第七次习题课

2023 年 11 月 22 日

本次习题课带大家复习常微分方程部分的内容，回顾重要的定理结论和典型例题作业，并指出在解答问题时需要注意的要点。

1 解一阶微分方程

此章节对应教材第二章的内容，主要有三点：1.恰当方程的求解；2.一阶线性微分方程的解的表达式；通过换元解的微分方程。

1.1 恰当方程

回顾恰当方程的定义：若方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$满足存在$\Phi(x,y)$使得$d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$，则称此方程为恰当方程。方程的解为$\Phi(x,y)=C$，$C$为常数。

很多时候，题目给的方程并不是恰当方程，但是可以在式子两边乘上一个积分因子将其变成恰当方程，因此如何找到积分因子是重要的。我们有如下定理：

Theorem 1. *若方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$满足$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})$与$y$无关，记作$G(x)$，那么$\mu=\exp\int G\,dx$是积分因子。*

对称地，若$\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$与$x$无关，记作$H(y)$，那么$\mu=\exp\int G\,dx$是积分因子。

我们看一个例子：求解方程

$$y(1+xy)dx-xdy=0$$

计算得$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2(1+xy)$，于是$H(y)=-\frac{2}{y}$，那么取积分因子$\mu=\frac{1}{y^2}$，方程转化为

$$(\frac{1}{y}+x)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

解得$\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=C$，$C$为常数。

对于一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

我们有公式

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt}(C+\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\,dt}q(s)\,ds)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt}+\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{s}^{x}p(t)\,dt}q(s)\,ds$$

注意：在具体计算时，需要把x_0取成某个具体的数，最终答案不能既有x_0又有C！最好不要把x_0取成∞，因为积分可能是无穷大。

怎么从一族解中找到某个特定的解（在无穷远处衰减、在某点附近有界……）

作业P32 2,4,5

通过换元求解的方程有一些固定套路，但没有通法，需要靠同学们的经验。比如对于

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

当f是齐次的，或者有分式线性函数的形式时，我们有办法化简。我们看一个例子。求解方程

$$\frac{dy}{dx}=x^3y^3-xy$$

这里注意到右边都是x/y的奇数次幂，如果两边同乘或除x/y并把变量换成x^2/y^2就可以化简：

$$\frac{ydy}{xdx}=x^2y^4-y^2$$

令$t-y^2,s=x^2$

$$\frac{dt}{ds}=st^2-t$$

两边除以t^2，令$z=-\frac{1}{t}$

$$\frac{dz}{ds}=s+z$$

解得
$$z=-\frac{1}{Ce^s+se^s}$$
带回x/y，得到
$$y=\pm(-\frac{1}{Ce^{x^2}+x^2e^{x^2}})^{-\frac{1}{2}}$$
注意：1.要考虑每一步换元有没有漏掉解；2.算出结果后，可以带入检验是否正确，也可以反过来，如果原方程有容易看出来的解，检验你是不是包含在结果内；3.题目不会特别复杂，如果换元越换越复杂，可以考虑换个方向。

更多例子：参见第一次习题课补充题目（第七页）。

2 存在唯一性

这部分对应教材第三章的内容，定性理论较多。对于
$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$
Peano定理告诉我们当f是连续函数的时候，方程一定存在解；如果f还对y是局部Lipschitz的，那么还有唯一性。延伸定理说的是任何一条解曲线一定会达到区域G的任何紧子集以外。比较定理的结果是如果两个方程可以比较大小，那么初值给在同一点的对应的两个解也有大小关系。

Theorem 2. 设$f(x,y),F(x,y)$在区域G内连续，且$f(x,y)<G(x,y)$。设$\phi(x),\Phi(x)$分别是
$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$
和
$$\begin{cases}y'=F(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$
的解，那么$\phi(x)<\Phi(x)$当$x>x_0$，$\phi(x)>\Phi(x)$当$x<x_0$。

Theorem 3. 设$f(x,y),F(x,y)$在区域G内连续，且$f(x,y)\le G(x,y)$。设$\phi(x),\Phi(x)$分别是
$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的右侧最小解、左侧最大解和

