《数学分析教程》（第 3 版）练习题及问题参考解答

微信公众号　数学沉思录

最后更新时间：2023 年 1 月 1 日

说明

这份文档是常庚哲、史济怀所编著的《数学分析教程》(第3版) 的练习题和问题的参考答案，是我在准备2021年考研时整理的. 其中还有三道题未做，分别是: 练习题10.9的第2题、练习题13.5的第2题和练习题16.4的第1题的(8). 在2021年1月，我将这份文档的内容以图片的形式放到了微信公众号“数学沉思录”上. 现在，我把此文档免费分享给大家，希望能给大家的学习带来帮助.

有些题目的解答我只写了“略”，说明这道题只是一些平凡的计算，或者用简单的中学知识就可以解决. 由于我的水平有限，本套答案必然还有错误之处，还望大家海涵.

2023 年 1 月 1 日

目录

第一章　实数和数列极限

1.1　实数

1.

证明　假设 $a+b$ 是有理数，那么 $(a+b)-a=b$ 也是有理数，矛盾！因此 $a+b$ 是无理数．因为 $-b$ 是无理数，所以 $a-b$ 还是无理数．假设 ab 是有理数，那么 $ab/a=b$ 也是有理数，矛盾！因此 ab 是无理数．因为 $1/a$ 是有理数，所以 b/a 还是无理数． □

2.

证明　设 a 和 b 是两个无理数且 $a<b$，那么对每个 $n\in\mathbb{N}^+$，$a+(b-a)/(2n)$ 都是 a 和 b 之间的有理数，而 $a+\sqrt{2}(b-a)/(2n)$ 都是 a 和 b 之间的无理数． □

3.

证明　假设 $\sqrt[3]{2}$ 是有理数，那么可以将其写成既约分数 p/q，从而 $2q^3=p^3$，从而 p 是偶数，设为 $2k$，于是有 $q^3=4k^3$，因此 q 也是偶数，这与 p/q 是既约分数矛盾！因此 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数． □

4.

证明　假设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数，那么可以将其写成既约分数 p/q，从而 $5+2\sqrt{6}=p^2/q^2$，进而 $24=(p^2/q^2-5)^2$，或者 $24q^2=(p^2-5q^2)^2$．由 $24q^2=2^3\times 3\times q^2$ 知平方数 $(p^2-5q^2)^2$ 的标准分解式中 3 一定是奇数次的，而这是不可能的！因此 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数． □

5.

证明　事实上 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$ 亦即 $x^2+y^2-2\sqrt{2}x=0$，于是由第 1 题知只能是 $x=0$，从而 $y=0$，因此 $(0,0)$ 是这个圆周上唯一的有理点． □

6.

证明 对任一有理数 p/q，因为 $\{10^n p - q\lfloor 10^n p/q\rfloor : n\in\mathbb{N}\}$ 就是 $10^n p$ 除以 q 的余数的集合，所以是有限集，从而 $\{10^n p/q - \lfloor 10^n p/q\rfloor : n\in\mathbb{N}\}$ 也是有限集，因此 p/q 可以表示成有尽小数或者无尽循环小数.

对于无尽循环小数 $n.r_1\cdots r_m\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k$，因为

$$\begin{aligned}10^{m+k}\times n.r_1\cdots r_m\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k &= nr_1\cdots r_m a_1\cdots a_k.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k\\ &= (nr_1\cdots r_m a_1\cdots a_k - nr_1\cdots r_m) + nr_1\cdots r_m.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k\\ &= (nr_1\cdots r_m a_1\cdots a_k - nr_1\cdots r_m) + 10^m\times n.r_1\cdots r_m\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k,\end{aligned}$$

所以

$$n.r_1\cdots r_m\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k = \frac{nr_1\cdots r_m a_1\cdots a_k - nr_1\cdots r_m}{10^{m+k}-10^m}$$

是有理数. □

7.

答 是无理数，因为显然没有循环节. □

8.

答 $0.24999\cdots = 5/2$，$0.\dot{3}7\dot{5} = 125/333$，$4.\dot{5}1\dot{8} = 122/27$. □

9.

答 不是. □

10.

证明 (1) 如果 $s\neq 0$，那么由第 1 题知 $s\sqrt{2}$ 是有理数，从而由第 1 题知 $0 = r + s\sqrt{2}$ 还是无理数，矛盾！因此 $s = 0$，进而 $r = 0$.

(2) 因为 $3t^2 = (r + s\sqrt{2}) = r^2 + 2s^2 + 2rs\sqrt{2}$ 是有理数，所以 $rs = 0$. 如果 $s = 0$，那么 $r + t\sqrt{3} = 0$，从而 $r = t = 0$. 如果 $r = 0$，假设 $s\neq 0$，那么 $t/s = -\sqrt{2}/\sqrt{3}$ 是无理数，矛盾！因此 $s = 0$，进而 $t = 0$. □

11.

证明 因为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是同号的，所以总有

$$a_n(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1}) > a_n,$$

因此

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1}) + a_n(1+a_n)$$

$$
\begin{aligned}
&> (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})+a_n \\
&> (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-2})+a_{n-1}+a_n \\
&> 1+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n.
\end{aligned}
$$
□

12.

证明 (1) 利用第11题，我们有

$$1\bigg/\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_k\right) > 1\bigg/\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_k} > \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1+\sum_{k=1}^{n}a_k. \tag{1.1}$$

(2) 在(1.1)式中用 $-a_k$ 代替 a_k 后不等式仍然正确. □

13.

证明 事实上

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right| + |a_n| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n-2}a_i\right| + |a_{n-1}| + |a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k|.$$

显然等号成立当且仅当所有的 a_k 都同号. □

14.

证明 没什么好证的. 几何意义是：在数轴上两点 a 和 b 的中点处加上它们距离的一半就得到大的数，减去它们距离的一半就得到小的数. □

15.

证明 当 $n=2$ 时，不难验证结论成立. 假设对 $n-1$ 个分数的情形结论已经成立，那么

$$
\begin{aligned}
\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right\} &= \min\left\{\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right\},\frac{a_n}{b_n}\right\} \leqslant \min\left\{\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{b_1+\cdots+b_{n-1}},\frac{a_n}{b_n}\right\} \\
&\leqslant \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n}{b_1+\cdots+b_{n-1}+b_n} \leqslant \max\left\{\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{b_1+\cdots+b_{n-1}},\frac{a_n}{b_n}\right\} \\
&\leqslant \max\left\{\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right\},\frac{a_n}{b_n}\right\} = \max\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right\},
\end{aligned}
$$

从而对 n 个分数的情形结论也成立. 因此结论普遍成立. □

16.

证明 这是第11题的特殊情形. □

17.

证明　这是因为 $(x^m-y^m)(x^n-y^n)\geqslant 0$，且等号成立当且仅当 $x=y$. □

1.

证明　请看书本后面的参考答案. □

2.

证明　当 $n=2$ 时不难验证结论成立. 假设对于 $n-1$ 的情形结论已经成立，那么由练习题的 17 题知

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\frac{x^{n-1}+y^{n-1}}{2}\cdot\frac{x+y}{2}=\frac{x^n+y^2+xy^{n-1}+x^{n-1}y}{4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}.$$

因此结论普遍成立. □

3.

证明　因为

$$0\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(a_i-a_j)(b_i-b_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(a_ib_i+a_jb_j-a_jb_i-a_ib_j)=2n\sum_{i=1}^n a_ib_i-2\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i,$$

所以

$$\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i\leqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$ □

4.

证明　直接利用切比雪夫不等式即可. □

5.

证明　注意到 $k!+2,k!+3,\ldots,k!+k$ 是 $k-1$ 个连续的合数，所以 x 的小数表示中有任意长度的连续的 0，因此不可能是循环小数，从而是无理数. □

6.

证明　设有理数 p/q 满足

$$\left|\frac{p}{q}-\pi\right|<\frac{355}{113}-\pi,$$

那么

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{355}{113}\right|\leqslant\left|\frac{p}{q}-\pi\right|+\frac{355}{113}-\pi<2\left(\frac{355}{113}-\pi\right)<5.3353\times10^{-7},$$

从而

$$5.3353\times 10^{-7} > \frac{|113p-355q|}{113q} > \frac{1}{113q},$$

因此 $q > 16586$. □

7.

证明 令 $\theta_i = \arcsin(x_0+x_1+\cdots+x_i)$，那么

$$\begin{aligned}&\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} = \frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\sqrt{1+\sin\theta_{i-1}}\sqrt{1-\sin\theta_{i-1}}}\\ =&2\frac{\cos((\theta_i+\theta_{i-1})/2)}{\cos\theta_{i-1}}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2} < 2\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2} < \theta_i-\theta_{i-1},\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} < \theta_n-\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$ □

8.

证明 取定正整数 N，那么由抽屉原理知 $N+1$ 个数

$$0x-\lfloor 0x\rfloor, x-\lfloor x\rfloor, 2x-\lfloor 2x\rfloor, \ldots, Nx-\lfloor Nx\rfloor$$

中至少有两个同时落在 N 个区间 $[0,1/N),[1/N,2/N),\ldots,[(N-1)/N,1)$ 中的一个中，不妨设是 $mx-\lfloor mx\rfloor$ 和 $nx-\lfloor nx\rfloor$，于是

$$\frac{1}{N} > |mx-\lfloor mx\rfloor-(nx-\lfloor nx\rfloor)| = |(m-n)x-(\lfloor mx\rfloor-\lfloor nx\rfloor)|.$$

取 $q=|m-n|$，$p=(\lfloor mx\rfloor-\lfloor nx\rfloor)\operatorname{sgn}(m-n)$，就有

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} < \frac{1}{q^2}. \tag{1.2}$$

由(1.2)式中的 $1/(Nq)$ 可以任意小知这样的 q 和 p 是有无穷多对的. □

1.2 数列和收敛数列

1.

证明 (1) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil 1/\varepsilon^2\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/(1+\sqrt{n})=0$.

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil 1/\varepsilon\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n/n=0$.

(3) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=2\lfloor\log_{1/2}\varepsilon\rfloor$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{n!}{n^2}\right|<\frac{\lfloor n/2\rfloor!}{n^{\lfloor n/2\rfloor}}<\frac{1}{2^{\lfloor n/2\rfloor}}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n!/n^n=0$.

(4) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil 1/\varepsilon\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}/n=0$.

(5) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil 7/(5\varepsilon)+2\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{2n+3}{5n-10}-\frac{2}{5}\right|=\frac{7}{5|n-2|}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)/(5n-10)=2/5$.

(6) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil\lg\varepsilon\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$|0.\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}-1|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}=1$.

(7) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil 2/\varepsilon\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2+\cdots+n)/n^2=1/2$.

(8) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil 1/\varepsilon\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{1}{3}\right|=\frac{3n+1}{6n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(1^2+2^2+\cdots+n^2)/n^3=1/3$.

(9) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil\cot\varepsilon\rceil$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|=\operatorname{arccot} n<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\pi/2$.

(10) 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\max\{\lceil\cot(\varepsilon/2)\rceil,\lceil\sqrt{\pi/\varepsilon}\rceil\}$，那么当 $n>N$ 时就有

$$\left|\frac{n^2\arctan n}{1+n^2}-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}-\frac{\arctan n}{1+n^2}\right|\leqslant\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\frac{\arctan n}{1+n^2}\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\arctan n/(1+n^2)=\pi/2$. □

2.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有

$$\varepsilon>|a_n-a|\geqslant||a_n|-|a||,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

对于逆命题，$a_n=(-1)^n$ 就是一个例子. □

3.

证明　设 $\{a_n\}$ 的极限是 a，那么存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时 $|a_n-a|<1/3$，从而

$$|a_{N+1}-a_n|\leqslant|a_{N+1}-a|+|a_n-a|<\frac{2}{3},$$

由此可见 $a_n=a_{N+1}$. □

4.

答　(1) 不可以.

(2) 不可以.

(3) 可以.

(4) 可以.

(5) 可以. □

5.

答　存在 $\varepsilon_0>0$，使得对无论多么大的正整数 N，都存在 $n>N$ 使得 $|a_n-a|\geqslant\varepsilon_0$. □

6.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n=0$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $a_n/n<\varepsilon$，再取 $N_1=\lceil\max\{|a_1|,\ldots,|a_N|\}/\varepsilon\rceil$，那么当 $n>\max\{N,N_1\}$ 时就有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\max\{a_1,\ldots,a_N,a_{N+1},\ldots,a_n\}}{n}\right| &\leqslant \frac{\max\{|a_1|,\ldots,|a_N|,|a_{N+1}|,\ldots,|a_n|\}}{n}\\ &\leqslant \frac{\max\{\max\{|a_1|,\ldots,|a_N|\},n\varepsilon\}}{n}\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}}{n}=0.$$ □

7.

证明 注意到

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\\c_{n-1}\end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1},$$

所以

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1/2)^n&0&0\\0&(-1/2)^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(2a/3-b/3-c/3)(-1/2)^n+(a+b+c)/3\\(-a/3+2b/3-c/3)(-1/2)^n+(a+b+c)/3\\(-a/3-b/3+2c/3)(-1/2)^n+(a+b+c)/3,\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由此可见

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{a+b+c}{3}.$$ □

1.3 收敛数列的性质

1.

答 (1) 不能.

(2) 发散.

(3) 发散.

(4) 不能确定.

(5) 不一定. □

2.

证明 根据极限的四则运算,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\frac{a}{a}=1.$$

比如 $a_n=1/2^n$ 就是一个 $a=0$ 时的反例. □

3.

答 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-2/3)^n}{3-2(-2/3)^n}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+4}=-\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^{1/n}=1$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}=1$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{1/n}=1$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan^{1/n}n=1$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin^2n+\cos^2n)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2n+1)^{1/n}=1$. □

4.

答 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-a^n)/(1-a)}{(1-b^n)/(1-b)}=\dfrac{1-b}{1-a}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1\times3}{2^2}\dfrac{2\times4}{3^2}\cdots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{1+2}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\times 4}{2\times 3}\dfrac{2\times 5}{3\times 4}\cdots\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n}=\dfrac{1}{3}$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}|1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left|\dfrac{1-(-1)^n(2n+1)}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$. □

5.

答　(1) 由 $b\leqslant(a^n+b^n)^{1/n}\leqslant(2b^n)^{1/n}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}=b$.

(2) 不妨设 $\max\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}=a_m$，那么

$$a_m\leqslant(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{1/n}\leqslant(ma_m^n)^{1/n},$$

由此知

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{1/n}=a_m=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}.$$ □

6.

证明　这是因为

$$a_n-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}\leqslant a_n.$$ □

7.

证明　由例 4 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)/n=\ln a$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=a$. □

8.

证明　(1) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{1}}=a.$$

(2) 在 (1) 中取 $a_n=a$ 即可.

(3) 在 (1) 中取 $a_n=n$ 即可.

(4) 在 (1) 中取 $a_n=1/n!$ 即可. □

9.

证明　这是例 4 的一个具体情形. □

10.

证明 注意到

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\sqrt{n+k}=\sum_{k=0}^{p-1}(a_0+a_1+\cdots+a_k)(\sqrt{n+k}-\sqrt{n+k+1})=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_k}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n+k+1}}$$

即可. □

11.

证明 一方面显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n}=\frac{a+b}{2},$$

另一方面又有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n}-\frac{a_{2n}}{2n-1}=\frac{a+b}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{a+b}{2}.$$

□

12.

证明 因为

$$\frac{k/n^2}{\sqrt{1+1/n}+1}\leqslant\frac{k/n^2}{\sqrt{1+k/n^2}+1}<\frac{k}{2n^2},$$

所以

$$\frac{n+1}{2n(\sqrt{1+1/n}+1)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)<\frac{n+1}{4n},$$

由此可见

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}.$$ □

注意

这也是问题 3.2 的第 1 题的特殊情形.

1.

