微分方程引论第十次习题课讲义

2023 秋（赵班）

作者：wclw

时间：2024 年 1 月 4 日

第 1 章 基础内容

1.1 习题讲解

1.1.1 作业部分

作业部分针对于波动方程与热方程的作业.

✍ **练习 1.1(P208 T24)** 试问：半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+u_t+u_x=0, \quad (x,t)\in R_+\times R_+, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad x\geqslant 0, \\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\geqslant 0, \\ u(0,t)=0, \quad t\geqslant 0 \end{cases}$$

能否直接用对称开拓法求解，并尝试用特征线法求解此半无界问题.

解

1. 首先回忆一维半无界问题的对称开拓法. 课程中我们的对称开拓法是考察波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t), \quad (x,t)\in R_+\times R_+, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad x\geqslant 0, \\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\geqslant 0, \\ u(0,t)=g(t), \quad t\geqslant 0 \end{cases}$$

的解.

若 $g(t)\equiv 0$，考虑对于方程的奇延拓. 根据 D'Alembert 公式，当 $\varphi,\psi,f(x,t)$ 均为关于 x 的奇（偶）函数时，方程的解 $u(x,t)$ 为关于 x 的奇（偶）函数. 奇函数在 0 处的取值为 0，恰好满足边值条件. 那么将延拓后一维无界问题的解限制在正半轴上面即可得到一维半无界问题的解.

若 $g(t)\not\equiv 0$，考虑 $v(x,t)=u(x,t)-g(t)$，则方程可以化简为零边值问题.

对于第二类边值问题，

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t), \quad (x,t)\in R_+\times R_+, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad x\geqslant 0, \\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\geqslant 0, \\ u_x(0,t)=g(t), \quad t\geqslant 0 \end{cases}$$

若 $g(t)\equiv 0$，考虑对于方程的偶延拓.奇偶延拓的选取取决于解在 x=0 处的性质!

若 $g(t)\not\equiv 0$，同样考虑将边值化零. 令 $u(x,t)=xg(t)+v(x,t)$，则 $v_x(x,t)=0$，再利用偶延拓得到 $v(x,t)$，进一步得到 $u(x,t)$.

观察以上两个问题，利用对称开拓法求解时，我们要利用一维无界问题的解，意味着解分别限制在正负半轴均为无界问题的解!

事实上，以上的过程我们只是对于方程给出了形式解. 自然的考虑是解 $u(x,t)\in C^2$，因此只有在初边值满足一定条件的时候该问题才具有较好正则性的解，即提出了“相容性条件”，满足了相容性条件才意味着得到了该初边值问题的解. 不过波方程在这门课里面我们不是特别关注他的正则性，一般可微性都是足够好的，一般题目大多也会特别说明，这门课唯一需要指出的光滑性就

是调和函数是光滑的，涉及到其高阶导数必须要单独光滑性，前年有一个问题就是没指出调和函数光滑的都扣了 5 分.

2. 其次回忆特征线法. 课程中我们只是利用特征线法解决了一阶偏微分方程的解. 即考虑问题：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,t)u=f(x,t),\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$
令 $x=x(t), U(t)=u(x(t),t)$，则
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=u_t+u_x x'(t).$$
若 $x'(t)=a(x(t),t)$，则
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+b(x(t),t)U(t)=f(x(t),t).$$
令 $x(0)=c, U(0)=u(x(0),0)=\varphi(c)$，则实现了一阶偏微分方程向两个 ode 的转化：
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x(t),t),\\ x(0)=c.\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+b(x(t),t)U(t)=f(x(t),t),\\ U(0)=u(x(0),0)=\varphi(c).\end{cases}$$
这里需要注意的是特征线法的几何意义，我们只考虑需要在后面用到的如下方程：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$
将其用特征线法转化为
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a,\\ x(0)=c.\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=f(x(t),t),\\ U(0)=u(x(0),0)=\varphi(c).\end{cases}$$
进而
$$x(t)=-at+c,$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=f(-at+c,t),$$
$$U(t)=\varphi(c)+\int_0^t f(-a\tau+c,\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\int_0^t f(x+a(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau.$$
我们可以从几何的角度考虑这个问题：在特征线上对时间进行积分可以得到一阶偏微分方程的解.请参考群里发的笔记来理解这件事.

3. 回到本题.