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，那么$\phi(x) < \Phi(x)$当$x > x_0$，$\phi(x) > \Phi(x)$当$x < x_0$。

应用方面，存在唯一性定理和延伸定理会用来判断某个方程的解是整体存在或者只有有限存在区间；比较定理可以用来估计存在区间的长度。理论方面，同学们应该要掌握Picard定理的迭代构造逼近解的方法，比较定理中最大最小解存在性的证明，特别要掌握怎么用Arzela-Ascoli定理得到一族逼近解。

注：我认为大家对于存在唯一性定理比较熟悉，这里没有贴具体定理的陈述。但是往年试题看在这里考证明题的概率非常大，如果有不懂的地方一定要弄明白。

注意：请留意延伸定理的结论，这个定理不能得到一些奇奇怪怪的结果。

例：证明初值问题

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在$[x_0, +\infty)$上存在。

这类题目需要严格叙述解曲线是如何延伸的。见第三次习题课。

例：设$f(x,y)$在矩形区域$0 \le x \le a, |y| \le b$上连续，且对y是递增的，且$f(x,0) > 0 \forall x$。构造皮卡序列证明

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(0) = y \end{cases}$$

在$[o,h]$上存在解，其中$h = \min\{a, \frac{b}{\max|f|}\}$

提示：这道题比Peano定理的证明简单。尝试证明构造的Picard序列是递增的！

3 解对初值连续依赖可微

当方程右边的f对参数连续可微时，解对参数也是连续可微的。出题通常是计算在某点或者某条曲线上解对参数的偏导数。

解法是固定的三步：写成积分方程、求变分、解微分方程。

注意：第二步求变分时复合函数求导要小心，注意哪些会出现对参数的偏导数，哪些会消失。第三步需要解出解曲线带入。

例：考虑

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x + \mu y^2 \\ y(0) = \mu - 1 \end{cases}$$

求$\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=0}$

见第三次习题课。

例：证明存在$\lambda = \lambda_0$使方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda(1 + \sin x^2 + \sin y^2) + x \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

有解。

考虑$\lambda = 0, y(0) = 0$的解，有$y(1) = \frac{1}{2}$。考虑$\lambda = -1, y(0) = 0$的解，有$y(1) < 0$。由解对参数连续依赖性。

4 一阶线性微分方程组

主要分为两部分：一部分是常系数方程组的求解，一部分是变系数方程组的理论。

对于常系数方程组$\frac{dy}{dt} = Ay$，我们这么理解方程的求解：首先系数矩阵可以经过相似变换变成Jordan标准型。如果是可对角化的，那么方程组彼此独立，解无非是把$e^{\lambda_i t}$放到一起。对于Jordan块阶数大于1的情况，e^A会产生多项式乘$e^{\lambda_i t}$的形式。因此对于一般的A，解的形式是容易理解的：无非是把Jordan标准型的解向量的标准单位向量换成特征向量。若矩阵是可对角化的，那么方程的解是$e^{\lambda_i t} r_i$，当Jordan块有大于1阶时，有$e^{\lambda_i t}(r_i + tr')$，其中$r' = (A - \lambda_i) r_i$。

注意：计算题不要真化成标准型、算过渡矩阵，你没那么多时间的！理论推导才这么干。高阶常系数线性方程是一阶线性方程组的推论，当非齐次项有特殊的形式时我们有经验解法，这也是要求大家掌握的，比起一般解法会节省非常多时间。

例：解方程$\frac{dy}{dt} = Ay$其中$A =$

$$\begin{Bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{Bmatrix}$$

计算得到三个特征值均为3。取特征向量$r_1 = (1,0,0), r_2 = (0,1,0), r_3 = (0,0,1)$。用$A-3I$作用这三个向量，得到$r_{11} = 0, r_{21} = (\frac{2}{3}. -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), r_{31} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$,用$(A-3I)^2$作用均为0。那么得到的基解矩阵为

$$\begin{Bmatrix} 1 & \frac{2}{3}x & -\frac{2}{3}x \\ 0 & 1-\frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x \\ 0 & -\frac{1}{3}x & 1+\frac{1}{3}x \end{Bmatrix}$$