证明 方便起见，令 $x_0=0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_2-x_0)+(x_4-x_2)+\cdots+(x_{2n}-x_{2n-2})}{n}=\lim_{n\to\infty}(x_{2n}-x_{2n-2})=0,$$

类似地也有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}/(2n-1)=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n/n=0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}-\frac{x_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n}=0.$$ □

2.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>0$ 使得当 $n>N_1$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$，也存在 $N_2>0$ 使得当 $n>N_2$ 时有

$$t_{nk}<\varepsilon\Big/\sum_{i=1}^{N_i}|a_i-a|$$

现在取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，那么当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-a|\leqslant\sum_{k=1}^{N_1}t_{nk}|a_k-a|+\sum_{k=N_1+1}^{n}t_{nk}|a_k-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. □

3.

证明 利用特普利茨定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)/2}{n^2}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)/2}=\frac{a}{2}.$$ □

4.

证明 在特普利茨定理中取 $t_{nk}=\dbinom{n}{k}\Big/2^n$ 即可. □

1.4 数列极限概念的推广

1.

证明 这是因为当 $n>10000$ 时 $p(n)>n$，当 $n<-10000$ 时 $p(n)<n$. □

2.

证明 这是因为 $(1+2+3+\cdots+n)/n=(n+1)/2$. □

3.

证明 这是因为 $(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)/n^2=(1+1/n)(2n+1)/6$. □

4.

证明 注意到 $n(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=-n/(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$. □

5.

证明 这是因为

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{n+n}}.$$

□

1.

证明 这是因为

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}>a_n^2+2>a_{n-1}^2+4>a_1^2+2n.$$ □

2.

证明 因为存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有 $(a_{n+1}+a_{n+2})/a_n>4$，或者 $a_{n+1}+a_{n+2}>4a_n$，所以 a_{n+1} 和 a_{n+2} 中至少有一个大于 $2a_n$，于是 $N+1,N+2,\ldots,N+2m$ 中至少有一个数 $N+i_m$ 使得 $a_{N+i_m}>2^m a_N$，由此可见 $\{a_n\}$ 是无界的. □

1.5 单调数列

1.

证明 (1) 这是因为当 $n>10$ 时 $\{x_n\}$ 是递减的且 $\{x_n\}$ 是正数列.
(2) 这是因为 $\{x_n\}$ 递减且 $\{x_n\}$ 是正数列. □

2.

证明 首先显然有 $x_1<x_2<2$. 设 $f(x)=\sqrt{2+x}$，那么 $x_{n-1}<x_n<2$ 蕴含着 $f(x_{n-1})<f(x_n)<f(2)$，亦即 $x_n<x_{n+1}<2$. 因此普遍有 $x_n<x_{n+1}<2$. 有单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. □

3.

证明 不妨只讨论递增时的情形．设递增的数列 $\{a_n\}$ 有一个收敛于 a 的子列 $\{a_{n_k}\}$，那么对任意的 $\varepsilon>0$ 都存在 $K\geqslant 0$ 使得当 $k>K$ 时有

$$0<a-a_{n_k}<\varepsilon,$$

而对于 $n>n_K$ 总存在 $k_1,k_2>K$ 使得 $n_{k_1}<n<n_{k_2}$，于是

$$0<a-a_{n_{k_2}}<a-a_n<a-a_{n_{k_1}}<\varepsilon,$$

因此 $\{a_n\}$ 也收敛于 a． □

4.

证明 因为

$$(1-a_n)a_{n+1}>\frac{1}{4}\geqslant(1-a_n)a_n,$$

所以 $\{a_n\}$ 是严格递增的，进而有极限，设为 a．那么有 $(1-a)a\geqslant 1/4$，所以 $a=1/2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$． □

5.

证明 要证 $((n+1)!)^{1/(n+1)}>(n!)^{1/n}$ 只要证

$$\frac{\ln(n+1)!}{n+1}>\frac{\ln n!}{n},$$

只要证

$$\frac{\ln(n+1)!}{\ln n!}>\frac{n+1}{n},$$

只要证

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n!}>\frac{1}{n},$$

只要证

$$n\ln(n+1)>\ln n!,$$

而这是显然的．因此 $\{a_n\}$ 是递增数列． □

6.

证明 因为

$$x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2}<x_n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

所以 $\{x_n+1/(n-1)\}$ 是递减的，又因为它有下界 0，所以 $\{x_n+1/(n-1)\}$ 收敛．由于 $\{1/(n-1)\}$ 收敛，所以 $\{x_n\}$ 也收敛． □

1.

证明 当 $c>1$ 时

$$a_{n+1}=\frac{c+a_n^2}{2}\geqslant\sqrt{c}a_n\geqslant c^{n/2}a_0\to\infty\ (n\to\infty).$$

当 $0<c\leqslant 1$ 时，可以验证 $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 1-\sqrt{1-c}$. 记 $f(x)=c/2+x^2/2$，那么 $0\leqslant a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 1-\sqrt{1-c}$ 蕴含着

$$f(0)\leqslant f(a_{n-1})\leqslant f(a_n)\leqslant f(1-\sqrt{1-c}),$$

亦即 $0\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 1-\sqrt{1-c}$. 因此普遍有 $a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 1-\sqrt{1-c}$，从而由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 收敛. 设其极限为 A，那么 $A=c/2+A^2/2$，因此

$$A=1-\sqrt{1-c}=\lim_{n\to\infty}a_n. \qquad \square$$

2.

证明 令 $v_n=u_n-a$，那么 $v_1=b-a$ 而 $v_{n+1}=v_n^2+v_n$. 易见 $\{v_n\}$ 若收敛则必收敛到 0，于是由 $\{v_n\}$ 递增知 $v_n\leqslant 0$，从而由 $v_2=v_1^2+v_1\leqslant 0$ 得到 $-1\leqslant b-a\leqslant 0$.

当 $-1\leqslant b-a=v_1\leqslant 0$ 时，因为 $-1\leqslant v_n\leqslant 0$ 蕴含着 $-1\leqslant v_n^2+v_n=v_{n+1}\leqslant 0$，所以普遍有 $-1\leqslant v_n\leqslant 0$. 于是由单调有界原理知 $\{v_n\}$ 收敛.

因此当 $-1\leqslant b-a\leqslant 0$ 时 $\{v_n\}$ 收敛，也即 $\{u_n\}$ 收敛，且 $\{u_n\}$ 的极限是 a. $\square$

3.

证明 设 $f(x)=x(2-Ax)$，那么 $f(x)$ 在 $[0,1/A]$ 上是递增的，所以 $f(0)<f(y_0)<f(1/A)$，即 $0<y_1<1/A$. 又

$$y_1=y_0+y_0(1-Ay_0)>y_0,$$

所以 $0<y_0<y_1<1/A$. 另一方面，由于 $0<y_{n-1}<y_n<1/A$ 蕴含着

$$f(0)<f(y_{n-1})<f(y_n)<f(1/A),$$

亦即 $0<y_n<y_{n+1}<1/A$，所以普遍有 $0<y_n<y_{n+1}<1/A$，于是根据单调有界原理知 $\{y_n\}$ 收敛. 设其极限为 Y，那么有 $Y=Y(2-AY)$. 显然 $Y\neq 0$，所以 $Y=1/A=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. $\square$

4.

证明 因为

$$\frac{a_n}{(-3)^n}=\frac{2^{n-1}}{(-3)^n}+\frac{a_{n-1}}{(-3)^{n-1}}=\frac{2^{n-1}}{(-3)^n}+\cdots+\frac{2^1}{(-3)^2}+\frac{2^0}{(-3)^1}+a_0=\frac{(-2/3)^n}{5}+a_0-\frac{1}{5},$$

所以 $a_n=2^n/5+(-3)^n(a_0-1/5)$. 于是显然只有当 $a_0=1/5$ 时 $\{a_n\}$ 是严格递增的. $\square$

1.6　自然对数的底 e

1.

答　(1) e.

(2) 1/e.

(3) 1/e.

(4) e^3.

(5) e^2. □

2.

证明　与本节正文的最后一式类似地，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+k-2}\right)^n\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)^{n+k-1}\left(1+\frac{1}{n+k-2}\right)^{n+k-2}\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1}{n+k-2}\right)^{k-2}\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^k.$$ □

3.

证明　事实上根据均值不等式有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$ □

4.

证明　这是因为根据均值不等式有

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<\left(\frac{1+(n+1)n/(n+1)}{n+2}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$ □

5.

证明　根据第 3 题和第 4 题我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$ □

6.

证明 对第5题取对数即得. □

7.

证明 利用

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = 1\times\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n(1+k/n)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}$$

和

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+k} = 1\times\left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+k} < \left(\frac{1+(n+k)n/(n+k)}{n+k+1}\right)^{n+k+1} = \left(\frac{n+1}{n+k+1}\right)^{n+k+1}$$

可得

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \mathrm{e}^k < \left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+k},$$

于是取对数后就得到

$$\frac{k}{n+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}.$$ □

8.

证明 在第6题中取 $n=1,2,\dots$ 相加即可. □

9.

证明 因为 $x_n - x_{n-1} = 1/n - \ln(1+1/n) > 0$，所以 $\{x_n\}$ 是递增的. 又

$$x_n < 1+\frac{1}{2}+\cdots+1n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} < 1,$$

所以根据单调有界原理知 $\{x_n\}$ 是收敛的. □

10.

证明 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)-\gamma+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0.$$ □

11.

证明 要证

$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1},$$

只要证

$$n(\ln(n+1)-1) < \ln n! < 1+(n+1)(\ln(n+1)-1),$$

只要证

$$n\ln(n+1) < n+\ln n! < (n+1)\ln(n+1),$$

只要证

$$n\ln(n+1)-(n-1)\ln n < 1+\ln n < (n+1)\ln(n+1)-n\ln n,$$

只要证

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

而这在第 6 题中已经证明了. □

12.

证明 除了直接利用第 11 题外，我们还可以利用练习题 1.3 的第 7 题，得到

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n!)^{1/n}},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n}/n = 1/\mathrm{e}$. □

13.

证明 这是因为

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!} < \mathrm{e} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}.$$ □

14.

解 根据第 13 题,

$$\lim_{n\to\infty}(n!\mathrm{e}-\lfloor n!\mathrm{e}\rfloor) = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{n}-\left\lfloor\frac{\theta_n}{n}\right\rfloor = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{n} = 0.$$ □

15.

证明 根据第 10 题,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+n}\right) = \ln 2n+\gamma+\varepsilon_{2n}-(\ln n+\gamma+\varepsilon_n) = \ln 2.$$ □

16.

证明 显然 $\{x_n\}$ 是递增的. 又因为

$$\ln x_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1,$$

所以根据单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. □

1.

证明 一方面,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},$$

另一方面，根据练习题1.1的第11题，我们有

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) > -\frac{1+2+\cdots+k}{n} = -\frac{k(k+1)/2}{n},$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)/2}{k!n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{\mathrm{e}}{2n} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{2n}.$$ □

2.

证明 事实上

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n &= \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} - \ln 2\sqrt{n} - \frac{\gamma}{2} \\ &= \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n} - \ln 2n - \gamma - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n - \gamma) = 0.\end{aligned}$$ □

3.

证明 因为

$$\frac{k}{n^2+n} \leqslant \frac{k}{n^2+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2},$$

所以

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{n+1}{2n},$$

由此可见

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}.\qquad\square$$

4.

证明　因为

$$H_{k_n}-\frac{1}{k_n}=H_{k_n-1}<n\leqslant H_{k_n},$$

所以

$$n\leqslant H_{k_n}<n+\frac{1}{k_n}.$$

同样地也有

$$n+1\leqslant H_{k_{n+1}}<n+1+\frac{1}{k_{n+1}},$$

因此

$$1-\frac{1}{k_n}<H_{k_{n+1}}-H_{k_n}<1+\frac{1}{k_{n+1}}.$$

由此可见

$$1=\lim_{n\to\infty}H_{k_{n+1}}-H_{k_n}=\lim_{n\to\infty}\ln k_{n+1}+\gamma+\varepsilon_{k_{n+1}}-(\ln k_n+\gamma+\varepsilon_{k_n})=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{k_{n+1}}{k_n},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}k_{n+1}/k_n=\mathrm{e}$. □

5.

证明　一方面，

$$\begin{aligned}S_n&\leqslant n^n+(n-1)^{n-1}+(n-2)(n-2)^{n-2}\\&<n^n+2(n-1)^{n-1}=n^n\left(1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\frac{2}{n-1}\right)<n^n\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}(n-1)}\right),\end{aligned}$$

另一方面，

$$S_n\geqslant n^n+(n-1)^{n-1}=n^n\left(1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n-1}\right)>n^n\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right).\qquad\square$$

1.7　基本列和柯西收敛原理

1.

答　是，因为对于 $\varepsilon/2>0$，也存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $|a_n-a_N|<\varepsilon/2$，从而当 $m,n>N$ 时有

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a_N|+|a_n-a_N|<\varepsilon.\qquad\square$$

2.

答 (1) 不一定. 比如取 $a_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$，那么 $|a_{n+p} - a_n| \leqslant p/n$ 总是成立的，但是 $\{a_n\}$ 发散，从而不是基本列.

(2) 是基本列，因为对任意的 ε，只要取 $N = 1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil$，那么当 $n > N$ 时就有

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leqslant \frac{1}{(n+p-1)^2} + \frac{1}{(n+p-2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&\leqslant \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)} + \frac{1}{(n+p-2)(n+p-3)} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n-1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

3.

证明 (1) 对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$，那么当 $n > N$ 时就有

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leqslant \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{1}{(n+p-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leqslant \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} + \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)n} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

从而 $\{a_n\}$ 是基本列，进而收敛.

(2) 设 $|a_n| < M$. 那么对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \lceil \log_{|q|}((1-q)\varepsilon/M) \rceil - 1$，那么当 $n > N$ 时就有

$$|b_{n+p} - b_n| \leqslant M|q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p}| < \frac{M|q|^{n+1}}{1-q} < \varepsilon,$$

从而 $\{b_n\}$ 是基本列，进而收敛.

(3) 对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$，那么当 $n > N$ 时就有

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leqslant \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{1}{(n+p-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leqslant \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} + \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)n} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

从而 $\{a_n\}$ 是基本列，进而收敛.

(4) 对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$，那么当 $n > N$ 时就有

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} + \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

从而 $\{a_n\}$ 是基本列，进而收敛. □

4.

证明 记

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|,$$

那么显然 $\{A_n\}$ 是递增的，又由其有界知它是收敛的，从而是基本列，进而对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时对任意的 $p > 0$ 都有

$$\varepsilon > |A_{n+p} - A_n| \geqslant |a_{n+p} - a_n|,$$

于是可见 $\{a_n\}$ 也是基本列，所以收敛. □

5.

答 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对无论多么大的正整数 N 都存在 $m, n > N$ 使得 $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon_0$. □

6.

证明 由列紧性定理知 $\{a_n\}$ 有一个收敛子列，其极限设为 a. 因为 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限，所以存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对每个 $j > 0$ 都存在 $k_j > 0$ 使 $|a_{k_j} - a| \geqslant \varepsilon_0$. 不妨让 $k_{j+1} > k_j$，那么从子列 $\{a_{k_j}\}$ 中又可以取出一个收敛子列，它当然也是 $\{a_n\}$ 的子列，且显然不以 a 为极限. □

1.8 上确界和下确界

1.

答 (1) 上确界是 12，下确界是 -1.
(2) 上确界是 1，下确界是 0.
(3) 上确界是 $+\infty$，下确界是 1.
(4) 上确界是 1，下确界是 0.
(5) 上确界是 3，下确界是 -1.
(6) 上确界是 e，下确界是 1/e. □

2.

答 前者的上下确界分别是 e 和 2，后者的上下确界分别是 4 和 e. □

3.

答 上确界是 $\sqrt[3]{3}$，下确界是 1. $\square$

4.

证明 假设 $\{a_n\}$ 收敛到某个数 a，那么存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有

$$a-|a_1-a|<a_n<a+|a_1-a|.$$

由此可见，如果 $a_1\geqslant a$，那么 $\max\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$ 就是 $\{a_n\}$ 的最大值，如果 $a_1<a$，那么 $\min\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$ 就是 $\{a_n\}$ 的最小值，从而总是有矛盾！因此 $\{a_n\}$ 发散. $\square$

5.

