回忆我们在第三章学到的几个关于解的存在唯一性的几个定理.考虑方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

首先Picard定理告诉我们，如果f对y是（局部）Lipschitz的，那么解是局部存在唯一的.

Theorem 1 (Picard定理). *设f在闭区域$D: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$上连续且对$y$满足$Lipschitz$条件，则初值问题的解在区间$|x - x_0| \leq h$上存在且唯一，其中$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, M = \max_D |f(x, y)|$*

如果放宽条件，f仅仅是连续的，那么我们只能得到局部存在性：

Theorem 2 (Peano定理). *设f在闭区域$D: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$上连续，则初值问题在$|x - x_0| \leq h$上至少有一个解，其中$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, M = \max_D |f(x, y)|$*

作为Peano定理的推论，我们有延伸定理：

Theorem 3. *设f在区域G内连续。初值问题的解可延伸到G的边界，即对于任意紧集$G_1 \subset G$，解曲线均可延伸到$G \backslash G_1$*

注意：即便取$G = \mathbb{R}^2$，延伸定理也不等于说解从某个方向跑到无穷大！将延伸定理和Picard定理结合，得到推论

Corollary 1. *设f在区域G内连续且对y是局部$Lipschitz$的。初值问题的解可延伸到G的边界，即对于任意紧集$G_1 \subset G$，解曲线均可延伸到$G \backslash G_1$，并且解是唯一的。*

作业：

1.证明初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^3 - y^3 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在区间$[x_0, +\infty)$上存在。

证明. 首先因为$x^3 - y^3$关于y是局部Lipschitz的，解是唯一的.
观察到$y = x$这条直线比较特殊，直线上的点对应导数为0，解曲线在直线下方的区域时，是递增的；在上方的区域时，是递减的.很容易想象：当解曲线在直线上方时，会在有限时刻（我把x当作时间）内降到至直线下方；在直线下方时，虽然递增但是无法到达$y = x$.于是解曲线在有限时刻总是有界的，因此由延伸定理，存在区间是无穷.
这只是一个想法，不能直接当成答案，答案需要严谨的过程!
记直线上方的区域为D_+，下方的区域为D_-，极大存在区间是$(x_0, \bar{x})$。先说明：若初值(x_0, y_0)在$\bar{D_+}$内，则存在x_1使得$(x_1, y(x_1))$落在D_-.
反证法：假设y在存在区间内总在$\bar{D_+}$内，则$y' \leq 0, x_0 \leq x \leq y(x) \leq y_0$.因此存在区间$\bar{x} \leq y_0$，在存在区间内解有界，无法延伸到边界，矛盾.
因此，当$(x_1, y(x_1))$落在D_-时，要说明解始终在$D = D_- \cap \{y \geq y_1 = y(x_1)\}$内.
那么，如果存在区间是有限的，令$t = \sup\{x > x_1 : (x, y(x)) \in D\} < \infty$.
于是有$y(t) = t$或$y(t) = y_0$.
对于前者，因为$y'(t) = 0$，所以存在$\epsilon > 0$使得$y(t-\epsilon) > y(t) - \epsilon = t - \epsilon$，那么$(t-\epsilon, y(t-\epsilon)) \in D_+$与$t$的定义矛盾.
对于后者，因为$y' > 0 \forall x_1 \leq x < t$所以$y(t) > y(x_1)$矛盾.
因此对于$x > x_1$，解曲线总在D内，在有限时刻是有界的. 所以解的存在区间是$(x_0, +\infty)$. 对于初值在D_-的情况，把(x_0, y_0)带入上面的(x_1, y_1)做同样的论证. □

2.考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

其中f在$0 \leq x \leq a, -\infty < y < \infty$上连续，满足$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{q}{x}|y_1 - y_2|, 0 < q < 1$.证明：该初值问题的解在区间$[0, a]$上存在唯一.

证明. 要做两件事：首先由Peano定理，解是局部存在的，要证解在$[0, a]$上存在；f在远离$x = 0$时关于y是Lipschitz的，所以只需要证明在$x = 0$附近解的唯一性.我们先做第二个，方法还是效仿Picard定理的证明.