一般理论：方程的解空间是线性空间，维数等于方程个数。任何n个线性无关的解构成基解矩阵，每个解均可表示为基解矩阵乘某个向量。类似一阶线性方程，我们也可以从齐次方程的解得到非齐次方程的解：对于$\frac{dy}{dt} = Ay + f$，如果已知基解矩阵Φ，则非齐次方程的解为

$$y(t) = \Phi(t)(c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds)$$

作业：P190

这部分习题见第四次讲义。

Wronski行列式也是一个重要的工具，对于给定解矩阵，其行列式满足

$$\frac{dW}{dt} = e^{trA} W$$

注意：变系数方程组不能用特征值说明解的行为!

例：考虑方程$y'' + \alpha(t) y = 0$，设$\phi_1(t), \phi_2(t)$是两个线性无关的解，若$|\phi_1(t)| + |\phi_1'(t)| \to 0$，证明$|\phi_2(t)| + |\phi_2'(t)| \to \infty$.

5 定性理论

动机：考虑方程$\frac{dx}{dt} = f(x)$，在f的零点处，解会停留在此一点。我们想研究解在这点附近的行为。(不考虑含时的情况)

不妨假设要考虑的零点就是0。通常，f可以在零点做线性化：$f(x) = Ax + N(x)$，其中$N(x) = o(|x|)$。此时零解的稳定性由线性方程决定。我们有

Theorem 4. *对于$\frac{dx}{dt} = Ax$，零解是渐近稳定的，当且仅当所有特征值实部为负；零解是稳定的，当且仅当所有特征值实部非正，且实部为零的特征值对应$Jordan$块都是一阶的；否则零解是不稳定的。*

注：特征值实部不等于零时，线性项占主导作用，所以所有特征值实部为负可以得到非线性方程零解稳定性，而存在实部为正的特征值可以导出非线性方程零解不稳定性；但是对于实部为零的特征值，相当于线性项不起作用，非线性项起主要作用，会有很多种复杂的情况。

第二方法（Lyapunov泛函）：如果能够找到这样的函数$V(x)$：
1.$V(x) \geq 0$，且$V(x) = 0$当且仅当$x = 0$；
2.V沿方程的导数非正，$\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ 那么零解是稳定。如果2中不等号是严格的，那么零解是渐近稳定的。往往能出题的Lyapunov函数并不多，做题时常见的比如$x^2 + y^2$这种都可以试试。例：考虑系统

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。取$V = x^2 + y^2$，计算得$\frac{dV}{dt} = -x^4 - y^4 < 0$。于是零解是渐近稳定的。

更多例题见第五次讲义。

另一方面，在二维的情况下，我们希望画出奇点附近的相图。根据线性化矩阵A的特征值，可以分为几类：

Theorem 5. *记$T = TrA, D = \det A$，则*
1.$D < 0$时，奇点是鞍点；
2.$D > 0, T^2 > 4D$时，奇点是双向结点；
3.$D > 0, T^2 = 4D$时，奇点为单向结点或星形结点；
4.$D > 0, 0 < T^2 < 4D$时，奇点是焦点；
5.$D > 0, T = 0$时，奇点是中心。

例：考虑方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5y - 2x + x^3 \end{cases}$$

在$(0,0)$的类型。

线性化，得到矩阵

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{Bmatrix}$$

得到$trA = 6 \det A = 9$，对应单向结点或者星形结点。设特殊方向为$y = kx$，带入线性化方程，只有一解$k = 1$，因此是单向结点。

注意：画相图时，要标注轨线的方向，比如对于奇点是中心的情况，要标注轨线是顺时针还是逆时针旋转的。判断方向只要在特定点取值即可。

6 Sturm-Liouville边值理论

考虑边值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda r(x) + q(x))y = 0 \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