证明 设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，它落在闭区间 $[a,b]$ 中. 那么 $[a,(a+b)/2]$ 和 $[(a+b)/2,b]$ 中至少有一个中有 $\{x_n\}$ 中的无限多项，把这个区间记为 $[a_1,b_1]$，并在 $[a_1,b_1]$ 中任取 $\{x_n\}$ 中的一项，记为 x_{k_1}. 同样地，$[a_1,(a_1+b_1)/2]$ 和 $[(a_1+b_1)/2,b_1]$ 中至少有一个中有 $\{x_n\}$ 中的无限多项，把这个区间记为 $[a_2,b_2]$，并在 $[a_2,b_2]$ 任取 $\{x_n\}$ 中异于 x_{k_1} 的一项，记为 x_{k_2}. 一般地，$[a_{n-1},(a_{n-1}+b_{n-1})/2]$ 和 $[(a_{n-1}+b_{n-1})/2,b_{n-1}]$ 中至少有一个中有 $\{x_n\}$ 中的无限多项，把这个区间记为 $[a_n,b_n]$，并在 $[a_n,b_n]$ 任取一个 $\{x_n\}$ 异于 $x_{k_1},x_{k_2},\ldots,x_{k_{n-1}}$ 的一项，记为 x_{k_n}. 这样我们得到了一列闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，且当 $n\to\infty$ 时 $b_n-a_n=(b-a)/2^n\to 0$，于是根据闭区间套定理，存在唯一的一点 ξ，它属于每个闭区间 $[a_n,b_n]$. 从而 $|x_{k_n}-\xi|<|b-a|/2^n\to 0$，因此 $\{x_{k_n}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列. $\square$

1.9 有限覆盖定理

1.

证明 假设不存在这样的数 σ，那么对每个 $n\in\mathbb{N}^+$ 都存在 $A_n\subset[a,b]$，虽然满足 $|A_n|<1/n$，但是不能被 $\{I_\lambda\}$ 中的任何一个区间覆盖. 现在从每个 A_n 中任意取出一点 x_n，那么数列 $\{x_n\}$ 有一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，其极限设为 ξ. 因为 $\{I_\lambda\}$ 覆盖 $[a,b]\ni\xi$，所以存在一个开区间 $I_\xi\ni\xi$，进而存在 $\delta>0$ 使得 $(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset I_\xi$. 又存在 $K>0$ 使得当 $k>K$ 时有 $A_{n_k}\ni x_{n_k}\in(\xi-\delta/2,\xi+\delta/2)$，于是当 $k>K$ 且 $n_k>\lceil 2/\delta\rceil$ 时有

$$A_{n_k}\subset(\xi-\delta/2,\xi+\delta/2)\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset I_\xi,$$

这与 A_{n_k} 的取法矛盾！因此这样的数 σ 是存在的. $\square$

2.

证明 设 $\mathscr{J}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，把 $\mathscr{J}$ 的勒贝格数记为 σ，取 $N=\lceil 1/\sigma\rceil+1$，并对闭区间 $[a,b]$ 作 N 等分，得到长度小于 σ 的闭区间 $A_1,A_2,\ldots,A_N$，于是对每个 A_i 都存在 $I_i\in\mathscr{J}$ 使得 $A_i\subset I_i$，因此 $\{I_1,I_2,\ldots,I_N\}$ 就是 $[a,b]$ 在 $\mathscr{J}$ 中的有限子覆盖. $\square$

1.10　上极限和下极限

1.

答　(1) 上极限是 1，下极限是 0.
(2) 上极限是 $+\infty$，下极限是 0.
(3) 上极限是 $\pi/2$，下极限是 0.
(4) 上极限是 2，下极限是 1.
(5) 上极限是 $+\infty$，下极限是 $-\infty$.
(6) 上极限是 1，下极限是 $-1/2$.
(7) 下极限和下极限都是 0.　□

2.

证明　(1) 第一式是因为

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + b = \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n + b,$$

第二式是因为

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n + b = \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n + b.$$

(2) 第一式是因为

$$0 = \varliminf_{n\to\infty}(a_n - a_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty}(-a_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(a_n - a_n) = 0,$$

在第一式中用 $-a_n$ 代替 a_n 就得到第二式.

(3) 因为当 $k \geqslant n$ 时有

$$\inf_{k\geqslant n} a_k \leqslant a_k,\ \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant b_k,$$

所以也有

$$\inf_{k\geqslant n} a_k \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant a_k b_k \leqslant a_k \sup_{k\geqslant n} b_k,$$

进而

$$\inf_{k\geqslant n} a_k \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant \inf_{k\geqslant n} a_k b_k \leqslant \inf_{k\geqslant n} a_k \sup_{k\geqslant n} b_k,$$

令 $n\to\infty$ 就得到

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

类似地，由

$$\sup_{k\geqslant n} a_k \sup_{k\geqslant n} b_k \geqslant a_k b_k \geqslant b_k \inf_{k\geqslant n} a_k$$

得到

$$\sup_{k\geqslant n} a_k \sup_{k\geqslant n} b_k \geqslant \sup_{k\geqslant n} a_k b_k \geqslant \inf_{k\geqslant n} a_k \sup_{k\geqslant n} b_k,$$

所以

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \varlimsup_{n\to\infty} b_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n b_n \geqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

(4) 我们只证明第一式．如果 $b=0$，那么只有在 $\{a_n\}$ 有界的时候 $b\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ 才有意义，从而 $\{a_nb_n\}$ 也是无穷小量，进而

$$\varliminf_{n\to\infty} a_nb_n = 0 = b\varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

如果 $b>0$，那么当 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ 时等式显然成立．而当 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ 是有限数 a 时，$\{a_n\}$ 有一个收敛于 a 的子列 $\{a_{k_n}\}$，于是

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k}b_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \lim_{n\to\infty} b_{n_k} = ab.$$

假设 $\{a_nb_n\}$ 还有一个聚点 $c<ab$，那么 $\{a_nb_n\}$ 有一个收敛于 c 的子列 $\{a_{j_n}b_{j_n}\}$，于是

$$a = \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} a_{j_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_{j_n}b_{j_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} b_{j_n}} = \frac{c}{b} < a,$$

矛盾！因此 ab 就是 $\{a_nb_n\}$ 的聚点全体的下确界，所以

$$\varliminf_{n\to\infty} a_nb_n = ab = b\varliminf_{n\to\infty} a_n. \qquad \square$$

3.

证明 当 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$ 时，记 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$．取 $\varepsilon = (l-\alpha)/2$，那么存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时 $\sqrt[n]{a_n} < \alpha+\varepsilon$，或者 $a_n < (\alpha+\varepsilon)^n$，于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{l^n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha+\varepsilon}{l}\right)^n = 0,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/l^n = 0$．

当对任意的 $l>1$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/l^n = 0$ 时，假设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$．如果 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 是有限数 α，就取 $l=(\alpha+1)/2$，如果 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$，就取 $l=2$．那么对任意 $N>0$ 都存在 $n>N$ 使得 $\sqrt[n]{a_n} > l$，或者 $a_n/l^n > 1$．这与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/l^n = 0$ 矛盾！因此 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$． $\square$

1.

证明　如果 $l=L$，那么没什么好说的．如果 $l<L$，我们来证明任意的 $a\in(l,L)$ 都是 $\{x_n\}$ 的极限点．

对任意的 $\varepsilon>0$（不妨限定 $\varepsilon<\min\{a-l,L-a\}/2$），存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon/2$．因为 $l=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 而 $L=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$，所以存在 $N_1>N$ 和 $N_2>N_1$ 使得 $x_{N_1}<l+\varepsilon<a<L-\varepsilon<x_{N_2}$．取

$$N_3=\min\{n\colon x_n\geqslant a,\ N_1\leqslant n\leqslant N_2\},$$

那么 $x_{N_3-1}<a\leqslant x_{N_3}$．又因为 $|x_{N_3}-x_{N_3-1}|<\varepsilon/2$，所以

$$a-\varepsilon<x_{N_3-1}<a\leqslant x_{N_3}<a+\varepsilon.$$

至此我们证明了 a 的任意邻域中都有 $\{x_n\}$ 的项，因此 a 是 $\{x_n\}$ 的极限点，进而 $\{x_n\}$ 的极限点充满区间 $[l,L]$． □

2.

证明　若不然，存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $n((1+a_{n+1})/a_n-1)<1$，或者

$$\frac{1}{n+1}<\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1},$$

从而

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+p}<\frac{a_N}{N}-\frac{a_{N+p}}{N+p}<\frac{a_N}{N}.$$

当 $p\to\infty$ 时上式左边是一个无穷大量而右边是一个有限数，矛盾！ □

1.11　斯托尔兹定理

1.

答　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/2+\cdots+1/n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{\ln n-\ln(n-1)}=1$．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/3+\cdots+1/(2n-1)}{\ln 2\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/(2n-1)}{\ln 2\sqrt{n}-\ln 2\sqrt{n-1}}=1$．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/\sqrt{2}+\cdots+1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=2$．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-(n-1)\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(n+\sqrt{n}\sqrt{n-1}+(n-1))}=\dfrac{1}{3}$． □

2.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n-\ln(n-1)}{2}=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=1$. □

3.

解 使用斯托尔兹定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{n^3-(n-1)^3}=\frac{4}{3}.$$

□

注意

事实上 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=n(4n^3-1)/3$.

4.

证明 使用斯托尔兹定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\frac{a}{2}.$$ □

5.

答 取 $a_n=1-(-1)^n$, $b_n=n$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n/b_n=0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}2(-1)^{n-1}$$

是不存在的. □

6.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon,$$

或者

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A-\varepsilon)(b_n+b_{n-1}),$$

从而对 $m,n>N$ 有

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_m)<a_n-a_m<(A-\varepsilon)(b_n+b_m),$$

也即

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m}<A+\varepsilon.$$

因此

$$A-\varepsilon\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m}=\frac{a_n}{b_n}=\varlimsup_{m\to\infty}\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m}\leqslant A+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n/b_n=A$. □

1.

证明 因为 $0<x_n<1/q$ 蕴含了 $0<x_{n+1}<1/q$ 而 $0<x_1<1/q$，所以普遍有 $0<x_n<1/q$. 又 $x_{n+1}-x_n=-qx_n^2<0$，所以根据单调有界原理知 $\{x_n\}$ 收敛. 设其极限是 A，那么有 $A=A(1-qA)$，所以 $A=0$，从而 $\{1/x_n\}$ 是严格递增是无穷大量. 根据斯托尔兹定理，

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/(x_n(1-qx_n))-1/x_n}=\frac{1}{q}.$$ □

2.

证明 记 $S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$. 假设 $\{S_n\}$ 收敛，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nS_n=0$，矛盾！因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，进而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_nS_n\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=0.$$

根据斯托尔兹定理，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}na_n^3&=\lim_{n\to\infty}(a_nS_n)^3\frac{n}{S_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n^3-S_{n-1}^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(S_n-S_{n-1})(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2(S_n^2+S_n(S_n-a_n^2)+(S_n-a_n^2)^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3(a_nS_n)^2-3a_n^3\cdot a_nS_n+a_n^6}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$. □

3.

解 利用斯托尔兹定理，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln n!-2(\ln 0!+\ln 1!+\cdots+\ln n!)}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\ln(n+1)!-(n+1)\ln n!-2\ln n!}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(1+1/n)}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ □

4.

证明

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k-b_{k-1}}{b_n}\frac{a_k-a_{k-1}}{b_k-b_{k-1}},$$

其中 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是斯托尔兹定理所要求的，而 $a_0=b_0=0$．于是由特普利茨定理马上得到当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})/(b_n-b_{n-1})$ 存在时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

□

第二章　函数的连续性

2.1　集合的映射

1.

证明　这是因为 $a=f(f(a))=f(b)$ 而 $c=f(f(c))=f(d)$.　□

2.

答　$f^n(a)=a$.　□

3.

答　(1) $D\circ D=1$.
(2) $D^{-1}(\{0\})=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，$D^{-1}(\{1\})=\mathbb{Q}$，$D^{-1}(\{0,1\})=\mathbb{R}$.　□

4.

答　(1) 因为 f 是单设，所以 $f(A)$ 中有 n 个元素．又因为 $f(A)\subset A$，所以 $f(A)=A$.
(2) 因为 f 也是满射，从而是双射，进而 f^{-1} 存在.
(3) $n!$ 个.　□

5.

证明　设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，那么取

$$f(x)=\begin{cases}a_2, & x=a_1\\ a_1, & x=a_2\\ x, & x=a_3,\ldots,a_n\end{cases}$$

即可.　□

2.2 集合的势

1.

证明 把全体有理数排成一列，记为 $\{r_n\}$，那么全体有理点可以按下面的阵列中箭头所指的方式排成一列.

$$\begin{array}{cccccccc}
(r_1,r_1) & & (r_1,r_2) & \rightarrow & (r_1,r_3) & & (r_1,r_4) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
(r_2,r_1) & & (r_2,r_2) & & (r_2,r_3) & & (r_2,r_4) & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(r_3,r_1) & & (r_3,r_2) & & (r_3,r_3) & & (r_3,r_4) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
(r_4,r_1) & & (r_4,r_2) & & (r_4,r_3) & & (r_4,r_4) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

□

2.

证明 用 $\mathcal{P}_n$ 表示 n 次整系数多项式的全体，那么易见 $\mathcal{P}_n \sim (\mathbb{Z}\setminus\{0\})\times\mathbb{Z}^{n-1}$，从而 $\mathcal{P}_n$ 是可数的. 由于多项式的根总是有限个的，所以 n 次代数数的全体

$$\bigcup_{f\in\mathcal{P}_n} f^{-1}(\{0\})$$

是可数的，进而代数数的全体

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{f\in\mathcal{P}_n} f^{-1}(\{0\})$$

是可数集. □

注意

代数数的全体是可数集蕴含了超越数是存在的.

3.

证明 因为从 A 中的每个区间中都可以取出一个有理数，所以 A 是至多可数的. □

4.

证明 这是因为 $S \setminus \{(0,0,0,\dots)\}$ 中的元素 $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ 可以与 $(0,1]$ 中的元素

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \ddots}}}$$

构成一一对应. □

5.

证明 题干已经帮我们证明完了. □

6.

证明 假设可数直线族 $\mathscr{L}$ 覆盖了整个平面，那么 $\mathscr{L}$ 也覆盖了平面上的任意一条直线. 任取 $l \notin \mathscr{L}$，那么 l 与 $\mathscr{L}$ 中直线的交点全体是一个至多可数集，这与 l 被 $\mathscr{L}$ 覆盖矛盾！ □

2.3 函数

1.

答 (1) $\{x\colon -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.
(2) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
(3) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.
(4) $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. □

2.

证明 设 x_0 是 $f \circ f$ 的唯一不动点，那么 $f(f(x_0)) = x_0$，从而 $f(f(f(x_0))) = f(x_0)$，进而 $f(x_0)$ 也是 $f \circ f$ 的不动点，因此 $f(x_0) = x_0$. 而 f 的不动点也是 $f \circ f$ 的不动点，所以 x_0 也是 f 的唯一不动点. □

3.

证明 因为 $f(f(a)) = a$, 所以 $f(f(f(a))) = f(a)$, 从而 $f(a)$ 也是 f 的不动点. 如果 $f(a) = b$, 那么 $f(b) = f(f(a)) = a$. 如果 $f(a) = a$，那么 $f(b) = b$，因为 $f(b) = a$ 蕴含着 $f(a) = f(f(b)) = b$. □

4.

证明 (1) 有不可数个这样的函数，因为 $f(x)=c-x$ 都是这样的函数.

(2) 对每个 $x\in\mathbb{R}$，如果 $f(x)<x$，那么 $x=f(f(x))\leqslant f(x)$，矛盾！同样 $f(x)>x$ 也会导出矛盾. 所以 $f(x)=x$. 因此这样的函数只有一个. □

5.