设该初值问题有两个不同的解y_1, y_2。那么

$$|y_1(x)-y_2(x)| \le \int_0^x |f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|\,ds \le \int_0^x \frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|\,ds.$$

注意到$\frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|$是$C^1$函数且在$x=0$时取0，并且因为$y_1, y_2$是不同的解，$\frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|$不恒为0.因此设$M = max_{[0,a]}\frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|$。那么

$$|y_1(x)-y_2(x)| \le qxM, \frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x} \le qM.$$

注意到x是任意的，因此取x是最大值点使得左边等于M，那么$M < qM$矛盾！

也可以用Gronwall不等式做：为了避免$\frac{1}{x}$的奇性，先在区间$[\epsilon, x]$用Gronwall不等式再求极限：

$$|y_1-y_2|(x) \le |y_1-y_2|(\epsilon) + \int_\epsilon^x \frac{q}{s}|y_1-y_2|(s)\,ds.$$

那么

$$|y_1-y_2|(x) \le |y_1-y_2|(\epsilon)\exp\int_\epsilon^x \frac{q}{s}\,ds = |y_1-y_2|(\epsilon)(\frac{x}{\epsilon})^q.$$

令$\epsilon \to 0$，右边的极限为0.

存在区间的证明方法也很多，最简单的是直接算解有界：取y_1是方程的解，$y_2=0$，则

$$|f(x,y)-f(x,0)| \le \frac{q}{x}|y|.$$

因为f是连续函数，因此当$0 \le x \le a$时$f(x,0)$有界，故存在M，当$x \ge \epsilon$时

$$|f(x,y)| \le \frac{q}{x}|y| + M \le \frac{q}{\epsilon}|y| + M.$$

因为我们已经知道局部存在性了，只要做远离0的地方，所以上面的$\frac{q}{x}$其实没有奇性.于是知道$|y(x)| \le Ce^{\frac{q}{\epsilon}x}$。因此存在区间是$[0,a]$. $\square$

3.设$f(x,y)$在闭区域$0 \le x \le a, -\infty \le y \le \infty$上连续。记$\phi(x,\eta)$是方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

的解，且假设解在$[0,\bar{x})$上存在，其中$\bar{x}<a$。证明以下三者必有一个成立：
1.$\lim_{x\to\bar{x}^-}\phi(x,\eta)$存在，此时解可以延伸到$x=\bar{x}$；
2.$\lim_{x\to\bar{x}^-}\phi(x,\eta)=+\infty$
3.$\lim_{x\to\bar{x}^-}\phi(x,\eta)=-\infty$.

证明. 唯一要做的是排除震荡的情况.假设解是无界的且极限不为∞，那么存在一列$x_n\to\bar{x}$使得$|y(x_n)|\leq M$.又因为解是无界的，所以存在一列w_n使得$|y(w_n)|=M+1$（因为有一列点使函数值趋于无穷，由介值定理）.于是在区域$[0,\bar{x}]\times[-M-1,M+1]$上，$f(x,y)$有界，记$|f(x,y)|\leq m$。注意到$x_n,w_n\in D$，由中值定理$y(x_n)-y(w_n)\leq|x_n-w_n|y'(\xi)=|x_n-w_n||f(\xi,y(\xi))|$。因为$|x_n-w_n|\to 0,|f(\xi,y(\xi))|<m$矛盾！
上面的证明是有问题的，因为$(\xi,y(\xi))$不一定在D中！因此需要做一点修改，比如取$w_n=min\{z>x_n:|f(z)|=M+1\}$ □

4.设$f(x,y)$在闭区域$D:|x-x_0|\leq a,|y-y_0|\leq b$上连续，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\},M=\max_D|f(x,y)|$。考虑初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$$

证明：该初值问题的最大解$y=Z(x)$与最小解$y=W(x)$之间充满了其他解，即对于任意$|x_1-x_0|\leq h,W(x_1)\leq y_1\leq Z(x_1)$的$(x_1,y_1)$，该初值问题有至少一个解满足$y(x_1)=y_1$.