(a). 根据初值条件可知需要做奇延拓，但是 $v(x,t) = -u(-x,t)$ 满足方程

$$v_{tt} - v_{xx} - v_t + v_x = 0.$$

$v(x,t)$ 与 $u(x,t)$ 满足的方程不同，而 $v(x,t)$ 为对称开拓后限制在负半轴上的解，因此不能用对称开拓法求解问题.

(b). 原方程等价于

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + 1)(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})u = 0.$$

令

$$v(x,t) = (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})u(x,t),$$

则其满足方程

$$\begin{cases} v_t - v_x + v = 0, \\ v(x,0) = \psi(x) + \varphi'(x). \end{cases}$$

利用特征线法求解该方程：令 $x(0) = c, V(0) = v(x(0),0) = \psi(c) + \varphi'(c)$，则实现了一阶偏微分方程向两个 ode 的转化：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1, \\ x(0) = c. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + V = 0, \\ V(0) = v(x(0),0) = \psi(c) + \varphi'(c). \end{cases}$$

可解得

$$v(x,t) = e^{-t}(\psi(x+t) + \varphi'(x+t))$$

$u(x,t)$ 满足的方程为：

$$\begin{cases} u_t + u_x = e^{-t}(\psi(x+t) + \varphi'(x+t)), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

该方程的特征线为 $x(t) = t + c$，注意到，x 与 t 的大小关系决定了特征线与 $\mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+$ 的交点位置.如下图所示.

因此 $x \geqslant t$ 时，方程的解为

$$u(x,t) = \varphi(x-t) + \int_0^t e^{-\tau}(\psi(x-t+2\tau) + \varphi'(x-t+2\tau))\mathrm{d}\tau.$$

$x < t$ 时，方程的解为

$$u(x,t) = \int_{t-x}^t e^{-\tau}(\psi(x-t+2\tau) + \varphi'(x-t+2\tau))\mathrm{d}\tau.$$

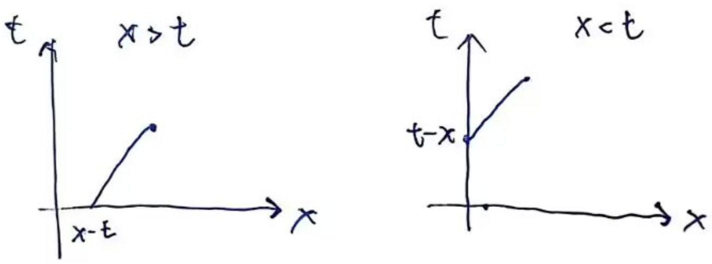

图 1.1: x, t 的关系对交点位置的影响

化简后得到方程的解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\varphi(x-t)+\dfrac{1}{2}e^{\frac{x-t}{2}}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}e^{-\frac{\xi}{2}}(\psi(\xi)+\varphi'(\xi))\mathrm{d}\xi, & x\geqslant t,\\ \dfrac{1}{2}e^{\frac{x-t}{2}}\displaystyle\int_{t-x}^{t+x}e^{-\frac{\xi}{2}}(\psi(\xi)+\varphi'(\xi))\mathrm{d}\xi, & x<t.\end{cases}$$

注

1. 完成方程的求解不要求提出相容性原理，只需要给出解的表达式即可.
2. 关于赋值与求导的顺序：自然不允许先对 x 赋值再对 x 求导. 以下的过程是有问题的：

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}+1)u=0.$$

令 $v(x,t)=(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}+1)u$，则 $v(0,t)=u_t(0,t)-u_x(0,t)+u(0,t)$ =0-0+0=0.

✍ **练习 1.2(P209 T27)** 求解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<t,\\ u|_{x=t}=\varphi(t), & t\geqslant 0,\\ u_x|_{x=0}=\psi(t), & t\geqslant 0.\end{cases}$$

如果 $\varphi(t)$,$\psi(t)$ 都在 $[0,a](a>0)$ 上给定，试指出此定解条件的决定区域.