答 (1) $f^n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

(2) $f^n(x)=\dfrac{x}{1+nbx}$. □

6.

证明 设有理数 $x=m/n$. 因为

$$f(1)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以 $f(1/n)=f(1)/n$，进而

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{m-1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{m-2}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}f(1).$$ □

7.

证明 对任意的 $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$|x|$ 都是 f 的周期，所以 $f(x)=f(0)$，因此 f 是常值函数. □

8.

证明 假设 $\sin x^2$ 是一个周期函数，周期设为 T，那么有

$$\sin x^2=\sin(x+T)^2=\sin(x^2+2xT+T^2),$$

所以 $2xT+T^2=2k\pi$ 对一切的 x 都成立，而这是不可能的！因此 $\sin x^2$ 不是周期函数.

假设 $\sin x+\cos\sqrt{2}x$ 是周期函数，周期设为 T，那么有

$$\sin x+\cos\sqrt{2}x=\sin(x+T)+\cos\sqrt{2}(x+T),$$

或者

$$\sin(x+T)-\sin x=\cos\sqrt{2}x-\cos\sqrt{2}(x+T).$$

和差化积得到

$$\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)\sin\frac{T}{2}=-\sin\left(\sqrt{2}x+\frac{T}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{T}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\frac{\sin(T/2)}{\sin(T/\sqrt{2})}=-\frac{-\sin(\sqrt{2}x+T/\sqrt{2})}{\cos(x+T/2)}.$$

而上式右边显然不是常值函数，矛盾！因此 $\sin x+\cos\sqrt{2}x$ 不是周期函数. □

9.

证明 注意到

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}. \qquad \square$$

10.

证明 略. $\square$

11.

答 $y=\sinh x$ 的反函数是 $y=\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $y=\cosh x$ 的反函数是 $y=\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. $\square$

注意

反双曲三角函数的前缀 ar 取自英文 area 而不是 arc.

1.

证明 取 $a=k^{1/T}$, 那么不难看出 $f(x)/a^x$ 是一个周期为 T 的的函数. $\square$

2.

证明 (1) 因为 $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$ 蕴含着

$$f(b+x)=f(a+(x+b-a))=f(a-(x+b-a))=f(b-(x-2a+2b))=f(b+(x-2a+2b)).$$

(2) 条件可以写成

$$f(a+x)=f(a-x),\ f(b+x)+f(b-x)=2y_0,$$

或者

$$f(2a-x)=f(x),\ f(2b-x)+f(x)=2y_0,$$

所以

$$\begin{aligned}f(x+4(b-a))&=2y_0-f(2b-(x+4(b-a)))=-f(4a-x-2b)+2y_0=-f(x+2b-2a)+2y_0\\&=-(-f(2a-x)+2y_0)+2y_0=f(2a-x)=f(x).\end{aligned}$$

(3) 条件可以写成

$$f(a+x)+f(a-x)=2y_0,\ f(b+x)+f(b-x)=2y_1,$$

或者

$$f(2a-x)+f(x)=2y_0,\ f(2b-x)+f(x)=2y_1,$$

于是

$$\begin{aligned} f(x+4(b-a)) &= -f(4a-x-2b)+2y_1=-(-f(x+2b-2a)+2y_0)+2y_1 \\ &= f(x+2b-2a)+2(y_1-y_0)=-f(2a-x)+2y_1+2(y_1-y_0)=f(x)+4(y_1-y_0). \end{aligned}$$

取 $c=(y_1-y_0)/(b-a)$，那么 $\varphi(x)=f(x)-cx$ 就是周期为 $4(b-a)$ 的函数. □

2.4　函数的极限

1.

证明　对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-1|<\varepsilon$. □

2.

证明　略. □

3.

证明　略. □

4.

证明　略. □

5.

答　(1) $f(2^+)=4$，$f(2^-)=-2a$.
(2) $a=-2$. □

6.

证明　对于 $\varepsilon=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-a)/2$，存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$f(x)>\lim_{x\to x_0}f(x)-\varepsilon>a.$$ □

7.

证明　对于 $\varepsilon=(f(x_0^-)+f(x_0^+))/2$，存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 而 $y\in(x_0,x_0+\delta)$ 时有

$$f(x)<f(x_0^-)+\varepsilon=f(x_0^+)-\varepsilon<f(y).$$ □

8.

证明 因为 f 是递增的，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$A-\varepsilon<f(x_n)\leqslant A.$$

于是当 $x_N<x<x_0$ 时就有

$$A\geqslant f(x)\geqslant f(x_N)>A-\varepsilon,$$

因此 $f(x_0^-)=A$. □

9.

证明 存在 $\varepsilon_0>0$，使得对无论多么小的正数 δ，都存在 x，虽然它满足 $0<|x-x_0|<\delta$，但是 $|f(x)-l|\geqslant\varepsilon_0$. □

10.

解 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\lceil 1/\varepsilon\rceil$，那么存在 $\delta>0$ 使得

$$((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})\cap\bigcup_{n=1}^{N}A_n=\varnothing,$$

于是当 $n>N$ 时就有 $|f(x)|\leqslant 1/N<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(0)$. □

11.

答 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1+x-x^3}{1+x^2}=-1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{m-1}+\cdots+x+1)=m$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m-1}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+\cdots+x+1}=\dfrac{m}{n}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/m}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+x)^{(m-1)/m}+\cdots+(1+x)^{1/m}+1}=\dfrac{1}{m}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1+(x^2-1)+\cdots+(x^m-1)}{x-1}=1+2+\cdots+m=\dfrac{1}{2}m(m+1)$. □

12.

答 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2\sin^2(x/2)}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sin x}{\sin x}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=1$.

(5) $\lim\limits_{h\to0}\sin(x+h)=\lim\limits_{h\to0}\sin x\cos h+\cos x\sin h=\sin x$.

(6) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}=\cos x$.

(7) 注意到

$$\begin{aligned}&1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx\\=&1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cdots+\cos x\cos 2x\cdots\cos(n-1)x(1-\cos nx),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}=\lim_{x\to0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos kn}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2}=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1).$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\dfrac{\sin x}{x}$. □

13.

答 (1) 由 $1/x\leqslant\lfloor 1/x\rfloor<1/x+1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}x\lfloor 1/x\rfloor=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\lfloor x\rfloor^2-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2^2-4}{x^2-4}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\lfloor x\rfloor^2+4}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1^2+4}{x^2+4}=\dfrac{5}{8}$.

(4) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\lfloor 4x\rfloor}{1+x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3}{1+x}=\dfrac{3}{2}$. □

14.

证明 注意到

$$\sin(2\pi n!\mathrm{e})=\sin\left(2\pi n!\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\right),$$

而

$$\frac{1}{(n+1)!}<\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!n},$$

所以当 n 足够大时

$$\sin\frac{2\pi}{n+1} < \sin(2\pi n!\mathrm{e}) < \sin\frac{2\pi}{n},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = 2\pi$. □

15.

证明 事实上这里并不满足定理2.4.8的条件，因为 g 在 0 的任意邻域内都能取到 0. □

16.

证明 对任意的 $M>0$，在 $(-\infty,+\infty)$ 中一点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 中，分母小于 $\lceil M\rceil$ 的既约分数只有有限个，所以存在 $x\in U(x_0)$ 使得 $f(x)\geqslant\lceil M\rceil\geqslant M$. 因此 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上每点的邻域内都无界. □

2.5 极限过程的其他形式

1.

证明 略. □

2.

答 (1) $a=1$，$b=-1$.
(2) $a=1$，$b=-1/2$.
(3) $a=-1$，$b=-1/2$. □

3.

证明 注意到

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1} = 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

即可. □

4.

证明 注意到

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\sin\sqrt{x+k} = \sum_{k=1}^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)(\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x+k+1})$$

并利用第3题即可. □

5.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$. □

6.

答 (1) e^{-2}.
(2) e^{2a}.
(3) e^{-2}.
(4) e^{2+x}. □

7.

证明 事实上

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}n^{x-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

于是不难直接看出 f 的定义域是 $(-\infty,1]$ 而

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \mathrm{e}, & x=1\end{cases}.$$ □

8.

证明 注意到

$$\left|\sum_{k=1}^n ka_k\right|=\lim_{x\to0}\left|\sum_{k=1}^n\frac{a_k\sin kx}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1.$$ □

9.

证明 这是因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x\to\pi^-/2}f(\tan x)$ 存在，然后利用定理 2.4.7 即可. □

10.

证明 设 f 的一个正周期是 T，那么由归结原则知

$$0=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x+nT)=f(x).$$ □

1.

证明 利用归结原则，

$$f(x)=f(2^nx)=\lim_{n\to\infty}f(2^nx)=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$ □

2.

证明 由 $f(0)=bf(0)$ 知 $f(0)=0$. 具体地设在 $(-\delta,\delta)$ 上有 $|f(x)|<M$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\lceil\log_b(M/\varepsilon)\rceil$, 那么当 $x\in(-\delta/a^N,\delta/a^N)$ 时就有

$$|f(x)|=\left|\frac{f(a^Nx)}{b^N}\right|<\frac{M}{b^N}<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0).$$ □

3.

证明 设 f 和 g 的周期分别是 T_1 和 T_2, 那么有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-(f(x+nT_1)-g(x+nT_1)))=\lim_{n\to\infty}g(x+nT_1)$$

以及

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}(g(x)+f(x+nT_2)-g(x+nT_2))=\lim_{x\to\infty}f(x+nT_2),$$

因此

$$f(x)-g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x+nT_1)-f(x+nT_2)=\lim_{n\to\infty}g(x+n(T_1+T_2))-f(x+n(T_1+T_2))=0,$$

亦即 $f=g$. □

4.

证明 (1) 若不然, 存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $\left(\dfrac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n<\mathrm{e}$, 或者

$$-1<n\ln\frac{x_n}{x_1+x_{n+1}}\leqslant n\left(\frac{x_n}{x_1+x_{n+1}}-1\right),$$

整理即

$$\frac{x_1}{n}<\frac{x_n}{n-1}-\frac{x_{n+1}}{n},$$

于是

$$\frac{x_1}{N}+\frac{x_1}{N+1}+\cdots+\frac{x_1}{N+p-1}<\frac{x_N}{N_1}-\frac{x_{N+p}}{N+p-1}<\frac{x_N}{N}.$$

当 $p\to\infty$ 时上是左边是无穷大量而右边是一个有限数矛盾! 因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geqslant\mathrm{e}.$$

(2) 特别地取 $x_n=n-1+\varepsilon$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\mathrm{e}^{1+\varepsilon}$. 令 $\varepsilon\to 0^+$ 便知 e 是最佳的. □

2.6　无穷小与无穷大

1.

答　(1) 1 阶无穷小.
(2) 10 阶无穷大.
(3) 3 阶无穷小.
(4) 因为 $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$，所以它是 2 阶无穷小.
(5) 2 阶无穷大.
(6) 1 阶无穷大.
(7) 1 阶无穷小.
(8) 1/6 阶无穷小.
(9) 1 阶无穷大.
(10) 1 阶无穷小.
(11) 1/2 阶无穷小.
(12) 3 阶无穷小.
(13) 1/2 阶无穷大.
(14) $n(n+1)/2$ 阶无穷大. □

2.

证明　(1) 设 $f=o(\alpha)$ 以及 $g=o(\alpha)$，那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f+g}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{f}{\alpha}+\lim_{x\to x_0}\frac{g}{\alpha}=0,$$

所以 $f+g=o(\alpha)$，进而 $o(\alpha)+o(\alpha)=o(\alpha)$.
(2) 设 $f=o(\alpha)$，那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{cf}{\alpha}=c\lim_{x\to x_0}\frac{f}{\alpha}=0,$$

所以 $cf=o(\alpha)$，进而 $o(c\alpha)=o(\alpha)$.
(3) 设 $f=o(\alpha)$，那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^k}{\alpha^k}=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f}{\alpha}\right)^k=0,$$

所以 $f^k=o(\alpha^k)$，进而 $(o(\alpha))^k=o(\alpha^k)$.
(4) 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1/(1+\alpha)-(1-\alpha)}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{1+\alpha}=0,$$

所以 $1/(1+\alpha)=1-\alpha+o(\alpha)$. □

3.

答 (1) 2.

(2) 1.

(3) 0.

(4) 1.

(5) $1/(2n)$. □

1.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(x/2))/x=0$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta$ 时

$$-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x/2)}{x}<\varepsilon,$$

或者

$$-\varepsilon x<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<\varepsilon x,$$

当然也有

$$-\frac{\varepsilon x}{2^k}<f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)<\frac{\varepsilon x}{2^k}.$$

取 $k=0,1,\ldots,n$ 时的情形相加，得到

$$-\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\varepsilon x<f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)<\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\varepsilon x.$$

令 $n\to\infty$ 得到 $-2\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant 2\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)/x=0$，即当 $x\to 0$ 时 $f(x)=o(x)$. □

2.

答 取

$$f(x)=\prod_{i=1}^{\lceil x\rceil}(1+|f_i(x)|)$$

即可. □

2.7 连续函数

1.

答　(1) 不能.

(2) 这个函数的自然定义域是 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$，但是可以补充定义 $f(0)=0$ 使之成为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(3) 是.

(4) 否. 狄利克雷函数就是一个反例.

(5) 零函数. □

2.

答　(1) 连续.

(2) 右连续.

(3) 连续.

(4) 右连续.

(5) 不连续. □

3.

答　$a=c=0$，$b=1$. □

4.

答　(1) $f+g$ 在 x_0 处一定不连续，而例 4 告诉我们 fg 在 x_0 处可能连续.

(2) $f+g$ 和 fg 在 x_0 处都可能连续. □

5.

证明　这是因为存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)-f(x_0)>-f(x_0)/2$. □

6.

答　证明略. 反之一般不成立，比如取 $f(x)=D(x)-1/2$，其中 D 是狄利克雷函数. □

7.

证明　这是练习题 1.1 第 14 题的推论. □

8.

证明　任取 $x_0\in\mathbb{R}$, 那么对任意的 ε, 存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|t-x_0|<\delta$ 时有 $|f(t)-g(x_0)|<\varepsilon/2$，于是当 $0<|x-x_0|<\delta/2$ 时有

$$|g(x)-g(x_0)|=|\lim_{t\to x}f(t)-g(x_0)|=\lim_{t\to x}|f(t)-g(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$，即 g 在 x_0 处连续，进而 g 是连续函数. □

9.

证明 任取 $x_0\in\mathbb{R}$, 那么对任意的 ε, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x_0<t<x_0+\delta$ 时有 $|f(t)-F(x_0)|<\varepsilon/2$，于是当 $x_0<x<x_0+\delta/2$ 时有

$$|F(x)-F(x_0)|=|\lim_{t\to x^+}f(t)-F(x_0)|=\lim_{t\to x^+}|f(t)-F(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$，即 F 在 x_0 处右连续，进而 F 在 $\mathbb{R}$ 上右连续. □

注意

第 8 题和第 9 题中"只有可去间断点"和"递增（或递减）"的条件是为了让新函数定义良好.

10.

证明 在练习题 2.3 的第 6 题中已经证明了对有理数 x 有 $f(x)=f(1)x$. 由于无理数可以用有理数列逼近，所以结合连续性知对无理数 x 也有 $f(x)=f(1)x$，进而对一切的 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x)=f(1)x$ □

1.

证明 这是因为

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)-\min\{\min\{f_1(x),f_2(x)\},f_3(x)\}-\max\{\max\{f_1(x),f_2(x)\},f_3(x)\}.$$ □

2.

证明 分别令 $y\to x^-$ 和 $y\to x^+$ 得到

$$f(x^-)\leqslant\frac{f(x)+f(x^-)}{2},\quad f(x^+)\leqslant\frac{f(x)+f(x^+)}{2},$$

或者 $f(x^-)\leqslant f(x)$ 及 $f(x^+)\leqslant f(x)$. 在

$$f(x)=f\left(\frac{y+(2x-y)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(y)+f(2x-y))$$

中令 $y\to x^+$ 就得到

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+)),$$

由此可见 $f(x)=f(x^-)=f(x^+)$，因此 f 是连续函数. □

3.