证明. 只要做$W(x_1)<y_1<Z(x_1)$.考虑

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_1)=y_1\end{cases}$$

该初值问题的解是局部存在的，记作ϕ.于是令$t=\inf\{x<x_1,:W(x)<\phi(x)<Z(x)\}$（inf里的$x$在$\phi$的存在区间里）。若$t=x_0$，则命题成立；否则Claim：$\phi(t)=W(t)$或$\phi(t)=Z(t)$.
若不然，此时t是极大存在区间的端点.$W(t)<\phi(t)<Z(t)$，存在一个闭矩

形在区域$x_0 < x < x_1, W(x) < y < Z(x)$内，由Peano定理存在以$(t, \phi(t))$为初值的解，于是解可以继续向左延伸，矛盾.
若$\phi(t) = W(t)$或$\phi(t) = Z(t)$，则取解$x < t$的部分为$W(x)$或$Z(x)$，即得到$[x_0, x_1]$上的解.
或者更直接的方法：对矩形用延伸定理，ϕ延伸到边界，则必然与$W(x)$或$Z(x)$有交点，交点左侧取$W(x)$或$Z(x)$。 □

解对参数的连续可微性：

Theorem 4. *设$f(x, y, \lambda)$在区域$G : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, |\lambda| \le c$上连续，对$y, \lambda$有连续偏导数，则初值问题*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在闭区域$|x - x_0| \le h, |\lambda| \le c$上的唯一解$y = \phi(x; x_0, y_0, \lambda)$对$x_0, y_0, \lambda$连续可微.

书上给出了求解对初值和参数的导数的公式，不要背！用的时候直接求变分更不容易错.

5.设$y = y(x, \eta)$是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sin(xy) \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

的解，证明$\frac{\partial y}{\partial \eta} > 0$。

证明. 由$\sin(xy)$对y是连续可微的，因此解存在唯一.写成积分方程

$$y(x, \eta) = \eta + \int_0^x \sin(sy)\, ds$$

对η求导，

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta) = 1 + \int_0^x \cos(sy)s\frac{\partial y}{\partial \eta}\,ds$$

再对x求导，记$z = \frac{\partial y}{\partial \eta}$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \cos(xy)xz \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

于是解得

$$z(x) = \exp(\int_0^x \cos(sy)s\,ds) > 0$$

□

6.考虑

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x + \mu y^2 \\ y(0) = \mu - 1 \end{cases}$$

求$\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=0}$

证明. $\mu = 0$时，易求得解为$y = x^2 - 1$.
写成积分方程

$$y(x) = \mu - 1 + \int_0^x 2s + \mu y^2\,ds$$

对μ求导，记$z = \frac{\partial y}{\partial \mu}$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = 1 + \int_0^x y^2 + 2\mu y\frac{\partial y}{\partial \mu}\,ds$$

对x求导，记$z = \frac{\partial y}{\partial \mu}$

$$\frac{dz}{dx} = y^2 + 2\mu yz$$

带入$\mu = 0$和$y = x^2 - 1$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = (x^2 - 1)^2 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

于是求得$z(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + 1$. □

7.考虑二阶微分方程

$$x''(t) + cx'(t) + g(x) = p(t)$$

其中c是常数，g是连续可微函数，假设方程的解是大范围存在的，令$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\Phi(x(0), x'(0)) = (x(T), x'(T))$$

证明：对于有界区域D，有

$$|\Phi(D)| = e^{-cT}|D|.$$

证明. 这里Φ其实也是T的函数，我们暂时省略；最后一步J对t求导的意思
即对这里的T求导。
我们学过，如果Φ将一个区域映成另一个区域，要求像的面积，无非要求Φ的Jacobi行列式。这里Φ把初值打到解在T时刻的值，那么要求Φ的Jacobi矩阵，也就是
要求解对初值的偏导数。于是，把该方程写成：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = x' \\ \frac{d}{dt}x' = -cx' - g(x) - p(t). \end{cases}$$