解 根据 D'Alembert 公式，设该方程的解为 $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$. 则

$$\varphi(t)=u(t,t)=F(2t)+G(0).$$

$$\psi(t)=u_x(0,t)=F'(t)+G'(-t).$$

则

$$F(t)=\varphi(\frac{t}{2})-G(0).$$

$$\int_0^t\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+C=F(t)-G(-t).$$

则

$$G(t)=F(-t)-\int_0^{-t}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-C.$$

故

$$u(x,t)=\varphi(\frac{x+t}{2})-G(0)+\varphi(\frac{t-x}{2})-G(0)-\int_0^{t-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-C.$$

进一步求解 C，在 $G(t)$ 的表达式中令 $t=0$，则

$$2G(0)=\varphi(0)-C.$$

因此方程的解为

$$u(x,t)=\varphi(\frac{x+t}{2})+\varphi(\frac{t-x}{2})-\int_0^{t-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\varphi(0).$$

由于 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上给定，此定解条件的决定区域为

$$\begin{cases}0\leqslant x+t\leqslant 2a,\\ 0\leqslant t-x\leqslant a.\end{cases}$$

注

1. 这里根据 D'Alembert 公式可以考虑为一维无界问题解的一种预设，我们的想法就是利用已知的初值求解预设表达式中的 F 和 G，最终的求解结果应该只含 φ 与 ψ.
2. 这里回顾决定区域、影响区域等名词的意义.
3. 本题还可以利用特征线的办法进行求解. 令 $v=u_t+u_x$，则满足：

$$\begin{cases}v_t-v_x=0,\\ v|_{x=t}=u_t|_{x=t}+u_x|_{x=t}=u_t(t,t)+u_x(t,t)=\varphi'(t).\end{cases}$$

特征线为 $x(t)=-t+c$，利用特征线法求解可得

$$v(x,t)=\varphi'(\frac{x+t}{2}).$$

这里可以利用如下的技巧：

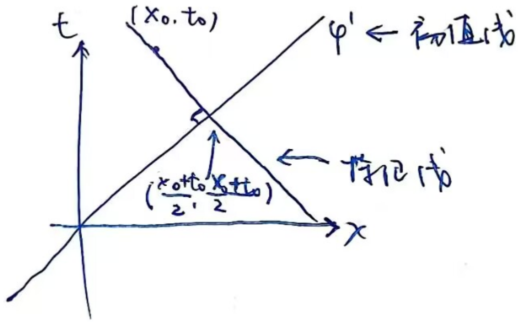

图 1.2: 求解初值线与特征线交点

则 $u(x,t)$ 满足方程

$$\begin{cases}u_t+u_x=\varphi'(\frac{x+t}{2}),\\ u|_{x=t}=\varphi(t),\\ u_x|_{x=0}=\psi(t).\end{cases}$$

可以注意到这里 $x=t$ 与特征线平行，无交点，也是无法通过前两个表达式决定方程的解的原因. 现在缺的是一条“初值线”，我们只能利用第三个表达式：

$$(u_t+u_x)(0,t)=\varphi'(\frac{t}{2}).$$

则

$$\frac{\mathrm{d}u(0,t)}{\mathrm{d}t}=\varphi'(\frac{t}{2})-\psi(t).$$

故

$$u(0,t)=u(0,0)+\int_0^t(\varphi'(\frac{\tau}{2})-\psi(\tau))\mathrm{d}\tau=2\varphi(\frac{t}{2})-\varphi(0)-\int_0^t\psi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

得到"初值线"后我们再利用特征线法可解得

$$u(x,t)=2\varphi(\frac{t-x}{2})-\varphi(0)-\int_0^{t-x}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t-x}^t\varphi'(\frac{2\tau-t+x}{2})\mathrm{d}\tau.$$

化简后与我们之前得到的结论相同.

练习 1.3(P213 T40(2)) 用分离变量法求解混合问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=x(x-2l),\ u_t(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0, \quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

解 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 则 $X(x)T''(t)-X''(x)T(t)=0$. 令

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda.$$

因此

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$

$$T''(t)+\lambda T(t)=0.$$

根据边值有

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0,$$

$$u_x(l,t)=X'(l)T(t)=0.$$

因此考察对于 x 的 $S-L$ 边值问题:

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=0,\\ X'(l)=0.\end{cases}$$

存在解 $X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$.

根据初值有

$$\begin{cases}X(0)=c_1=0,\\ X'(l)=c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l=0.\end{cases}$$

因此具有特征值 $\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2$, 对应特征函数为 $X_n(x)=\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)$.