证明 (1) 对任意异于 x_0 的一点 y_0，任取一收敛于 y_0 的点列 $\{y_n\}$，利用 f 在 x_0 处的连续性就有

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(y_n-y_0+x_0)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)-f(y_0)+f(x_0),$$

因此 $\lim_{n\to\infty}f(y_n)=f(y_0)$. 所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，由练习题的第10题知 $f(x)=f(1)x$.

(2) 不妨明确地设 f 是递增的. 对每个 $x\in\mathbb{R}$，取 $a_n=\lfloor 10^n x\rfloor/10^n$ 以及 $b_n=\lceil 10^n x\rceil/10^n$，那么 $a_n\leqslant x\leqslant b_n$ 且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=x=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

于是在

$$f(1)a_n=f(a_n)\leqslant f(x)\leqslant f(b_n)=f(1)b_n$$

中令 $n\to\infty$ 就得到 $f(x)=f(1)x$. □

4.

证明 因为

$$\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y),$$

所以 $\ln f(x)=x\ln f(1)=x\ln a$，亦即 $f(x)=a^x$. □

5.

证明 如果由某个 $x_0\in(0,+\infty)$ 使 $f(x_0)=0$，那么 $f(x)=f(x_0\cdot x/x_0)=f(x_0)f(x/x_0)=0$，从而此时 $f=0$.

如果 f 不恒为零，那么由

$$f(\mathrm{e}^{x+y})=f(\mathrm{e}^x)f(\mathrm{e}^y)$$

知 $f(\mathrm{e}^x)=(f(\mathrm{e}))^x$，从而 $f(x)=(f(\mathrm{e}))^{\ln x}=x^{\ln f(\mathrm{e})}$. □

6.

证明 因为 $f(x)=f(x)+(f(0))^n$，所以 $f(0)=0$，从而

$$f(y^n)=f(0)+(f(y))^n=(f(y))^n.$$

于是

$$0=f(-y^n+y^n)=f(-y^n)+(f(y))^n=f(-y^n)+f(y^n),$$

故由

$$f(x)=f(x-y^n+y^n)=f(x-y^n)+f(y^n)$$

知

$$f(x-y^n)=f(x)-f(y^n)=f(x)+f(-y^n).$$

这样由

$$\begin{cases} f(x+y^n)=f(x)-f(y^n)=f(x)+f(y^n) \\ f(x-y^n)=f(x)-f(y^n)=f(x)+f(-y^n) \end{cases}$$

我们得到 $f(x+z)=f(x)+f(z)$，所以 $f(x)=f(1)x$. 利用 $f(x^n)=(f(x))^n$ 我们得到当 n 是偶数时 $f(1)=1$，当 n 是奇数时 $f(1)=\pm1$，或者 $f(1)=0$. □

7.

证明 当 $x\neq0$ 时我们有

$$f(x)=f(\sqrt{x^2})=f(|x|)=f(\sqrt{|x|})=\lim_{n\to\infty}f(|x|^{1/2^n})=f(1),$$

进一步地还能得到

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}f(1)=f(1).$$

因此 f 是常值函数. □

2.8 连续函数与极限计算

1.

答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{x^3+1}=10$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim_{x\to0}(6x^2+11x+6)=6$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x^{n-1}-a^{n-1}+a(x^{n-2}-a^{n-2})+\cdots+a^{n-2}(x-a))}{x-a}=$ $\displaystyle(n-1)a^{n-2}+a(n-2)a^{n-3}+\cdots+a^{n-2}=\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^{n+1}-1)-(n+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{n(n+1)}{2}$. □

2.

解 (1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\overset{x=t^{mn}}{=}\lim_{t\to1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\frac{n}{m}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{(m-1)/m}+(1+\alpha)^{(m-2)/m}+\cdots+1}=\frac{\alpha}{m}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x/m+o(x)-(\beta x/n+o(x))}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^{n-1}}((1-x)/2+o(x-1))((1-x)/3+o(x-1))\cdots((1-x)/n+o(x-1))=\dfrac{1}{n!}$. □

3.

答　(1) 1.
(2) $\mathrm{e}^{3/2}$.
(3) e^{-1}.
(4) 1.
(5) e.
(6) $\mathrm{e}^{-1/2}$.
(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}=\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
(8) e^2.
(9) $\mathrm{e}^{\cot a}$. □

4.

解　事实上

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x(1-x^n)/(1-x)}{n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x(1-x^n)/(1-x)}{n}\right)^{\frac{n}{x(1-x^n)/(1-x)}\frac{x(1-x^n)}{1-x}}=\mathrm{e}^{x/(1-x)}.$$ □

2.9　函数的一致连续性

1.

答　(1) 不一致连续．因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(\frac{1}{n\pi}\right)-f\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)\right|=2.$$

(2) 一致连续.
(3) 一致连续.
(4) 不一致连续．因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}+n\right)\pi}\right)-f\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\right)\right|=2.$$

(5) 不一致连续．因为对无论多么小的正数 δ，都有

$$\lim_{n\to\infty}|f(2n\pi)-f(2n\pi-\delta)|=\lim_{n\to\infty}2n\pi-\frac{2n\pi}{1+(2n\pi)^2\sin^2\delta}=+\infty. \qquad \square$$

2.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$ 使得当 $x',x''\in I$ 时只要 $|x'-x''|<\delta_1$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$，也存在 $\delta_2>0$ 使得当 $x',x''\in I$ 时只要 $|x'-x''|<\delta_2$ 就有 $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon/2$．现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，那么当 $x',x''\in I$ 时只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有

$$|f(x')+g(x')-(f(x'')+g(x''))|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\varepsilon.$$

因此 $f+g$ 也在 I 上一致连续． $\square$

3.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $x',x''\in(a,b)$ 时只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$．特别地，当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 或者 $x',x''\in(b-\delta,b)$ 时也有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$．因此由柯西收敛准则知 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在且有限． $\square$

1.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $x',x''\in[0,+\infty)$ 时只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$．取 $N=\lceil 1/\delta\rceil$，令 $x_i=i/N$，其中 $i=0,1,\ldots,N$．那么对每个 $x\in[0,+\infty)$ 都存在 $[x_i,x_{i+1}]\ni x-\lfloor x\rfloor$，于是

$$\varlimsup_{x\to\infty}|f(x)|\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}|f(x)-f(x_i+\lfloor x\rfloor)|+|f(x_i+\lfloor x\rfloor)|\leqslant\varepsilon,$$

由 ε 的任意性知

$$0\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}|f(x)|\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}|f(x)|=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$． $\square$

2.

证明 这是因为

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x')}{x'}-\frac{f(x'')}{x''}\right|&=\frac{|x''(f(x')-f(x''))-(x'-x'')f(x'')|}{x'x''}\\&\leqslant\frac{|f(x')-f(x'')|}{x'}+\frac{|x'-x''||f(x'')|}{x'x''}\\&\leqslant\frac{|f(x')-f(x'')|}{x'}+\frac{|x'-x''|(|f(x'')-f(a)|+|f(a)|)}{x'x''}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{k|x'-x''|}{x'} + \frac{|x'-x''|(k(x''-a)+|f(a)|)}{x'x''}$$
$$\leqslant \frac{k|x'-x''|}{x'} + \frac{|x'-x''|(kx''+|f(a)|)}{x'x''}$$
$$= \left(\frac{2k}{x'} + \frac{|f(a)|}{x'x''}\right)|x'-x''| \leqslant \frac{2ak+|f(a)|}{a^2}|x'-x''|. \qquad \square$$

2.10 有限闭区间上连续函数的性质

1.

证明 根据练习题 2.9 的第 3 题知可以补充定义 $f(a)=f(a^+)$ 和 $f(b)=f(b^-)$ 使 f 成为 $[a,b]$ 上的连续函数，从而在 $[a,b]$ 上有界，进而在 (a,b) 上有界. □

2.

答 当 I 是有限区间时 fg 仍然一致连续，当 I 是无限区间时 fg 可能不一致连续，比如取 $f(x)=g(x)=x$. □

3.

证明 补充定义 $f(a)=f(a^+)$ 和 $f(b)=f(b^-)$ 使 f 成为 $[a,b]$ 上的连续函数，那么 f 在 $[a,b]$ 上一致连续，限制到 (a,b) 上仍然一致连续. □

4.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，根据柯西收敛原理，存在 $X>a$ 使得当 $x',x''>X$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 由于 f 在 $[a,X+1]$ 上一致连续，所以存在 $\delta>0$ 使得当 $x',x''\in[a,X+1]$ 时只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 现在取 $\delta'=\min\{\delta,1/2\}$，那么对任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta'$ 时，必有 $x',x''\in[a,X+1]$ 或 $x',x''\in[X,+\infty)$，所以 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 因此 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. □

5.

证明 由第 4 题知 $f(x)-bx-c$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，所以 $f(x)=f(x)-bx-c+(bx+c)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. □

6.

证明 显然 $f(x)=x^3+2x-1$ 是递增的，因为 $f(0)f(1)=-2<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的零点. □

7.

证明 (1) 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^n+\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty} x^n(1+\varphi(x)/x^n)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n+\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty} x^n(1+\varphi(x)/x^n)=-\infty,$$

所以存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $x_0^n+\varphi(x_0)=0$.

(2) 因为

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n+\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty} x^n(1+\varphi(x)/x^n)=+\infty$$

所以存在 $X>0$ 时当 $|x|>X$ 时 $x^n+\varphi(x)\geqslant 0^n+\varphi(0)$. 由于 $x^n+\varphi(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，所以存在 $y\in[-X,X]$ 使得对一切的 $x\in[-X,X]$ 都有

$$y^n+\varphi(y)\leqslant x^n+\varphi(x),$$

当然也有 $y^n+\varphi(y)\leqslant 0^n+\varphi(0)$，所以对一切的 $x\in\mathbb{R}$ 都有

$$y^n+\varphi(y)\leqslant x^n+\varphi(x).$$ □

8.

证明 设 $F(x)=f(x+1/n)-f(x)$，那么

$$0=f(1)-f(0)=F\left(\frac{n-1}{n}\right)+F\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+F(0),$$

所以不可能所有的 $F(i/n)$ 都是正的，或者都是负的. 因此存在 i 和 j 使得 $F(i/n)F(j/n)\leqslant 0$，进而利用 F 的连续性就知道存在 x_n 使得 $F(x_n)=0$，亦即 $f(x_n)=f(x_n+1/n)$. □

9.

证明 因为 $f(a)<a$ 而 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$，所以利用连续函数的介值性知存在 $\xi_1<a$ 和 $\xi_2>a$ 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=a$，于是 ξ_1 和 ξ_2 就是 $f\circ f$ 的两个最小值点. □

10.

证明 因为 $f([a,b]\cap\mathbb{Q})$ 和 $f([a,b]\setminus\mathbb{Q})$ 都是可数集，所以 $f([a,b])$ 也是可数集，由此可见若 f 是连续函数，那么 f 只能是常值的. 但是 f 既能取到有理数，也能取到无理数，所以 f 不是连续函数. □

11.

证明 (1) 设 $y>x$，那么由

$$-k(y-x)\leqslant f(x)-f(y)$$

知 $kx-f(x)\leqslant ky-f(y)$，所以 $kx-f(x)$ 是递增的.

(2) 因为

$$f(x)-x=(k-1)x+(f(x)-f(0)-kx)+f(0),$$

所以当 $x>0$ 时 $f(x)-x\leqslant(k-1)x+f(0)$，当 $x<0$ 时 $f(x)-x\geqslant(k-1)x+f(0)$. 由此可见存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $f(\xi)=\xi$，亦即 $f(\xi)=\xi$. 假设又有 η 使 $f(\eta)=\eta$，那么

$$|\xi-\eta|=|f(\xi)-f(\eta)|\leqslant k|\xi-\eta|,$$

从而 $\xi=\eta$，此即唯一性. □

12.

证明 设 f 是一个连续的周期函数,T 是它的一个正周期,那么 f 在每个闭区间 $[kT,(k+2)T]$ 上一致连续，其中 $k\in\mathbb{Z}$. 于是对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$ 使得对任意的 $x',x''\in[kT,(k+2)T]$，只要 $|x'-x''|<\delta'$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 现在取 $\delta=\min\{\delta',T\}$，那么对于任意的 $x',x''\in\mathbb{R}$，只要 $|x'-x''|<\delta$，x' 和 x'' 就会同时落在某个 $[kT,(k+2)T]$ 中，从而有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

根据练习题2.9的第1题知 $\sin^2 x+\sin x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是一致连续的，所以不是周期函数. □

1.

证明 若不然，存在一个趋向 ∞ 的数列 $\{x_n\}$ 使得 $\{f(x_n)\}$ 是有界的，于是从 $\{f(x_n)\}$ 中可以取出一个收敛子列 $\{f(x_{n_k})\}$，其极限设为 A. 于是由归结原理可知

$$\infty=\lim_{x\to\infty}f(f(x))=\lim_{k\to\infty}f(f(x_{n_k}))=f(A),$$

矛盾! 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. □

2.

证明 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，那么 $F(x_n)=f(x_n)-f(x_{n+1})$，于是根据连续函数的介值性知存在 $\xi_n\in[a,b]$ 使得

$$F(\xi_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(x_n)=\frac{f(x_1)-f(x_{n+1})}{n}.$$

取 $\{\xi_n\}$ 的一个收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}$，其极限设为 x_0. 那么利用 f 的有界性知

$$F(x_0)=\lim_{k\to\infty}F(\xi_{n_k})=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_1)-f(x_{n_k+1})}{n_k}=0,$$

所以 $f(x_0)=g(x_0)$. □

3.

证明 如果 $f(x+\lambda)-f(x)$ 在任意的区间 $[X,+\infty)$ 上都能取到 0，那就没什么好说的了.

如果存在 $X>a$ 使得当 $x>X$ 使 $f(x+\lambda)-f(x)$ 取不到 0，那么由连续函数的介值性知 $f(x+\lambda)-f(x)>0$ 或 $f(x+\lambda)-f(x)<0$，不妨设 $f(x+\lambda)-f(x)>0$. 我们断言 $\inf\limits_{x>X} f(x+\lambda)-f(x)=0$, 从而可以找到一个趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n+\lambda)-f(x_n)=0$. 事实上如果 $\inf\limits_{x>X} f(x+\lambda)-f(x)=a>0$，那么

$$f(X+n\lambda)-f(X)\geqslant na\to+\infty\ (n\to\infty),$$

这与 f 的有界性矛盾! □

4.

证明 (1) 假设存在这样的连续函数 f，任取一对满足 $f(a)=f(b)$ 的 a 和 b，且 $a<b$. 那么由介值性知对任意的 $x\in(a,b)$ 都有 $f(x)>f(a)$ 或 $f(x)<f(a)$，不妨设 $f(x)>f(a)$，那么 f 在 $[a,b]$ 上能取到最大值 $M=f(x_1)>f(a)$，于是还有另一 $x_2\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=M$. 不妨设 $x_1<x_2$.

如果 $a<x_1<x_2<b$, 设 $m=f(x_0)$ 是 f 在 $[x_1,x_2]$ 上的最小值, 设 r 满足 $\max\{m,f(a)\}<r<M$，那么由介值性存在 $t_1\in(a,x_1)$，$t_2\in(x_1,x_0)$，$t_3\in(x_0,x_2)$，$t_4\in(x_2,b)$ 使得

$$f(t_1)=f(t_2)=f(t_3)=f(t_4)=r,$$

这与对 f 的假设矛盾!

如果 $a<x_1<b<x_2$，那么对满足 $f(a)<r<M$ 的 r 也存在 $t_1\in(a,x_1)$，$t_2\in(x_1,b)$，$t_3\in(b,x_2)$ 使得

$$f(t_1)=f(t_2)=f(t_3)=r,$$

这也与对 f 的假设矛盾!

因此不存在这样的连续函数.

