0}$ 是一个“零测集”，我们可以只用 $x \mapsto (x, \pm\sqrt{1-|x|^2})$ 去参数化 $\mathbf{S}^n_{>0}$ 和 $\mathbf{S}^n_{<0}$ 而忽略掉 $\mathbf{S}^n_{=0}$。现在我们可以计算 $\mathbf{S}^n$ 的面积，

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{S}^n) &= 2\sigma(\mathbf{S}^n_{>0}) \\
&= 2\int_{B^n(0,1)} \sqrt{1+\frac{|x|^2}{1-|x|^2}}dx \\
&= 2\int_{B^n(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}}\sigma(\mathbf{S}^{n-1})dr \\
&= 2\sigma(\mathbf{S}^{n-1})\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta d\theta \\
&= 2\sigma(\mathbf{S}^{n-1}) \cdot \begin{cases} \dfrac{(n-2)!!}{(n-1)!!}, & n \text{ is even} \\ \dfrac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{ is odd} \end{cases}
\end{aligned}$$

其中我们利用了 Wallis 公式。特别地，如果取 $n = 2$，那么我们就证明了单位球面的表面积是 4π。

第三个例子：二维球面

对于 2 维球面，我们想谈的更多。另一个标准的参数化是所谓球面坐标，即

$$\Phi\colon (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{S}^2, \quad (\theta, \varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

如果你愿意，也可以按照类似于 $\mathbf{S}^1$ 参数化的做法严格证明这确实是 $\mathbf{S}^2$ 的一个参数化，只不过无法覆盖住一个半圆弧。在这个参数化下，我们计算 $\mathbf{S}^2$ 的子流形测度。

$$d\Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$g_\Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

从而 $\mathbf{S}^2$ 上的子流形测度是

$$\sigma_{\mathbf{S}^2} = \Phi_*(\sin\theta m_2) = \Phi_*(\sin\theta d\theta d\varphi).$$

换而言之，对于任意的 $\mathbf{S}^2$ 上的连续函数 $f \in C(\mathbf{S}^2)$，它在球面上的积分是

$$\int_{\mathbf{S}^2} f d\sigma_{\mathbf{S}^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

第四个例子：光锥表面

最后一个例子我们考虑时空 $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ 中的正向光锥表面，即

$$\widehat{C} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_{t>0} \mid t = |x|\}.$$

这是一个 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的光滑子流形，因为它是 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 上光滑函数 $x \mapsto |x|$ 的图像 (注意我们扣掉了光锥的尖点)。我们用标准的参数化

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n - \{0\} \to \widehat{C}, \quad x \mapsto (x, |x|) = (x, F(x))$$

来计算 $\widehat{C}$ 的子流形测度 $\sigma_{\widehat{C}}$。

$$\nabla F(x) = \frac{x}{|x|}$$

于是 $\det(g_\Phi(x)) = 1 + |\nabla F(x)|^2 = 2$，从而

$$\sigma_{\widehat{C}} = \Phi_*(\sqrt{2}m_n) = \Phi_*(\sqrt{2}dx).$$

换而言之，对于任意的连续函数 $f \in C(\widehat{C})$，它在光锥表面的积分是

$$\int_{\widehat{C}} f d\sigma_{\widehat{C}} = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} f(x)\sqrt{2}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\sqrt{2}dx.$$

作为应用，我们考虑 $n = 3$ 的情形 (更加具有物理意义，对于一般的 n 会变复杂一点)。对任意的光滑紧支函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3+1})$，它限制在 $\widehat{C}$ 上就成为了 $\widehat{C}$ 上的光滑函数，我们计算 $-\dfrac{(\Box\varphi)(x,t)}{4\pi\sqrt{|x|^2+t^2}}$ 在 $\widehat{C}$ 上的积分，其中 $\Box = -\partial_t^2 + \Delta$ 是波动算子。(建议大家仔细搞清楚这里的计算，并和课堂上解三维波方程的过程相比较)

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{C}} -\frac{(\Box\varphi)(x,t)}{4\pi\sqrt{|x|^2+t^2}} d\sigma_{\widehat{C}} &= \int_{\mathbb{R}^3} -\frac{(\Box\varphi)(x,|x|)}{4\pi\sqrt{|x|^2+|x|^2}}\sqrt{2}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} -\frac{(\Box\varphi)(x,|x|)}{4\pi|x|}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty r\int_{\mathbf{S}^2}\left(\partial_t^2\varphi - \partial_r^2\varphi - \frac{2\partial_r\varphi}{r} - \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbf{S}^2}\varphi\right)(r,\omega,r)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)dr
\end{aligned}$$