考察 $T_n(t)$ 满足的方程

$$T_n''(t)+\lambda_nT_n(t)=0.$$

具有解的形式:

$$T_n(t)=a_n\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)+b_n\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t).$$

令

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)[a_n\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)+b_n\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)].$$

根据初值有:

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x) = x(x-2l), \\ u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x) = 0. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} a_n = \frac{\int_0^l [x(x-2l)\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)]\mathrm{d}x}{\int_0^l [\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)]^2 \mathrm{d}x} = -\frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3}, \\ b_n = 0. \end{cases}$$

则原方程的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{32l^2}{(2n+1)^3\pi^3} \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t).$$

练习 1.4(P214 T41(3)) 用分离变量法求解混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \frac{Ax^2}{l^2},\ u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = A \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

解 首先将边值零化. 考虑

$$v(x,t) = u(x,t) - A.$$

则 $v(x,t)$ 满足方程

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(x,0) = \frac{Ax^2}{l^2} - A,\ v_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v_x(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

设 $v(x,t) = X(x)T(t)$, 则 $X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0$. 令

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

因此

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

根据边值有

$$v_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0,$$

$$v(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

因此考察对于 x 的 $S-L$ 边值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

存在解 $X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$.
根据初值有

$$\begin{cases} X'(0)=c_2\sqrt{\lambda}=0, \\ X(l)=c_1\cos\sqrt{\lambda}l=0. \end{cases}$$

因此具有特征值 $\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2$, 对应特征函数为 $X_n(x)=\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)$.
考察 $T_n(t)$ 满足的方程

$$T_n''(t)+\lambda_n T_n(t)=0.$$

具有解的形式:

$$T_n(t)=a_n\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)+b_n\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t).$$

令

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)[a_n\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)+b_n\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)].$$

根据初值有:

$$\begin{cases} v(x,0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)=\frac{Ax^2}{l^2}-A, \\ v_t(x,0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\frac{(2n+1)\pi}{2l}\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)=0. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} a_n=\frac{\int_0^l[(\frac{Ax^2}{l^2}-A)\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)]\mathrm{d}x}{\int_0^l[\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)]^2\mathrm{d}x}=-\frac{(-1)^n32A}{(2n+1)^3\pi^3}, \\ b_n=0. \end{cases}$$

则原方程的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{(-1)^n32A}{(2n+1)^3\pi^3}\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2l}t)+A.$$

练习 1.5(P139 T18(4)) 用分离变量法求解混合问题:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, \quad 0<x<\pi,\ t>0, \\ u(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u_x(0,t)=A_1t,\ u_x(\pi,t)=A_2t, \quad t\geqslant 0. \end{cases}$$

解 首先将边值零化. 考虑

$$v=u-(\frac{1}{2}\frac{A_2t-A_1t}{\pi}x^2+A_1tx).$$

则 $v(x,t)$ 满足方程

$$\begin{cases} v_t-v_{xx}=-\frac{A_2-A_1}{2\pi}x^2-A_1x+\frac{A_2t-A_1t}{\pi}:=f(x,t), \quad 0<x<\pi,\ t>0, \\ v(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ v_x(0,t)=0,\ v_x(l,t)=0, \quad t\geqslant 0. \end{cases}$$

设 $v(x,t)=X(x)T(t)$, 考虑:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

根据边值有

$$v_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0,$$

$$v_x(\pi,t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

因此考察对于 x 的 $S-L$ 边值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

存在解 $X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$.
根据初值有

$$\begin{cases} X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0, \\ X'(\pi) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0. \end{cases}$$

因此具有特征值 $\lambda_n = n^2$, 对应特征函数为 $X_n(x) = \cos(nx)$.这里 λ 可以为 0, 0 对应特征函数为 1.
考察 $T_n(t)$ 满足的方程:
令

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

则

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n'(t) - X_n''(x)T(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [T_n'(t) + \lambda_n T_n(t)]X_n(x) \\ &= f(x,t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)X_n(x). \end{aligned}$$

因此 $T_n(t)$ 满足方程:

$$\begin{cases} T_n'(t) + n^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = 0. \end{cases}$$

其中 $f_n(t)$ 满足:

$$f_n(t) = \frac{\int_0^\pi \cos(n\pi) f(x,t)\mathrm{d}x}{\int_0^\pi \cos^2(n\pi)\mathrm{d}x}.$$