(2) 存在，比如 $f(x)=\dfrac{2x}{3\pi}+\sin x$. □

2.11 函数的上极限和下极限

1.

答 (1) 上极限是 1，下极限是 -1.

(2) 上极限是 $+\infty$，下极限是 $-\infty$.

(3) 上极限是 $+\infty$，下极限是 $-\infty$. □

2.

证明　对每个 $n \in \mathbb{N}^*$ 都存在 $\xi_n \in (x_0-\delta/n, x_0)$ 使得 $f(\xi_n) < \alpha$, 也存在 $\eta_n \in (x_0-\delta/n, x_0)$ 使得 $f(\eta_n) < \alpha$. 从而由连续函数的介值性知存在 $x_n \in (x_0-\delta/n, x_0)$ 使得 $f(x_n) = \alpha$, 而 $x_n \to x_0^-$ 是显然的. □

3.

证明　(1) 这是显然的.

(2) 如果 $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$，那么存在一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$，所以总有 $\varphi(\delta) = -\infty$，当然也有

$$a = \lim_{\delta\to 0^+} \varphi(\delta) = -\infty = \varliminf_{x\to x_0} f(x).$$

如果 $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 是有限数，那么对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\eta > 0$ 使得当 $\delta < \eta$ 时 $\varphi(\delta) \geqslant A-\varepsilon$，从而

$$A-\varepsilon \leqslant \lim_{\delta\to 0^+} \varphi(\delta) = \alpha.$$

另一方面，由于存在一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，所以总有 $\varphi(\delta) \leqslant A$，进而 $A \geqslant \alpha \geqslant A-\varepsilon$. 由 ε 的任意性知

$$\alpha = A = \varliminf_{x\to x_0} f(x).$$

同样的道理也有 $\beta = \varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$. □

2.12　混沌现象

1.

证明　这很显然，没什么好说的. □

2.

证明　这是定理 2.12.2 的特殊情况. □

3.

证明　这是定理 2.12.2 的特殊情况. □

4.

证明　这是因为 $f^i(I_0) \supset I_i$，从而利用连续函数的介值性即可. □

第三章　函数的导数

3.1　导数的定义

1.

答　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.　□

2.

证明　对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}-f'(0)\right|<\varepsilon,\ \left|\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}-f'(0)\right|<\varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(0)\right|&=\left|\left(\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}-f'(0)\right)\frac{b_n-0}{b_n-a_n}+\left(\frac{f(0)-f(a_n)}{0-a_n}-f'(0)\right)\frac{0-a_n}{b_n-a_n}\right|\\&\leqslant\left|\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0}-f'(0)\right|\frac{b_n-0}{b_n-a_n}+\left|\frac{f(0)-f(a_n)}{0-a_n}-f'(0)\right|\frac{0-a_n}{b_n-a_n}\\&<\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0)$.　□

3.

证明　在第 2 题中取 $b_n=a_n=-1/n$ 即可.　□

4.

证明　这是因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0).$$

对于逆命题的反例，取 $f(x)=|x|$ 即可.　□

5.

答 (1) $(2,4)$.
(2) $(-3/2,9/4)$.
(3) $(1/4,1/16)$ 和 $(-1,1)$. $\square$

6.

证明 这是因为这两个点处的切线斜率分别是 $2x_1$ 和 $2x_2$. $\square$

7.

答 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(a+1/n)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f(a+1/n)-f(a)}\frac{f(a+1/n)-f(a)}{1/n}\frac{1}{f(a)}}=\mathrm{e}^{f'(a)/f(a)}$. $\square$

8.

证明 事实上

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a).$$

因为

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|x-a|}{x-a}\varphi(x),$$

所以当 $\varphi(a)=0$ 时 g 在点 a 处可导. $\square$

9.

答 $f'(0)=-8$, $f'(1)=f'(2)=0$. $\square$

10.

证明 这是因为极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\sin\frac{1}{x}$$

仅当 $\lambda>1$ 时存在. $\square$

1.

证明 黎曼函数在有理点不连续，当然也不可导．对于无理数 x_0，根据问题1.1的第8题，存在有理数列 $\{p_n/q_n\}$，其中 p_n 和 q_n 互素，满足

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-x_0\right|<\frac{1}{q_n^2},\ \lim_{n\to\infty}q_n=+\infty,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{R(p_n/q_n)-R(x_0)}{p_n/q_n-x_0}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1/q_n}{|p_n/q_n-x_0|}>q_n\to+\infty\ (n\to\infty),$$

因此 $R(x)$ 在 x_0 处不可导，进而在无理点处都不可导．所以黎曼函数处处不可导． □

2.

证明 比如狄利克雷函数． □

3.2 导数的计算

1.

答 (1) $y'=3x^2-2$.

(2) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$.

(3) $y'=-a\sin x+b\cos x$.

(4) $y'=\dfrac{3}{5}x^{-2/5}+x\cos x+\sin x$.

(5) $y'=\dfrac{6}{x}+ab\mathrm{e}^{bx}$.

(6) $y'=\dfrac{1}{x\ln a}+ba^x\ln a$.

(7) $y'=2x^2\cos x^2+\sin x^2$.

(8) $y'=\dfrac{ab}{1+a^2x^2}+ab\sec^2 bx$.

(9) $y'=\dfrac{\cos x}{2x^{2/3}}+\sqrt[3]{x}\sin x$.

(10) $y'=4ax^3+3bx^2+a$.

(11) $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

(12) $y'=\dfrac{a^x}{x}+a^x\ln a\ln x$.

(13) $y'=\ln x+1$.

(14) $y'=a^2\sec^2 x+a^x\ln a\tan x$.

(15) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x^2}{1+x^2+2x\arctan x}$.

(16) $y' = \dfrac{1+x^2+(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2}$.

(17) $y' = -\dfrac{2}{(\cos x+\sin x)^2}$.

(18) $y' = \dfrac{\cos x}{x} + \csc x - x\cot x\csc x - \dfrac{\sin x}{x^2}$.

(19) $y' = x\cos x\ln x + \sin x + \ln x\sin x$.

(20) $y' = 3\cos x\sin^2 x$.

(21) $y' = \mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)$.

(22) $y' = x^{x^x}(x^{x-1} + x^x\ln x(1+\ln x))$.

(23) $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(24) $y' = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$.

(25) $y' = \dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

(26) $y' = \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

(27) $y' = -2\sin\ln x$.

(28) $y' = a^{\sin x}\cos x\ln a$.

(29) $y' = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

(30) $y' = \sinh x$. □

2.

解 因为

$$1+x+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

所以在上式两端求导就得到

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \tag{3.1}$$

在(3.1)式中取 $x=1/2$ 就得到 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}} = 4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. 在(3.1)式的两端乘以 x 后再求导，可以得到

$$1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1} = \frac{(-2n^2-2n+1)x^{n+1}+n^2x^{n+2}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}.$$ □

3.

证明 (1) 由

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}. \tag{3.2}$$

再令 $x=1$ 就得到所要的结果.

(2) 在(3.2)两端乘以 x 得到

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k}=nx(1+x)^{n-1},$$

于是再求导就得到

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k}=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2},$$

在其中令 $x=1$ 就得到所要的结果. □

4.

证明 在 $f(x)=f(x+T)$ 的两端求导就得到 $f'(x)=f'(x+T)$，从而 f' 也是周期函数. □

5.

证明 (1) 在 $f(x)=-f(-x)$ 两端求导得到 $f'(x)=f'(-x)$.

(2) 在 $f(x)=f(-x)$ 两端求导得到 $f'(x)=-f'(-x)$. □

6.

证明 设 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-x_0)$，那么

$$f'(x)=(x-a)(x-b)+(x-a)(x-x_0)+(x-b)(x-x_0),$$

所以 $0\geqslant f'(a)f'(b)=-(a-b)^2(a-x_0)(b-x_0)$ 当且仅当 $x_0\notin(a,b)$，这当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上不变号. □

7.

证明 不妨设

$$0<f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a},\quad 0<f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b},$$

于是由极限的保号性知存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时 $f(x)/(x-a)>0$，当 $x\in(b-\delta,b)$ 时 $f(x)/(x-b)>0$. 因此 $f(a+\delta/2)f(b-\delta/2)<0$，进而 f 在 $(a+\delta,b-\delta/2)$ 内至少有一个零点，在 (a,b) 当然也至少有一个零点. □

8.

证明　中学问题，略. □

9.

证明　中学问题，略. □

10.

证明　略 □

1.

证明　因为

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

所以对任意的 ε 都存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < x < \delta$ 时有 $|f(x)/x - f'(0)| < \varepsilon$，或者

$$(f'(0)-\varepsilon)x < f(x) < (f'(0)+\varepsilon)x.$$

所以当 $n > \lceil 1/\delta \rceil$ 时有

$$\frac{k}{n^2}(f'(0)-\varepsilon) < f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}(f'(0)+\varepsilon),\ k = 1,2,\ldots,n.$$

在上式中对 k 求和得到

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}(f'(0)-\varepsilon) < f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) < \frac{n(n+1)}{2n^2}(f'(0)+\varepsilon),$$

因此

$$\frac{1}{2}(f'(0)-\varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \frac{1}{2}(f'(0)+\varepsilon).$$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f'(0)/2$.

根据这个结果不难直接写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n^2} = \dfrac{1}{2}$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{i}{n^2}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}$. □

2.

证明　任取 $f \in V$，设 $f(x) = ax^2 + bx + c$. 那么由

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c \\ f(1/2) = 4/a + b/2 + c \\ f(0) = c \end{cases}$$

可知

$$|f'(0)| = |b| = |-f(1) + 4f(1/2) - 3f(0)| \leqslant |f(1)| + 4|f(1/2)| + 3|f(0)| = 8.$$

又因为当 $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ 时上面的不等式变为等式，所以 $\sup\{|p'(0)|: p \in V\} = 8$. □

3.

证明 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时有

$$m - \varepsilon < \frac{f(2x) - f(x)}{x} < m + \varepsilon,$$

于是对于 $k \geqslant 1$ 当然也有

$$m - \varepsilon < \frac{f(x/2^{k-1}) - f(x/2^k)}{x/2^k} < m + \varepsilon,$$

或者

$$\frac{m-\varepsilon}{2^k} < \frac{f(x/2^{k-1}) - f(x/2^k)}{x} < \frac{m+\varepsilon}{2^k}.$$

取 $k = 1, 2, \ldots, n$ 时的情形相加，得到

$$(m-\varepsilon)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{f(x) - f(x/2^n)}{x} < (m+\varepsilon)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

令 $n \to \infty$ 并利用 f 在 $x = 0$ 处的连续性可得

$$m - \varepsilon \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant m + \varepsilon.$$

由此可知 $m = \lim\limits_{x \to 0}(f(x) - f(0))/x = f'(0)$. □

4.

证明 假设存在这样的函数 f，那么 $f \circ f$ 有唯一的不动点 $x = 1$. 于是 $f(f(f(1))) = f(1)$，从而 $f(1)$ 也是 $f \circ f$ 的不动点，因此 $f(1) = 1$. 对 $f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$ 求导可得

$$f'(f(x))f'(x) = -3x^2 + 2x,$$

再令 $x = 1$ 就得到 $(f'(1))^2 = -1$，但这是不可能的. 因此不存在这样的函数. □

5.

证明 假设存在这样的函数 f，那么 $f \circ f$ 有两个不动点 1 和 3. 于是 $f(f(f(1))) = f(1)$，从而 $f(1)$ 也是 $f \circ f$ 的不动点，因此 $f(1) = 1$ 或 $f(1) = 3$. 对 $f(f(x)) = x^2 - 3x + 3$ 求导可得

$$f'(f(x))f'(x) = 2x - 3.$$

如果 $f(1)=1$，那么

$$-1=f'(f(1))f'(1)=(f'(1))^2,$$

矛盾！如果 $f(1)=3$，那么

$$-1=f'(f(1))f'(1)=f'(3)f'(1)=f'(3)f'(f(3))=3,$$

矛盾！因此不存在这样的函数. □

3.3 高阶导数

1.

答 (1) $y''=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$.

(2) $y''=a^x(2+4x\ln a+x^2\ln^2 a)$.

(3) $y''=-\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

(4) $y''=\dfrac{a+3\sqrt{x}}{4(a+\sqrt{x})^3x^{3/2}}$.

(5) $y''=2\sec^2 x\tan x$.

(6) $y''=\dfrac{2x}{1+x^2}+2\arctan x$.

(7) $y''=-\csc^2 x$.

(8) $y''=\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+3x^2\arcsin x(1-x^2)^{5/2}+\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

(9) $y''=6x\cos x-x^3\cos x-6x^2\sin x$.

(10) $y''=\dfrac{1}{x}$. □

2.

答 (1) $4/\mathrm{e}$.

(2) $-1/2$.

(3) -2. □

3.

答 (1) $y^{(10)}=\dfrac{654729075(x+1)}{1024(1-x)^{21/2}}+\dfrac{172297125}{256(1-x)^{19/2}}$.

(2) $y^{(8)}=\dfrac{40320x^2}{(1-x)^9}+\dfrac{80640x}{(1-x)^8}+\dfrac{40320}{(1-x)^7}$. □

4.

解 注意到

$$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin x,$$

而

$$(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x})^{(n)}=(1+\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=2^{n/2}\mathrm{e}^{n\pi/4}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=2^{n/2}\mathrm{e}^x\left(\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\right),$$

所以

$$(\mathrm{e}^x\cos x)^{(n)}=2^{n/2}\mathrm{e}^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right),\ (\mathrm{e}^x\sin x)^{(n)}=2^{n/2}\mathrm{e}^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).\qquad\square$$

5.

答 $a=\dfrac{1}{2}f''_-(x_0)$，$b=f'_-(x_0)$，$c=f(x_0)$. $\square$

1.

证明 由

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

求导可得

$$-n(1-x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}x^{k-1},\tag{3.3}$$

在其中令 $x=1$ 就得到 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k=0$. 再对(3.3)式求导可得

$$n(n-1)(1-x)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2},$$

在其中令 $x=1$ 并利用 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k=0$ 就得到 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^2=0$. 如此不断反复，并利用已经得到的结果，就可以得到

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m=\begin{cases}0, & m\leqslant n-1,\\(-1)^n n!, & m=n\end{cases}.\qquad\square$$

2.

答 我们在这里不加证明地写出

$$(uvw)^{(n)}=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}u^{(i)}v^{(j)}w^{(k)}.\qquad\square$$

3.

证明 这是因为当 $n=1$ 的时候结论确实成立，而 $f_{n-1}^{(n-1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^n}\mathrm{e}^{1/x}$ 蕴含着

$$f_n^{(n)}(x)=(xf_{n-1}(x))^{(n)}=xf_{n-1}^{(n)}(x)+nf_{n-1}^{(n-1)}(x)=x\left(\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\mathrm{e}^{1/x}\right)'+\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\mathrm{e}^{1/x}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{1/x}.$$

□

4.

证明 归纳易知. □

5.

证明 当 $n=1$ 时结论确实成立. 假设对于 $n-1$ 阶导数的情形结论已经成立，那么

$$\begin{aligned}
&f^{(n)}(x)=\left((n-2)!\cos^{n-1}y\sin(n-1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)'\\
=&(n-2)!\left(-(n-1)y'\sin y\cos^{n-2}y\sin(n-1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+(n-1)y'\cos^{n-1}y\cos(n-1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
=&(n-1)!y'\cos^{n-2}y\cos\left(n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

因此对于 n 阶导数结论也成立，进而结论普遍成立. □

6.

证明 在

$$f_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)+x^{n-1}$$

的两边再求 $n-1$ 次导数得到

$$f_n^{(n)}x=nf_{n-1}^{(n-1)}(x)+(n-1)!,$$

从而

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n}=\cdots=\ln x+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由此知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}=\gamma$，其中 γ 是欧拉常数. □

7.