其中我们利用了 Δ 在球坐标下的展开

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbf{S}^2}.$$

这个式子的准确含义是：如果我们记球坐标变换是

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

那么我们有对任意的光滑函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$，

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbf{S}^2}\right)(f\circ\Phi) = (\Delta f)\circ\Phi.$$

根据课上提到的球面上的散度定理，我们有

$$\int_{\mathbf{S}^2}(\Delta_{\mathbf{S}^2}\varphi)(r,\omega,r)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)=0,\quad \forall r>0.$$

(这件事情的另一个理解是 $\Delta_{\mathbf{S}^2}$ 是 $C^2(\mathbf{S}^2)$ 上的一个对称算子，即对任意的 $f,g\in C^2(\mathbf{S}^2)$，有 $(\Delta_{\mathbf{S}^2}f,g)=(f,\Delta_{\mathbf{S}^2}g)$，这里内积是乘积后在 $\mathbf{S}^2$ 上用球面测度 $\sigma_{\mathbf{S}^2}$ 积分) 我们接着计算，

$$\int_{\widehat{C}}-\frac{(\Box\varphi)(x,t)}{4\pi\sqrt{|x|^2+t^2}}d\sigma_{\widehat{C}}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_{\mathbf{S}^2}\left(r\partial_t^2\varphi-r\partial_r^2\varphi-2\partial_r\varphi\right)(r,\omega,r)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)dr$$

下面需要如下的观察

$$r\partial_t^2\varphi-r\partial_r^2\varphi-2\partial_r\varphi=(\partial_t+\partial_r)\big((\partial_t-\partial_r)(r\varphi)\big),$$

并且注意到对于任意的光滑函数 $g\in\mathbb{R}^{3+1}$ 以及任意固定的 $\omega\in\mathbf{S}^2$

$$\frac{d}{dr}\big(g(r,\omega,r)\big)=\big((\partial_t+\partial_r)g\big)(r,\omega,r).$$

于是可以接着算

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{C}}-\frac{(\Box\varphi)(x,t)}{4\pi\sqrt{|x|^2+t^2}}d\sigma_{\widehat{C}}&=\int_0^\infty\int_{\mathbf{S}^2}(\partial_t+\partial_r)\big((\partial_t-\partial_r)(r\varphi)\big)(r,\omega,r)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)dr\\&=\int_0^\infty\int_{\mathbf{S}^2}\frac{d}{dr}\Big(\big((\partial_t-\partial_r)(r\varphi)\big)(r,\omega,r)\Big)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)dr\\&=\int_0^\infty\frac{d}{dr}\left(\int_{\mathbf{S}^2}\big((\partial_t-\partial_r)(r\varphi)\big)(r,\omega,r)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)\right)dr\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\frac{d}{dr}\left(\int_{\mathbf{S}^2}\big((\partial_t-\partial_r)(r\varphi)\big)(r,\omega,r)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)\right)dr\\&=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbf{S}^2}\big((\partial_t-\partial_r)(r\varphi)\big)(\varepsilon,\omega,\varepsilon)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega)\\&=-\big((\partial_t-\partial_r)(r\varphi)\big)(0,0)\end{aligned}$$

其中我们用到了 φ 在无穷远处消失和 Newton-Leibniz 公式。而

$$(\partial_t-\partial_r)(r\varphi)=r\partial_t\varphi-\varphi-r\partial_r\varphi,$$

最终我们得到了

$$\langle-\frac{d\sigma_{\widehat{C}}}{4\pi\sqrt{|x|^2+t^2}},\Box\varphi\rangle=\int_{\widehat{C}}-\frac{(\Box\varphi)(x,t)}{4\pi\sqrt{|x|^2+t^2}}d\sigma_{\widehat{C}}=\varphi(0,0).$$

如果我们将上述结果与位势方程 $\Delta u=0$ 的基本解 $\Gamma(x)$ 相比较：我们知道，对于任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，有

$$\langle\Gamma,\Delta\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma\Delta\varphi dx=\varphi(0).$$

于是我们可以说 $-\dfrac{d\sigma_{\widehat{C}}}{4\pi\sqrt{|x|^2+t^2}}$ 是 3 维波动方程 $\Box u=\partial_t^2u-\Delta u=0$ 的**基本解**。这个解压根就不是一个 $\mathbb{R}^{3+1}$ 上的函数，而是光锥表面的一个测度，可见基本解只是一种**弱解**。关于弱解的定义实际上有很多，最常用的是如下用分布的语言定义的，这里不解释更多的细节，感兴趣的同志可以在高等实分析课程中学习。