进一步,

$$f_0(t) = \frac{A_2 - A_1}{\pi}t - \frac{\pi}{3}A_1 - \frac{\pi}{6}A_2,$$

$$f_n(t) = \frac{2[A_1 - (-1)^n A_2]}{n^2\pi}, \ n \geqslant 1$$

可解得

$$T_0(t) = \frac{A_2 - A_1}{2\pi}t^2 - \frac{\pi}{3}A_1 t - \frac{\pi}{6}A_2 t,$$

$$T_n(t) = \frac{2[A_1 - (-1)^n A_2]}{n^4\pi}(1 - e^{-n^2 t}),\ n \geqslant 1.$$

则原方程的解为

$$u(x,t) = \frac{A_2 - A_1}{2\pi}t^2 - \frac{\pi}{3}A_1 t - \frac{\pi}{6}A_2 t + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2[A_1 - (-1)^n A_2]}{n^4\pi}(1 - e^{-n^2 t})]\cos(nx) + \frac{1}{2}\frac{A_2 t - A_1 t}{\pi}x^2 + A_1 tx.$$

注 需要注意的是边值的零化处理. 对于不同类型的边值，我们有不同的零化处理（当然正确的处理是有很多的，这里只是列举了容易想到的）:

1. $u(0,t) = g_1(t)$，$u(l,t) = g_2(t)$，则令
$$v = u - \frac{l-x}{l}g_1(t) - \frac{x}{l}g_2(t).$$
2. $u_x(0,t) = g_1(t)$,$u(l,t) = g_2(t)$，则令
$$v = u - (x-l)g_1(t) - g_2(t).$$
3. $u_x(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t)$，则令
$$v = u - (\frac{1}{2}\frac{g_2 - g_1}{l}x^2 + g_1 x).$$

经过商量，考试的时候请尽可能算到底！老师不会出很复杂的积分，如果根据自己的判断积分是很复杂的，如上面这三个题，不算下去也不会损失什么分数. 但是如果较为简单，请尽可能算到底（不过不算到底也只会占一点点结果分，看自己斟酌?）.

练习 1.6(P211 T34) 利用能量不等式证明一维波动方程在给定边值条件下的混合问题解的唯一性.

1. $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x|_{x=0} = g_1(t),\ u_x|_{x=l} = g_2(t), & t \geqslant 0. \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ -u_x + \alpha u|_{x=0} = g_1(t),\ u_x + \beta u|_{x=l} = g_2(t), & t \geqslant 0. \end{cases}$$
   其中 α 与 β 为正的常数.

证明

1. 首先来回顾“能量估计”是什么. 我们更强调能量估计是一种解决问题的手段，而不仅仅特指某一个不等式. 课程里面最重要的应用是解决边值问题解的唯一性问题. 即考虑波动方程
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 & x \in \Omega, \end{cases}$$
在不同给定零边值下只有零解.
   (a). 第一类边值问题：即 $u|_{\partial\Omega} = 0,\ t > 0.$
   第二类边值问题：即 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}|_{\partial\Omega} = 0,\ t > 0.$
   令
   $$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 \mathrm{d}x,$$
   则
   $$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega div(u_t \nabla u)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\partial\Omega} u_t \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$
$$= \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

在给定零边值条件下右端项均为 0，表明 $E(t)=E(0)=0$，这迫使 u_t 与 u_{x_i} 均为 0，再根据初值知 $u \equiv 0$.

考试过程中请使用完整的推导，请不要直接得出这一个等式!

(b). 第三类边值问题：即 $-u_x + \alpha u|_{x=0} = 0$，$u_x + \beta u|_{x=l} = 0$，$\quad t \geqslant 0$.

令

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2 + u_x^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}[\alpha u^2(0,t) + \beta u^2(l,t)].$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \int_0^l (u_t u_{tt} + u_x u_{xt})\mathrm{d}x + \alpha u(0,t)u_t(0,t) + \beta u(l,t)u_t(l,t)\\ &= \int_0^l (u_t u_{tt} - u_t u_{xx})\mathrm{d}x + u_x u_t|_{x=0}^{x=l} + \alpha u(0,t)u_t(0,t) + \beta u(l,t)u_t(l,t)\\ &= [u_x(l,t) + \beta u(l,t)]u_t(l,t) + [-u_x(0,t) + \alpha u(0,t)]u_t(0,t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

表明 $E(t)=E(0)=0$，这迫使 u_t 与 u_x 均为 0，再根据初值知 $u \equiv 0$.