证明 设 $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，那么 $p'(x)=p(x)\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x-x_i}$，因此

$$p(x)p''(x)=p(x)p'(x)\sum_{i=1}^n\frac{1}{x-x_i}-p^2(x)\sum_{i=1}^n\frac{1}{(x-x_i)^2}\leqslant p(x)p'(x)\sum_{i=1}^n\frac{1}{x-x_i}=(p'(x))^2.$$ □

8.

解 设 $g(x)=(1-\sqrt{x})^n$，那么

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+2}{i}(x^{i/2}+(-x)^{i/2})=2\sum_{i=0}^{n+1}\binom{2n+2}{2i}x^i,$$

所以

$$f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)=2\left(n!\binom{2n+2}{2n}+(n+1)!\binom{2n+2}{2n+2}x\right)=2(n+1)!(2n+1+x).$$

又易见 $g^{(n)}(1)=0$，所以 $f^{(n)}(1)=4(n+1)!(n+1)$. □

3.4 微分学的中值定理

1.

证明 假设它在 $[0,1]$ 上有两个相异的根 x_1 和 x_2，那么由罗尔定理知存在介于 x_1 和 x_2 之间的数 ξ 使得 $3\xi^2-3=0$. 由于 $\xi<1$，所以这是不可能的. 因此这个方程在 $[0,1]$ 上没有相异的根. □

2.

证明 如果 $f(a+0)=f(b-0)$ 是有限数，那么补充定义 $f(a)=f(b)=f(a+0)$ 在使用罗尔定理就得到所要的结论.

如果 $f(a+0)=f(b-0)=\infty$，那么由 f 的连续性知 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$ 或 $f(a+0)=f(b-0)=-\infty$，不妨设 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$. 那么存在 $\delta\colon 0<\delta<(b-a)/3$ 使得当 $x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 时有

$$f(x)>\max\left\{f\left(\frac{2a+b}{3}\right),f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right\}.$$

根据连续函数的介值性知存在 $\eta_1\in(a,a+\delta)$ 和 $\eta_2\in(b-\delta,b)$ 使得

$$f(\eta_1)=f(\eta_2)=1+\max\left\{f\left(\frac{2a+b}{3}\right),f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right\}.$$

再根据罗尔定理知存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$. □

3.

证明 (1) $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi||x-y|\leqslant|x-y|$.

(2) 这是因为存在 $\xi\in(y,x)$ 使得 $x^p-y^p=p\xi^{p-1}(x-y)$，而 $y^{p-1}\leqslant\xi^{p-1}\leqslant x^{p-1}$.

(3) 这是因为存在 $\xi\in(b,a)$ 使得 $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b=\dfrac{a-b}{\xi}$，而 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$.

(4) 注意到

$$\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}=\sin(\arctan a-\arctan b)<\arctan a-\arctan b=\frac{a-b}{1+\xi^2}<a-b.$$ □

4.

证明 设 $F(x)=p(x)-f(x)$，那么根据罗尔定理，存在

$$x_0^{(1)}\in(x_0,x_1),\ x_1^{(1)}\in(x_1,x_2),\dots,x_{n-1}^{(1)}\in(x_{n-1},x_n)$$

使得 $F'(x_i^{(1)})=0$，$i=0,1,\dots,n-1$. 再利用罗尔定理，存在

$$x_0^{(2)}\in(x_0^{(1)},x_1^{(1)}),\ x_1^{(2)}\in(x_1^{(1)},x_2^{(1)}),\dots,x_{n-2}^{(2)}\in(x_{n-2}^{(1)},x_{n-1}^{(1)})$$

使得 $F''(x_i^{(2)})=0$，$i=0,1,\dots,n-2$. 如此不断作下去，可以得到存在 $\xi=x_0^{(n)}$ 使得

$$0=F^{(n)}(\xi)=n!a_0-f^{(n)}(\xi),$$

即 $a_0=f^{(n)}(\xi)/n!$. □

5.

证明 设多项式

$$f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx,$$

那么 $f(1)=0=f(0)$，因此根据罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$0=f'(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\xi+a_n,$$

所以多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点. □

6

证明 假设 f' 在 $x=0$ 的右旁 $(0,\delta)$ 上有一个下界 M，不妨设 $M<0$，那么当 $x\in(0,\delta)$ 时有

$$f(x)=f(\delta)+f'(\xi)(x-\delta)\leqslant f(\delta)+M(x-\delta),$$

这蕴含着 $f(0+0)\leqslant f(\delta)-\delta M$，矛盾！因此 f' 在 $x=0$ 的右旁无下界. □

7.

证明 因为

$$0=\frac{xf'(x)-f(x)}{x}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2,$$

所以 $f(x)=cx$. 又因为 $f(1)=1$，所以 $f(x)=x$，进而 $f(2)=2$. □

8.

证明 根据柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{f(b)/b-f(a)/a}{1/b-1/a}=\frac{(\xi f'(\xi)-f(\xi))/\xi^2}{-1/\xi^2}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$ □

9.

证明 设

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

那么 $F(a)=F(b)$. 因为 f 不是线性的，所以存在 $x\in(a,b)$ 使得 $F(c)\neq F(a)=F(b)$. 如果 $F(c)>F(a)$，那么存在 $\xi_1\in(a,c)$ 使得

$$0<\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

还存在 $\xi_2\in(c,b)$ 使得

$$0>\frac{F(c)-F(b)}{c-b}=F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

在 ξ_1 和 ξ_2 中总有一个是满足

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

的. 对于 $F(c)<F(a)$ 的情形也是一样. □

10.

证明 这是因为 $(f^2+(f')^2)'=2(f+f'')f'=0$. □

11.

证明 设 $y(x)$ 是一个解，那么 $y^2+(y')^2$ 是一个常数，记为 C. 那么可设 $y(x)=C\cos\theta(x)$，于是

$$-C\theta'(x)\sin\theta(x)=y'(x)=C\sin\theta(x),$$

由此可见 $\theta(x)=c-x$. 因此

$$y(x)=C\cos(c-x)=C\cos c\cos x+C\sin c\sin x.$$ □

12.

证明 根据导数的定义及拉格朗日中值定理，

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}f^{(n)}(\xi_x)=l. \qquad \square$$

1.

证明 设

$$F(x)=\begin{cases}f(-\infty), & x=-\pi/2\\ f(\tan x), & -\pi/2<x<\pi/2,\\ f(+\infty), & x=\pi/2\end{cases}\quad G(x)=\begin{cases}g(-\infty), & x=-\pi/2\\ g(\tan x), & -\pi/2<x<\pi/2,,\\ g(+\infty), & x=\pi/2\end{cases}$$

那么由柯西中值定理知存在 $\eta\in(-\pi/2,\pi/2)$ 使得

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{F(\pi/2)-F(-\pi/2)}{G(\pi/2)-G(-\pi/2)}=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}=\frac{f'(\tan\eta)}{g'(\tan\eta)},$$

于是 $\xi=\tan\eta$ 即为所求. $\square$

2.

证明 设 x_1 和 x_2 是 f 的两个不同零点，且 $x_1<x_2$. 假设 g 在 (x_1,x_2) 中没有零点，那么 $F(x)=f(x)/g(x)$ 是 $[x_1,x_2]$ 上的连续函数. 于是由罗尔定理知存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$0=F'(\xi)=-\frac{1}{g^2(\xi)}\begin{vmatrix}f(\xi) & g(\xi)\\ f'(\xi) & g'(\xi)\end{vmatrix},$$

矛盾！因此 g 在 (x_1,x_2) 中至少有一个零点. $\square$

3.

证明 注意到

$$q(x)=(1+x^2)p(x)p'(x)+x(p(x)^2+p'(x)^2)=(xp'(x)+p(x))(xp(x)+p'(x)),$$

所以我们来考察 $\varphi(x)=xp'(x)+p(x)=(xp(x))'$ 和 $\psi(x)=xp(x)+p'(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}(\mathrm{e}^{x^2/2}p(x))'$ 的零点. 因为 0 和 $p(x)$ 的 n 个大于 1 的不同零点构成 $xp(x)$ 的 $n+1$ 个零点，所以由罗尔定理知 $\varphi(x)$ 有 n 个不同的零点，它们异于 $p(x)$ 的零点. 同样地由罗尔定理知 $\psi(x)$ 有 $n-1$ 个零点，它们也异于 $p(x)$ 的零点. 假设 $\varphi(x)$ 的这 n 个零点和 $\psi(x)$ 的这 $n-1$ 个零点中有重复的，设为 x_0，那么有

$$0=\varphi(x_0)-x_0\psi(x_0)=(1-x_0^2)p(x_0).$$

由于 $x_0>1$ 且 x_0 不是 $p(x)$ 的零点，所以这是不可能的. 因此 $q(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个不同的实根. $\square$

4.

证明 假设

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda_n x}(c_1\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_n)x} + c_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_n)x} + \cdots + c_{n-1}\mathrm{e}^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x} + c_m)$$

有 n 个零点，那么由罗尔定理知

$$c_1(\lambda_1-\lambda_n)\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_n)x} + c_2(\lambda_2-\lambda_n)\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_n)x} + \cdots + c_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\mathrm{e}^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x}$$

有 $n-1$ 个零点．如此讨论下去便会导出矛盾！因此 $f(x)$ 的实零点不会超过 $n-1$ 个．当

$$f(x) = (\mathrm{e}^x-\mathrm{e})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2)\cdots(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathrm{e}^{(k-1)x}$$

时 $f(x)$ 刚好有 $n-1$ 个零点．因此 $f(x)$ 至多有 $n-1$ 个实零点． □

5.

证明 若不然，那么存在 $(x_0,b)\subset[a,+\infty)$ 使得 $f(x_0)=0$ 且在 (x_0,b) 上 $f(x)\neq 0$．由连续函数的介值性，不妨设在 (x_0,b) 上 $f(x)>0$．设 $F(x)=x-\ln f(x)$，那么 $F'(x)=1-f'(x)/f(x)\geqslant 0$，从而 $F(x)$ 在 (x_0,b) 上是递增的，这与

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = \lim_{x\to x_0^+} x-\ln f(x) = +\infty$$

矛盾！因此 $f=0$． □

6.

证明 设 $F(x)=f(x)-x/(1+x^2)$，那么 $F(0)=0=F(+\infty)$．由第1题知存在 $\xi>0$ 使得 $F'(\xi)=0$，亦即 $f'(\xi)=(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2$． □

7.

证明 根据连续函数的介值性，存在 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 使得

$$f(x_i) = \frac{k_1+k_2+\cdots+k_i}{k_1+k_2+\cdots+k_n}.$$

再根据拉格朗日中值定理，存在 $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使得

$$1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{f'(t_i)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}\Bigg/\sum_{i=1}^{n}k_i\,.$$ □

3.5　利用导数研究函数

1.

证明　(1) 因为 $f'(x)=\sec^2 x\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 是递增的.
(2) 因为 $f'(x)=-x^2/(1+x^2)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 是递减的. □

2.

证明　(1) 在第1题的(2)中已经说明了 $x-\arctan x$ 是递增的，因此当 $x>0$ 时 $x-\arctan x>0$，当 $x<0$ 时 $x-\arctan x<0$，进而 $x(x-\arctan x)>0$.

(2) 设 $f(x)=\ln(1+x)-x$，那么 $f'(x)=-x/(1+x)<0$，因此 $f(x)<f(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$. 再设 $g(x)=\ln(1+x)-x+x^2/2$，那么 $g'(x)=x^2/(1+x)>0$，因此 $g(x)>g(0)=0$，即 $\ln(1+x)>x-x^2/2$.

(3) 设 $f(x)=\sin x-x$，那么 $f'(x)=\cos x-1<0$，因此 $f(x)<f(0)=0$，即 $\sin x<x$. 再设 $g(x)=\sin x-x+x^3/6$，那么 $g'(x)=\cos x-1+x^2/2$，于是 $g''(x)=x-\sin x>0$，从而 $g'(x)>g(0)=0$，进而 $g(x)>g(0)=0$，亦即 $\sin x>x-x^3/6$.

(4) 设 $f(x)=\ln(1+x)-\arctan x/(1+x)$，那么

$$f'(x)=\frac{x^3+x^3+(1+x^2)\arctan x}{(1+x)^2(1+x^2)}>0,$$

所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $\ln(1+x)>\arctan x/(1+x)$. □

3.

证明　(1) 设 $f(x)=\tan x/x$，那么

$$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}>0,$$

因此 $f(x_2)>f(x_1)$，亦即 $\tan x_2/\tan x_1>x_2/x_1$.

(2) 如果 $x=y$，那么

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}=2^{1/\alpha}x>2^{1/\beta}x=(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}.$$

如果 $x\neq y$，不妨设 $x<y$. 令 $f(t)=(1+(x/y)^t)^{1/t}$，那么

$$f'(t)=(1+(x/y)^t)^{1/t}\left(\frac{(x/y)^t\ln(x/y)}{t((x/y)^t+1)}-\frac{\ln((x/y)^t+1)}{t^2}\right)<0,$$

所以 $f(\alpha)>f(\beta)$，亦即 $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$.

(3) 设 $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1$，那么 $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$．所以当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时 $f(x) \geqslant f(0) = 0$，亦即 $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$，当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha \geqslant 1$ 时 $f(x) \leqslant f(0) = 0$，亦即 $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$．

(4) 设

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+x^p) - \left(\frac{1-x}{2}\right)^p - \left(\frac{1+x}{2}\right)^p,$$

那么

$$f'(x) = \frac{p}{2}\left(x^{p-1} + \left(\frac{1-x}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1+x}{2}\right)^{p-1}\right) \leqslant \frac{p}{2}\left(\left(x + \frac{1-x}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1+x}{2}\right)^{p-1}\right) = 0.$$

因此 $f(x) \geqslant f(1) = 0$，亦即

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^p + \left(\frac{1+x}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1+x^p). \qquad \square$$

4.

证明 因为 $F(0) = F(1) = 0$，所以由罗尔定理知存在 $\zeta \in (0,1)$ 使得

$$F'(\zeta) = 2\zeta f(\zeta) + \zeta^2 f'(\zeta) = 0.$$

又因为 $F'(0) = 0$，所以存在 $\eta \in (0, \zeta)$ 使得

$$F''(\eta) = 2f(\eta) + 4\eta f'(\eta) + \eta^2 f''(\eta) = 0.$$

事实上还有 $F''(0) = 0$，因此存在 $\xi \in (0, \eta) \subset (0,1)$ 使得 $F'''(\xi) = 0$． $\square$

5.

证明 因为 f' 严格递增，所以 f 是严格凸函数．于是对于 $x_2 > x_1 > 0$ 有

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{x_2} \cdot 0 + \frac{x_1}{x_2} \cdot x_2\right) < \frac{x_2 - x_1}{x_2} f(0) + \frac{x_1}{x_2} f(x_2) = \frac{x_1}{x_2} f(x_2),$$

亦即 $f(x_1)/x_1 < f(x_2)/x_2$．因此 $f(x)/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上也严格递增． $\square$

6.

证明 假设 f 不是常值的，那么存在两点 a 和 b 使得 $f(a) \neq f(b)$．不妨设 $a > b$ 且 $f(a) > f(b)$．由 f 的凸性知对于 $c > b$ 有

$$f(b) = f\left(\frac{b-a}{c-a} \cdot c + \frac{c-b}{c-a} \cdot a\right) \leqslant \frac{b-a}{c-a} f(c) + \frac{c-b}{c-a} f(a),$$

整理可得

$$f(c) \geqslant f(a) + (c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

令 $c \to +\infty$ 便得到这与 f 有界是矛盾的．因此 f 是常值函数． □

7.

证明 因为 $-g'(x) \leqslant f'(x) \leqslant g'(x)$，所以 $g(x)-f(x)$ 和 $g(x)+f(x)$ 都是递增的，从而

$$g(x)-f(x) \geqslant g(a)-f(a),\ g(x)+f(x) \geqslant g(a)+f(a),$$

进而

$$g(a)-g(x) \leqslant f(x)-f(a) \leqslant g(x)-g(a),$$

亦即 $|f(x)-f(a)| \leqslant g(x)-g(a)$． □

8.