其中$r(x) > 0$。对于这个二阶线性方程，我们提了两个边值条件，显然对于大多数λ这个问题只有零解，我们把使得问题有非零解的λ叫做特征值，对应非零解叫做特征函数。主要结果是：

Theorem 6. *上述问题有无穷多个特征值$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots, \lambda_n \to +\infty$，且每个特征值$\lambda_n$对应的解空间是一维的，特征函数在$(0,1)$上恰有$n$个零点。*

如同Fourier级数，这些特征函数也有相似的性质：

$$\int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x) = \delta_{mn}$$

特征函数张成$L^2([0,1])$

例：考虑非齐次线性方程的Sturm-Liouville边值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda r(x) + q(x))y = 0 \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

其中$r(x) > 0$。证明：λ不为对应齐次Sturm-Liouville边值问题的特征值时，方程有且仅有一解；当$\lambda = \lambda_m$时，方程有解的充要条件是$\int_0^1 f(s)\phi_m(s)\,ds = 0$ 对方程做正交分解，设$y = \Sigma_n y_n \phi_n(x)$，那么

$$\Sigma_n y_n(\lambda - \lambda_n)\phi_n(x) = f(x)$$

两边与ϕ_n做内积

$$y_n(\lambda - \lambda_n) = \int_0^1 f(s)\phi_n(s)\,ds$$

于是$y_n = \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\int_0^1 f(s)\phi_n(s)\,ds$，由$f \in L^2([0,1])$以及$\lambda_n \to +\infty$知$\Sigma_n y_n^2 < \infty$，即找到了非齐次方程的解。同时也看到，当$\lambda = \lambda_m$时，必须要$\int_0^1 f(s)\phi_m(s)\,ds = 0$才能使表达式有意义。

另解：当λ不为特征值时，先任取此二阶非齐次线性方程的特解$\phi(x)$，以及二阶齐次线性方程的两个线性无关的解$a(x), b(x)$（我们知道这一定是存在的），那么$\phi(x) + c_1 a(x) + c_2 b(x)$也是非齐次方程的解。然后设$\phi$的边值$\delta = \phi(0)\cos\alpha - \phi'(0)\sin\alpha, \eta = \phi(1)\cos\beta - \phi'(1)\sin\beta$，那么我们只要说明可以选取$c_1, c_2$消掉边值，也就是矩阵

$$\begin{Bmatrix} a(0)\cos\alpha - b'(0)\sin\alpha & a(1)\cos\beta - a'(1)\sin\beta \\ b(0)\cos\alpha - b'(0)\sin\alpha & b(1)\cos\beta - b'(1)\sin\beta \end{Bmatrix}$$

是满秩的。若不然，即存在a, b的线性组合（非零）使得$c_1 a(x) + c_2 b(x)$满足零边值条件，与λ不是特征值矛盾。

另一方面，当$\lambda = \lambda_m$时，方程两边乘特征函数ϕ_m积分，

$$\int_0^1 (y'' + (\lambda r(x) + q(x))y)\phi_m(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\phi_m(x)\,dx$$

分部积分，左边化为

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\lambda r(x) + q(x))y\phi_m(x) + y\phi_m''(x)\,dx + y'(1)\phi_m(1) - y'(0)\phi_m(0) - y(1)\phi_m'(1) + y(0)\phi_m'(0) \\ = y'(1)\phi_m(1) - y'(0)\phi_m(0) - y(1)\phi_m'(1) + y(0)\phi_m'(0)\end{aligned}$$

那么一方面，当$\int_0^1 f(x)\phi_m(x)\,dx = 0$时，取$y$是在$x = 0$处满足边值条件的解，则$y(0)\phi_m'(0) - y'(0)\phi_m(0) = 0$，因此$y'(1)\phi_m(1) - y(1)\phi_m'(1) = 0$，

在$x=1$处也满足边值条件。另一方面，若y满足边值条件，则$\int_0^1 f(x)\phi_m(x)\,dx=0$。

祝同学们考试顺利!