2. 除了解的唯一性以外，我们还利用能量估计的手段研究了稳定性.

✍ **练习 1.7(P136 T3(2))** 求函数的逆变换：

$F(\lambda) = e^{(-a^2\lambda^2 + ib\lambda + c)t}$.

其中 $t > 0$ 为参数，$a \in \mathbf{R}_+$，$b, c \in \mathrm{R}$ 为常数.

解 注意到

$$-a^2\lambda^2 + ib\lambda + c = -a^2(\lambda - \frac{ib}{2a^2})^2 + \frac{4a^2c - b^2}{4a^2}.$$

则

$$F(\lambda)^{-1} = e^{(\frac{4a^2c-b^2}{4a^2})t} \cdot (e^{-a^2t(\lambda - \frac{ib}{2a^2})^2})^{-1}.$$

可视作先伸缩后平移，因此

$$(e^{-a^2t\lambda^2})^{-1} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-\pi^2x^2}{a^2t}}.$$

$$(e^{-a^2t(\lambda - \frac{ib}{2a^2})^2})^{-1} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-\pi^2x^2}{a^2t}} e^{2\pi i \frac{ib}{2a^2}x}.$$

故

$$F(\lambda)^{-1} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot exp(\frac{-\pi^2x^2}{a^2t} - \frac{\pi bx}{a^2} + (c - \frac{b^2}{4a^2})t).$$

注

1. 这里建议用以上办法去做，有部分同学用到了复积分，但并没有说清楚.
2. 如果考试中需要计算变换与逆变换，请按照老师所给的定义（去年卷子上给出了，和课本会差一个常数）；如果是让解方程，自然以结果为准.

✍ **练习 1.8(P136 T4(1))** 利用 Fourier 变换法求解问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} + bu_x + cu = f(x,t), & (x,t) \in \mathrm{R}_+^2, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathrm{R}, \end{cases}$$

其中 $a \in \mathbf{R}_+$，$b, c \in \mathrm{R}$ 为常数.

解 关于方程对 x 做 Fourier 变换可得

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + 4a^2\pi^2\hat{u}(\xi,t) + 2b\pi i\hat{u}(\xi,t) + c\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi), \end{cases}$$

为关于 t 的一阶线性方程，解得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)t} + \int_0^t e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi,s)\mathrm{d}s.$$

类似上一习题的过程，可求得

$$(e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)t})^{-1} = \frac{1}{2a\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot exp(\frac{-\pi^2x^2}{4a^2\pi^2t} - \frac{-2b\pi^2x}{4a^2\pi^2} + (-c - \frac{4b^2\pi^2}{16a^2\pi^2})t).$$

可化简为

$$(e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)t})^{-1} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot exp(\frac{-x^2}{4a^2t} + \frac{bx}{2a^2} + (-c - \frac{b^2}{4a^2})t) =: F(x,t).$$

而

$$\begin{aligned} \{\int_0^t e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi,s)\mathrm{d}s\}^{-1} &= \int_R\int_0^t e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi,s)\mathrm{d}se^{2\pi i\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^t \mathrm{d}s\int_R e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi,s)e^{2\pi i\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^t \{e^{-(4a^2\pi^2\xi^2+2b\pi i\xi+c)(t-s)}\hat{f}(\xi,s)\}^{-1}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t\int_R f(x-y,s)F(y,t-s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

因此

$$u(x,t) = \int_R \varphi(y)F(x-y,t)\mathrm{d}y + \int_0^t\int_R f(x-y,s)F(y,t-s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

注 如此恶心的计算自然在考试中不会出现，但是需要掌握使用 Fourier 变换计算的方法.

✍ **练习 1.9(P141 T25)** 若 $v \in C^{2,1}(\Omega_T)$ 满足：

$$v_t - a^2\Delta v \leqslant 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

称 v 在 Ω_T 上是热方程的下解，其中 $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$，$a > 0$ 为常数.

1. 证明：
$$\max_{\bar{\Omega}_T} v(x,t) = \max_{\partial_p\Omega_T} v(x,t).$$
2. 设 ϕ：$\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是光滑凸函数且 u 在 Ω_T 上满足热方程. 证明：$v = \phi(u)$ 在 Ω_T 上是热方程的下解.
3. 设 u 在 Ω_T 上满足热方程. 证明：$v = a^2|\nabla u|^2 + u_t^2$ 在 Ω_T 上是热方程的下解.