写成积分方程

$$\begin{cases} x(T) = x_0 + \int_0^T x'(s)\, ds \\ x'(T) = x_0' + \int_0^T -cx'(s) - g(x) + p(s)\, ds. \end{cases}$$

对$x_0, x'(0)$求偏导数

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} = 1 + \int_0^T \frac{\partial x'}{\partial x_0}\, ds \\ \frac{x}{x_0'} = \int_0^T \frac{\partial x'}{\partial x_0'}\, ds \\ \frac{x'}{x_0} = \int_0^T -c\frac{\partial x'}{\partial x_0} - g'(x)\frac{\partial x}{\partial x_0}\, ds \\ \frac{x'}{x_0'} = 1 + \int_0^T -c\frac{\partial x'}{\partial x_0'} - g'(x)\frac{\partial x}{\partial x_0'}\, ds. \end{cases}$$

对x求导，得到

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{\partial x'}{\partial x_0} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial x_0'} = \frac{\partial x'}{\partial x_0'} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial x'}{\partial x_0} = -c\frac{\partial x'}{\partial x_0} - g'(x)\frac{\partial x}{\partial x_0} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial x'}{\partial x_0'} = -c\frac{\partial x'}{\partial x_0'} - g'(x)\frac{\partial x}{\partial x_0'}. \end{cases}$$

Φ的Jacobi行列式为

$$J = \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x'}{\partial x_0'} - \frac{\partial x'}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial x_0'}$$

对J求导，带入上面求得的结果（细节我省略了，大家动手算一下）

$$\frac{d}{dt}J = -c(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x'}{\partial x_0'} - \frac{\partial x'}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial x_0'}) = -cJ.$$

又有$J|_{t=0} = 1$（因为$T = 0$时Φ是恒等映射），因此$J = e^{-cT}$ 因此$|\Phi(D)| = e^{-cT}|D|$. □

在作业第四题中，考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

给定矩形$|t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$，以及$[t_0, t_0 + \alpha]$上的最大解$W(x)$、最小解$Z(x)$（其中$\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$），我们知道：对于任意$t_0 < c \leq t_0 + h, W(c) < y_c < Z(c)$，存在至少一条解曲线使得$y(c) = y_c$.换言之，存在解使得$y(c) = y_c$的点构成一条线段.现在我们把结果推广到高维：如果$y, f(x, y)$均是$\mathbb{R}^n$中的向量/向量函数，那么$y_c$的集合是什么样的呢？

Theorem 5 (Kneser定理)**.** *设$f(t, y)$在$R : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b$上连续，$\max_R |f(t, y)| \leq M, \alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}, t_0 < c < t_0 + \alpha$.则令$S_c$是初值问题*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

所有可能解在c处的取值构成的集合，那么S_c是连通闭集.

证明. 记Σ是初值问题的所有解的集合。
闭集是简单的：若$y_{nc} \to y_c \in \mathbb{R}^n, y_{nc} \in S_c$，则要证明$y_c \in S_c$。换言之，存在$y_n(t) \in \Sigma$使得$y_n(c) = y_{nc}$，要证明存在$y(t) \in \Sigma$使得$y(c) = y_c$。因为在这个矩形（高维空间中，严格来说不是矩形）中y_n是有界的，其导数$f(t, y_n)$是有界的，于是由Arzela-Ascoli存在子列一致收敛到某个$y(t)$，可以验证$y(t)$是初值问题的解，那么$y(c) = y_c$说明$y_c \in S_c$，因此Σ是闭集。
再证连通性。反证法：假设不连通，$S_c = S_0 \cup S_1$是两个不相交的闭集的并，则$d(S_0, S_1) > 0$.
构造$e(y) = d(y, S_0) - d(y, S_1)$，则$e$是$\mathbb{R}^n$上的连续函数，在$S_0$上取值为负，在$S_1$上取值为正。我们将用此函数导致矛盾：证明$e$在$S_c$中有零点。
Claim:$\forall \epsilon > 0, \tilde{y} \in \Sigma, \exists g(t, y)$满足：
1.$|g(t, y)| \leq M + \epsilon$;
2.$|f(t, y) - g(t, y)| \leq \epsilon$;
3.$g(t, y)$关于y是Lipschitz连续的；
4.$\tilde{y}$是如下初值问题的解：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