定义 4. *假设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 m 阶微分算子，其中 $n\geqslant1$，即存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一堆光滑函数 $a_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 (其中 P^* 称为 P 的伴随算子)*

$$P=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\partial^\alpha,\quad P^*=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\partial^\alpha,$$

并且至少有一个多重指标 $|\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha \neq 0$。如果 $\mathbb{R}^n$ 上的分布 E 满足对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，都有

$$\langle E, P^*\varphi\rangle = \varphi(0),$$

那么我们称 E 是方程 $Pu = 0$ 的一个**基本解**。

最后是两个常用的公式。

命题 1. *对于 $B(x_0, R)$ ($R = \infty$ 也可以) 上的连续函数 (可积函数) f，我们有*

$$\int_{B(x_0,R)} f(x)dx = \int_0^R r^{n-1}\left(\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x_0 + r\cdot\omega)d\sigma_{\mathbf{S}^{n-1}}(\omega)\right)dr.$$

证明. 我们只对 $n = 3$ 的情形给出证明，任意 n 的证明需要具体写出 $\mathbf{S}^{n-1}$ 的一个参数化，留给读者思考。按照定义，

$$\int_{\mathbf{S}^2} f(x_0 + r\cdot\omega)d\sigma_{\mathbf{S}^2}(\omega) = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(x_0^1 + r\sin\theta\cos\varphi, x_0^2 + r\sin\theta\sin\varphi, x_0^3 + r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

于是等式右端等于

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(x_0^1 + r\sin\theta\cos\varphi, x_0^2 + r\sin\theta\sin\varphi, x_0^3 + r\cos\theta)r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr.$$

另一方面，利用球坐标换元

$$\Phi\colon (0,R)\times(0,\pi)\times(0,\pi)\to B(x_0,R), \quad (r,\theta,\varphi)\mapsto(x_0^1 + r\sin\theta\cos\varphi, x_0^2 + r\sin\theta\sin\varphi, x_0^3 + r\cos\theta)$$

我们可以计算等式左边的积分

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,R)} f(x)dx &= \int_{(0,R)\times(0,\pi)\times(0,\pi)\to B(x_0,R)} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)|\det(d\Phi)(r,\theta,\varphi)|drd\theta d\varphi\\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(x_0^1 + r\sin\theta\cos\varphi, x_0^2 + r\sin\theta\sin\varphi, x_0^3 + r\cos\theta)r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr.\end{aligned}$$

这就完成了证明。而且实际上上面的公式对于 $R = \infty$ 也对。 □

注记. *当然，一个更加自然的写法是，*

$$\int_{B(x_0,R)} f(x)dx = \int_0^R\left(\int_{\partial B(x_0,r)} f(y)d\sigma_{\partial B(x_0,r)}(y)\right)dr.$$

这两种写法是自然等价的，但我们想要强调的是，上面命题陈述中的写法更便于处理。实际上我们把 $f(x_0 + r\cdot\omega)$ 视为 $[0,R]\times\mathbf{S}^{n-1}$ 上的关于 (r,ω) 的函数，第一层积分就是固定 $r\in[0,R]$ 对 ω 在 $\mathbf{S}^{n-1}$ 上积分，这里的测度和积分的区域不随 r 改变，从而可以看作是 $f(x_0, r\cdot\omega)$ 的一个二重积分。而在后一种写法中，积分的区域 $\partial B(x_0,r)$ 和测度 $\sigma_{\partial B(x_0,r)}$ 都在随 r 改变，换言之，我们要把第一层积分整个视为 $[0,R]$ 上的函数，而不能视为某个函数的多重积分。

以下的扭曲 Fubini 定理 (twisted Fubini) 可以视为上述命题的推广，证明不做要求。

定理 2. *假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开区域，$f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ 是光滑函数，并且存在 $a < b$ 使得对于任意的 $x\in f^{-1}([a,b])$，$df(x)\neq 0$ (从而 $f^{-1}(t)$ 是余 1 维的子流形)。那么对于任意的 $f^{-1}([a,b])$ 上的连续函数 g，*

$$\int_{f^{-1}([a,b])} g(x)dx = \int_a^b\left(\int_{f^{-1}(t)}\frac{g}{|\nabla f|}d\sigma_t\right)dt,$$

其中 σ_t 表示 $f^{-1}(t)$ 的子流形测度。

这个公式在构造相空间 T^*M 上的 Liouville 测度时很有用。