证明

1. 根据热方程的极值原理即得. (根据课上定理的证明直接将 u_{xx} 换为 Δu 即可，为 *Hesse* 矩阵的迹.)
2. 直接验算即可.u 满足
$$u_t - a^2\Delta u = 0.$$

则

$$v_t - a^2\Delta v = \varphi'(u)u_t - a^2\phi''(u)|\nabla u|^2 - a^2\varphi'(u)\Delta u = -a^2\phi''(u)|\nabla u|^2 \leqslant 0.$$

即 v 为下解.

3. 同样直接验算即可.

$$\begin{aligned} v_t - a^2\Delta v &= 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt} - a^2\Delta(a^2|\nabla u|^2 + u_t^2) \\ &= 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt} - a^2(2a^2\nabla u\cdot\nabla u_{x_i} + 2u_tu_{tx_i})_{x_i} \\ &= 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt} - a^2(2a^2|\nabla u_{x_i}|^2 + 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_{x_ix_i} + 2u_{tx_i}^2 + 2u_tu_{tx_ix_i}) \\ &= 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_t + 2u_tu_{tt} - a^2(2a^2|\nabla u_{x_i}|^2 + 2a^2\nabla u\cdot\nabla u_{x_ix_i} + 2|\nabla u_t|^2 + 2u_t\Delta u_t) \\ &\leqslant 2a^2\nabla u\cdot\nabla(u_t - a^2\Delta u) + 2u_t(u_t - a^2\Delta u)_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

其中不等式的放缩放掉了括号内的第一项和第三项.

注 一个很无聊的计算题，如果对于算子的运算不够熟悉，展开之后考虑求和本身也不困难，不一定必须拿算子计算.

练习 1.10(P141 T26) 规定记号：$Q_T = \{(x,t)\big|0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$，$\Gamma = \partial_p Q_T$ 为抛物边界. 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$ 是热方程

$$u_t - u_{xx} = u, \quad (x,t)\in Q_T$$

的非负解. 假设存在正数 $M > 0$，使得

$$u|_\Gamma \leqslant M.$$

证明：

$$u(x,t) \leqslant Me^t, \quad (x,t)\in\bar{Q}_T.$$

证明 设 $\omega = e^{-t}u$，则满足方程：

$$\omega_t - \omega_{xx} = e^{-t}(u_t - u - u_{xx}) = 0.$$

由热方程的极值原理知，

$$\max_{\bar{Q}_T}\omega \leqslant \max_{\Gamma}\omega \leqslant M.$$

故

$$u(x,t) \leqslant Me^t, \quad (x,t)\in\bar{Q}_T.$$

1.1.2 补充习题

例题 1.1(赵班.20final) 考察如下问题：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -2b\partial_t u + g(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

其中 $b > 0$ 为常数. 请用能量方法证明解的唯一性.

证明 设 u_1, u_2 均为题设初边值问题的解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \partial_x^2 w = -2b\partial_t w, & 0 < x < l, t > 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t \geqslant 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

定义能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (w_t^2 + w_x^2)dx.$$

则有

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l (w_t w_{tt} + w_x w_{tx})dx = \int_0^l w_t(w_{tt} - w_{xx})dx + w_x w_t\Big|_0^l = -2b\int_0^l w_t^2 dx \leqslant 0.$$

由此可得 $0 \leqslant E(t) \leqslant E(0) = 0, \forall t \geqslant 0$.

所以 $E(t) \equiv 0 \Rightarrow w_t \equiv w_x \equiv 0 \Rightarrow w$ 恒为常数.

结合初边值可得 w 恒为零. 所以 $u_1 \equiv u_2$, 即解是唯一的.

例题 1.2(能量估计手段，P215 T47) 考虑混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x|_{x=0} = 0, (u_x + u)|_{x=l} = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

其中 a 为常数. 尝试推导能量不等式.