注记：这个命题说明，对于任意的原初值问题的解$\tilde{y}$，如果把f稍微改变一点，变成与其相近的一个对y是Lipschitz连续的函数g，那么$\tilde{y}$是变动的初值问题的解，注意此时是唯一解。
命题的证明：首先存在$\tilde{g}(t, y)$（比如你可以磨光）满足：
1.$|\tilde{g}(t, y)| \leq M$;
2.$|f(t, y) - \tilde{g}(t, y)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$;
3.$\tilde{g}(t, y)$关于y是Lipschitz连续的；
目标函数$g(t, y) = \tilde{g}(t, y) + f(t, \tilde{y}(t)) - \tilde{g}(t, \tilde{y}(t))$，验证满足四条性质：

$$\begin{aligned} |g(t, y) - f(t, y)| &\leq |g(t, y) - \tilde{g}(t, y)| + |\tilde{g}(t, y) - f(t, y)| \\ &= |f(t, \tilde{y}(t)) - \tilde{g}(t, \tilde{y}(t))| + \frac{1}{2}\epsilon \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

第二条满足；由$|f| \leq M$第一条满足；注意$g(t, y)$的表达式中，只有第一项是与y有关的，后两项中的$\tilde{y}$是取定的解，因此g关于y是Lipschitz的，第三条满足；第四条是因为$g(t, \tilde{y}(t)) = f(t, \tilde{y}(t)) = \frac{d\tilde{y}}{dt}$.命题证毕.

回到原题，设$y_0, y_1 \in \Sigma$使得$y_0(c) \in S_0, y_1(c) \in S_1$，由上述命题，$\forall \epsilon > 0, \exists g_0, g_1$是上述命题中$\tilde{y}(t)$取成$y_0, y_1$得到的$g$.令$g_\theta = \theta g_0 + (1-\theta)g_1, \theta \in [0,1]$.考虑

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = g_\theta(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

由g_θ关于y是Lipschitz的，上述初值问题有唯一解$y_\theta(t)$. 因为$|g_\theta| \le (M+\epsilon)$，故$y_\theta$是有界的:$|y_\theta(t) - y_0| \le (M+\epsilon)a$.可以证明当$\theta \to \theta_0$时，$y_\theta$一致收敛到$y_{\theta_0}$.（为什么？你需要用到哪些条件？）
于是$y_\theta(c)$关于θ连续，那么$e(y_\theta(c))$也关于θ连续。注意到$y_0(c) \in S_0, y_1(c) \in S_1$，那么$e(y_\theta(c))$在两个端点是异号的，由零点存在定理，存在$\eta \in (0,1)$使得$e(y_\eta(c)) = 0$.$y_0, y_1$取定，$\eta$只与$\epsilon$有关.
取$\epsilon = \frac{1}{n}$，对应$\eta = \eta(\frac{1}{n})$.令$g^n(t,y) = g_{\eta(\frac{1}{n})}(t,y)$,设初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = g^n(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

的唯一解是$y^n(t)$.那么$e(y^n(c)) = 0$.
令$n \to 0$，可以证明y^n有子列一致收敛到某个y且y是原初值问题的解，且$e(y(c)) = 0$.即e在S_c中有零点，矛盾.
注记：如果y^n的存在区间一致很小，比如只能到$\alpha - C$，那么当$c > \alpha - C$时会出问题，最后收敛到的函数在c处没有定义。但是可以验证这里y^n的存在区间右端点的极限是$t_0 + \alpha$，所以y是可以定义在$[t_0, t_0+\alpha]$上的。 $\square$