证明 我们还是利用基本的能量估计流程去做，再根据边值条件进行一些变化.

$$u_t u_{tt} - a^2 u_t u_{xx} = f(x,t).$$

两边从 0 到 l 开始积分，有

$$\int_0^l [\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{a^2}{2}u_x^2]\mathrm{d}x - a^2\int_0^l (u_t u_x)_x \mathrm{d}x = \int_0^l f u_t \mathrm{d}x.$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l [\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{a^2}{2}u_x^2]\mathrm{d}x &= a^2 u_t u_x|_0^l + \int_0^l f u_t \mathrm{d}x \\ &= a^2[u_x(l,t)u_t(l,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)] + \int_0^l f u_t \mathrm{d}x \\ &= -a^2 u(l,t)u_t(l,t) - 0 + \int_0^l f u_t \mathrm{d}x \\ &= -\frac{a^2}{2}(u(l,t)^2)_t + \int_0^l f u_t \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

将含有对 t 导数的项全部移至左边，则定义

$$E(t) = \int_0^l [\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{a^2}{2}u_x^2]\mathrm{d}x + \frac{a^2}{2}u(l,t)^2.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = \int_0^l f u_t \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^l f^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l u_t^2 \mathrm{d}x \leqslant E(t) + \frac{1}{2}\int_0^l f^2 \mathrm{d}x.$$

$$[e^{-t}E(t)]' \leqslant e^{-t}\frac{1}{2}\int_0^l f^2 \mathrm{d}x.$$

$$E(t) \leqslant e^t[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}\int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s] \leqslant e^t[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s].$$

其中

$$\begin{aligned} E(0) &= \int_0^l [\frac{1}{2}u_t(x,0)^2 + \frac{a^2}{2}u_x(x,0)^2]\mathrm{d}x + \frac{a^2}{2}u(l,0)^2 \\ &= \int_0^l [\frac{1}{2}\psi(x)^2 + \frac{a^2}{2}\varphi'(x)^2]\mathrm{d}x + \frac{a^2}{2}\varphi'(l)^2. \end{aligned}$$

因此可产生估计

$$E(t) \leqslant C_T[\int_0^l [\frac{1}{2}\psi(x)^2 + \frac{a^2}{2}\varphi'(x)^2]\mathrm{d}x + \frac{a^2}{2}\varphi'(l)^2 + \int_{Q_T} f^2].$$

例题 1.3 考虑 Klein-Gordon 方程 $u_{tt} - c^2\Delta u + m^2 u = 0 (m > 0)$.

1. 指出该方程的能量并证明它是常数.
2. 证明该方程具有有限传播速度, 即方程在 (x_0, t_0) 处的解完全由初值在球域 $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \leqslant ct_0\}$ 上的取值决定.

证明 本题所有函数均紧支.

1. 该方程的能量函数为

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^3}(u_t u_{tt} + c^2\nabla u \cdot \nabla(u_t) + m^2 u u_t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_t(u_{tt} - c^2\Delta u + m^2 u)dx = 0. \end{aligned}$$

2. 只需证明: 若方程的初值在球域 $B(x_0, ct_0)$ 内恒为零, 则 $u(x_0, t_0) = 0$. 考虑特征锥 $C(x_0, t_0) = \{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant t_0, |x - x_0| \leqslant c(t_0 - t)\}$, 并考虑特征锥截面上的能量函数

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{B(x_0, c(t_0-t))}(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{c(t_0-t)}\left(\int_{S(x_0,\tau)}(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dS\right)d\tau \\ &= \int_{B(x_0,c(t_0-t))}(u_t u_{tt} - c^2\nabla u\cdot\nabla(u_t) + m^2 u u_t)dx - \frac{c}{2}\int_{S(x_0,c(t_0-t))}(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dS \\ &= \int_{B(x_0,c(t_0-t))}(u_t(u_{tt} - c^2\Delta u + m^2u))dx - \frac{c}{2}\int_{S(x_0,c(t_0-t))}\left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 - 2cu_t\frac{\partial u}{\partial \nu} + m^2u^2\right)dS \\ &= -\frac{c}{2}\int_{S(x_0,c(t_0-t))}\left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 - 2cu_t\frac{\partial u}{\partial \nu} + m^2u^2\right)dS. \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\left|2cu_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = |2cu_t(\nabla u\cdot\nu)| \leqslant 2|u_t|\cdot c|\nabla u| \leqslant u_t^2 + c^2|\nabla u|^2.$$

综上可得 $\frac{de}{dt} \leqslant 0$. 结合特征锥底面初值为零可得 $e(0) = 0$, 所以 $e(t) \equiv 0, \forall t \geqslant 0$. 进而在整个特征锥内都有 $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u$ 为常数, 结合初值可得 u 恒为零. 所以在特征锥顶 (x_0, t_0) 处 u 自然也为零.