证明 设 $f(x) = x^2\mathrm{e}^{1/x-x}$, 那么 $f'(x) = -(x-1)^2\mathrm{e}^{1/x-x} \leqslant 0$. 所以当 $x>1$ 时 $f(x)<f(1)=1$, 当 $x<1$ 时 $f(x)>f(1)=1$. 从而 $(1-x)(x^2\mathrm{e}^{1/x-x}-1)>0$, 亦即 $(1-x)(x^2\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^x)>0$. □

9.

答 (1) 最大值是 $f(\pm 2)=13$，最小值是 $f(\pm 1)=4$．
(2) 最大值是 $f(-\pi/2)=\pi/2$，最小值是 $f(\pi/2)=-\pi/2$．
(3) 最小值是 $f(1/\mathrm{e})=-1/\mathrm{e}$，没有最大值．
(4) 最小值是 $f(3/2)=-1/4$，没有最大值．
(5) 最大值是 $f(-10)=132$，最小值是 $f(1)=f(2)=0$．
(6) 最大值是 $f(0)=\pi/4$，最小值是 $f(1)=0$． □

10.

解 依习惯，用 g 表示重力加速度．设力的大小是 F，力与水平面夹角为 θ．那么对每个 θ，当物体匀速运动时所需的力最小．根据牛顿第二定律，此时有

$$F\cos\theta - \mu(W\mathrm{g} - F\sin\theta) = 0,$$

所以

$$F = \frac{\mu W\mathrm{g}}{\cos\theta + \mu\sin\theta} = \frac{\mu W\mathrm{g}}{\sqrt{1+u^2}\sin(\theta + \operatorname{arccot}\mu)}.$$

由此可见当力与地面的夹角为 $\arctan\mu$ 时所需的力最小． □

11.

解 设矩形右上角的坐标是 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$，那么矩形的面积就是 $4ab\cos\theta\sin\theta = 2ab\sin 2\theta$. 因此当 $\theta = \pi/4$ 时，亦即矩形的长和宽分别是 $\sqrt{2}a$ 和 $\sqrt{2}b$ 时矩形的面积最大. □

12.

解 设圆锥的体积是定值 V，高是 h，底面半径是 r. 再记 $x = h/r$，于是由 $V = \pi hr^2/3$ 知 $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi x}}$. 不难写出圆锥的表面积是

$$S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2+h^2} = \pi\left(\frac{3V}{\pi x}\right)^{2/3}(1+\sqrt{1+x^2}) = \pi^{1/3}(3V)^{2/3}\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^{2/3}}.$$

设 $f(t) = t^{-1/3}(1+\sqrt{1+t})$，那么

$$f'(t) = \frac{t-2(1+\sqrt{1+t})}{6t^{4/3}\sqrt{1+t}}.$$

不难看出当 $t > 8$ 时 $f'(t) > 0$，当 $t < 8$ 时 $f'(t) < 0$. 因此当 $t = 8$ 时 $f(t)$ 最小，亦即当 $x = 2\sqrt{2} = h/r$ 时圆锥的表面积最小. □

13.

解 设扇形的顶角是 α，那么圆锥底面半径就是 $r = \dfrac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi}$，于是不难写出圆锥的体积是

$$\frac{\pi}{3}\sqrt{R^2-r^2}r^2 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{R^2-r^2}\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{R^2}{3}}\right)^3,$$

等号当 $\sqrt{R^2-r^2} = r/\sqrt{2}$ 时，亦即 $\alpha = 2\pi(1-\sqrt{2/3})$ 时取得. 因此当扇形的顶角为 $2\pi(1-\sqrt{2/3})$ 时圆锥的体积最大. □

14.

解 该双曲线上 $(t, 1/t)$ 处的切线方程是 $y - 1/t = -(x-t)/t^2$，由此不难写出所求梯形的面积是 $S(t) = \dfrac{(a-b)(a+b-4t)}{2t^2}$. 而 $S'(t) = \dfrac{(b-a)(a+b-2t)}{x^3}$，所以当 $t = (a+b)/2$，亦即切点为 $((a+b)/2, 2/(a+b))$ 时梯形的面积最大. □

15.

答 事实上这是一个二次函数，于是不难写出 $x^* = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$. □

16.

证明 事实上 $a^x \geqslant x^a \Leftrightarrow \ln a/a \geqslant \ln x/x$，由此不难算出 $a = \mathrm{e}$. □

17.

证明　这是因为 f 是凸函数，从而有

$$f(x)=f\left(\frac{b-x}{b-a}\cdot a+\frac{x-a}{b-a}\cdot b\right)\leqslant\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b).\qquad\square$$

18.

答　都是凸的. $\square$

19.

证明　(1) 这是因为 a^x 是严格凸函数. 等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.
(2) 因为 $x\ln x$ 是严格凸函数，所以

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1\ln x_1+x_2\ln x_2+\cdots+x_n\ln x_n),$$

亦即

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n})^{1/(x_1x_2\cdots x_n)},$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.
(3) 这是因为 $-\ln x$ 是严格凸函数. 等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. $\square$

20.

证明　设 f 和 g 是区间 I 上的两个凸函数，那么对 I 中任意两个不同的数 x_1 和 x_2 亦即任意两个满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的正数 λ_1 和 λ_2 都有

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_1g(x_1)+\lambda_2g(x_2)\\&=\lambda_1(f(x_1)+g(x_1))+\lambda_2(f(x_2)+g(x_2)).\end{aligned}$$

因此 $f+g$ 也是 I 上的凸函数. $\square$

21.

证明　若不然，存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)\neq f(a)$，那么由

$$f(x_0)=f\left(\frac{b-x_0}{b-a}\cdot a+\frac{x_0-a}{b-a}\cdot b\right)\leqslant\frac{b-x_0}{b-a}f(a)+\frac{x_0-a}{b-a}f(b)=f(a)$$

知 $f(x_0)<f(a)$. 不妨设 $x_0\in(a,c)$，于是

$$f(c)=f\left(\frac{b-c}{b-x_0}x_0+\frac{c-x_0}{b-x_0}b\right)\leqslant\frac{b-c}{b-x_0}f(x_0)+\frac{c-x_0}{b-x_0}f(b)<\frac{b-c}{b-x_0}f(a)+\frac{c-x_0}{b-x_0}f(b)=f(a),$$

矛盾！因此 f 是常值函数. $\square$

22.

证明　对任意的 $x_1, x_2 \in [a,d]$，不妨设 $x_1 < x_2$. 如果 $(x_1, x_2) \subset [a,c]$ 或 $(x_1, x_2) \subset [b,d]$，那么没什么好说的. 当 $x_1 < b$ 且 $x_2 > c$ 时，任取 $x \in (x_1, x_2)$.

当 $x \leqslant b$ 时，利用 $[a,c]$ 上的凸性有

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

利用 $[b,d]$ 上的凸性有

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leqslant \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c},$$

从而

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c},$$

进而

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}.$$

利用 $[a,c]$ 上的凸性还有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(c)-f(x)}{c-x},$$

所以

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

当然还有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

当 $b < x < c$ 时，利用 $[a,c]$ 上的凸性有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(c)-f(x)}{c-x},$$

利用 $[b,d]$ 上的凸性有

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

因此

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

当然还有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

当 $x \geqslant c$ 时，利用 $[a,c]$ 上的凸性有

$$\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b},$$

利用 $[b,d]$ 上的凸性有

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b},$$

从而

$$\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b},$$

进而

$$\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

利用 $[b,d]$ 上的凸性还有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

所以

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

当然还有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

因此 f 在 $[a,d]$ 上也是凸函数. □

23.

证明　根据拉格朗日中值定理，存在 $\eta_1 \in (a,c)$ 和 $\eta_2 \in (c,b)$ 使得

$$0 < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\eta_1),\ 0 > \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\eta_2),$$

进而又存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ 使得

$$0 > \frac{f'(\eta_2)-f'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1} = f''(\xi).$$ □

1.

证明　(1) 对任意的 $x_0 \in I$，在 I 中再任取一个 $x' < x_0$，那么对的 $h > 0$ 有

$$\frac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'} \leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

由 f 的凸性知 $(f(x_0+h)-f(x_0))/h$ 关于 h 是递增的，从而由单调有界原理知 $\lim\limits_{h\to0^+}(f(x_0+h)-f(x_0))/h$ 存在，亦即 $f'_+(x_0)$ 存在，进而 f'_+ 存在. 同样的道理，f'_- 也存在. 在 I 中任取 $x_1<x_2$，那么对足够小的正数 h 有

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1+h)}{x_2-(x_1+h)}\leqslant\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h},$$

再令 $h\to0^+$ 就得到 $f'_+(x_1)\leqslant f'_+(x_2)$，因此 f'_+ 是递增的. 同理 f'_- 也是递增的. 在

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\leqslant\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

中令 $h\to0^+$ 就得到 $f'_-\leqslant f'_+$.

(2) 当 f'_+ 在点 x 处左连续时，先任意取定 $\varepsilon>0$，那么对于 $h\in(0,\varepsilon/2)$ 就有

$$\frac{f(x-\varepsilon+h)-f(x-\varepsilon)}{h}\leqslant\frac{f(x)-f(x-h)}{h},$$

令 $h\to0^+$ 就得到 $f'_+(x-\varepsilon)\leqslant f'_-(x)$. 令 $\varepsilon\to0^+$ 并利用左连续性就得到 $f'_+(x)\leqslant f'_-(x)$. 又已经知道 $f'_+(x)\geqslant f'_-(x)$，所以 $f'_+(x)=f'_-(x)$，因此 f 在点 x 处可导. 对称地，当 f'_- 在点 x 处右连续时，f 也在点 x 处可导.

(3) 取定 $\delta>0$ 使得 $a-\delta,b+\delta\in I$，那么有

$$\frac{f(a)-f(a-\delta)}{\delta}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(b+\delta)-f(b)}{\delta},$$

于是取

$$M=\max\left\{\left|\frac{f(a)-f(a-\delta)}{\delta}\right|,\left|\frac{f(b+\delta)-f(b)}{\delta}\right|\right\}$$

就有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$. □

注意

这道题还蕴含了凸函数的不可导点至多只有可数个. 事实上，设凸函数 f 的不可导点的全体是 A，那么 $\{(f'_-(x),f'_+(x))\colon x\in A\}$ 是一族不交的开区间，从而是可数集.

2.

证明 当 f 是凸函数时，对于 $x<c$ 有

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c),$$

对于 $x>c$ 有

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c).$$

于是取 $a=(f'_-(c)+f'_+(c))/2$ 就有 $f(x)\geqslant a(x-c)+f(c)$.

当对每一点 $c\in I$ 都存在数 a 使得 $f(x)\geqslant a(x-c)+f(c)$ 时，对任意的 $(x_1,x_2)\subset I$，对每个 $c\in(x_1,x_2)$ 也存在 a 使得

$$f(x_1)\geqslant a(x_1-c)+f(c),\ f(x_2)\geqslant a(x_2-c)+f(c),$$

从而

$$\frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}\leqslant a\leqslant\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}.$$

因此 f 是凸函数.

从几何上看，f 是凸函数当且仅当对于 f 的图像上的每一点都存在一条过这个点的直线使得 f 的图像在这条直线的上方. □

3.

证明 这是第2题的特殊情形，此时第2题中的 $a=f'(c)$. □

4.

证明 (1) 若不然，存在两个数 x_1 和 x_2，虽然 $x_1<x_2$，但是 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. 于是由

$$f(x_1)\mathrm{e}^{f(x_1)}=x_1<x_2=f(x_2)\mathrm{e}^{f(x_2)}$$

知

$$1\leqslant\mathrm{e}^{f(x_1)-f(x_2)}<\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\leqslant 1,$$

矛盾！所以 f 是严格递增的.

(2) 若不然，由 f 递增知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 是一个有限数，记为 A，那么有

$$\lim_{x\to+\infty}x=\lim_{x\to+\infty}f(x)\mathrm{e}^{f(x)}=A\mathrm{e}^{A},$$

矛盾！所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(3) 当 $x>0$ 时有

$$\ln x=\ln f(x)+f(x),$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\ln f(x))/f(x)+1}=1.$$ □

5.

证明 显然 $p'''-p''-p'+p$ 是一个最高次项系数为正的偶数次多项式,从而 $p-p''$ 也是一个最高次项系数为正的偶数次多项式，于是 $p-p''$ 有一个最小值点 x_0. 由费马定理知 $p'(x_0)-p'''(x_0)=0$，进而

$$p(x)-p''(x)\geqslant p(x_0)-p''(x_0)=p'''(x_0)-p''(x_0)-p'(x_0)+p(x_0)\geqslant 0.$$

由于 $p+p'$ 也是一个最高次项系数为正的偶数次多项式，所以也有一个最小值点 x_1. 由费马定理知 $p'(x_1)+p''(x_1)=0$，所以

$$p(x)+p'(x)\geqslant p(x_1)+p'(x_1)=p(x_1)+p'(x_1)-(p'(x_1)+p''(x_1))=p(x_1)-p''(x_1)\geqslant 0.$$

同样地，p 是一个最高次项系数为正的偶数次多项式，所以也有一个最小值点 x_2，那么 $p'(x_2)=0$，所以

$$p(x)\geqslant p(x_2)=p(x_2)+p'(x_2)\geqslant 0.$$ □

6.

证明 这是因为由詹森不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ln x_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\ln x_j=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$ □

7.

证明 设 y_1 和 y_2 都是微分方程的两个连续解，再取 $u=y_1-y_2$，那么有

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=0,\ u(a)=u(b)=0.$$

如果有 $c\in(a,b)$ 使得 $u(c)\neq 0$，不妨设 $u(c)>0$，那么 u 在 (a,b) 上取到最大值，不妨设 $u(c)$ 就是最大值，于是由费马定理知 $u'(c)=0$，从而 $u''(c)=-q(c)u(c)>0$，这意味着 c 是 u 的一个严格极小值点，矛盾！因此 $u\equiv 0$. 所以这个微分方程有解必唯一. □

8.

证明 (1) 当 $n=1$ 时，这是中学生也会证的. 假设对于 $x<0$ 已经有 $P_{2n-2}(x)>\mathrm{e}^x>P_{2n-1}(x)$，设 $f(x)=\mathrm{e}^x-P_{2n}(x)$，$g(x)=\mathrm{e}^x-P_{2n+1}(x)$，那么

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-P_{2n-1}(x)>0,\ g'(x)=\mathrm{e}^x-P_{2n}(x)<0,$$

所以 $f(x)<f(0)=0$，$g(x)>g(0)=0$. 因此 $P_{2n}(x)>\mathrm{e}^x>P_{2n+1}(x)$. 由归纳法原理知结论普遍成立.

(2) 归纳易得 $\mathrm{e}^x>P_n(x)$. 另一方面，有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{x}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\cdots+\binom{n}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + x + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)x^n \\
&\leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = P_n(x).
\end{aligned}
$$

□

9.

证明 对每个 $t \in \mathbb{R}$ 作函数

$$f_t(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + t(x - a)(x - b),$$

那么不难算出

$$\mathrm{D}^2 f_t(x) = \mathrm{D}^2 f(x) + 2t = 2t.$$

当 $t > 0$ 时，假设存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f_t(x_0) > 0$，那么由 $f_t(a) = f_t(b) = 0$ 知 f_t 在 (a, b) 上取到最大值．不妨设 x_0 就是 f_t 的最大值点．由 $\mathrm{D}^2 f_t(x_0) = 2t > 0$ 知存在 $h > 0$ 使得 $f_t(x_0 + h) + f_t(x_0 - h) - 2f_t(x_0) > 0$，所以

$$f(x_0) < \frac{1}{2}(f(x_0 + h) + f(x_0 - h)) \leqslant f(x_0),$$

矛盾！因此当 $t > 0$ 时 $f_t \leqslant 0$．对称地，当 $t < 0$ 时 $f_t \geqslant 0$．由 f_t 关于 t 的连续性知 $f_t = 0$，亦即

$$f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

因此取

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\ c_2 = f(a) - a\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

即可． □

10.

证明 若不然，那么

$$m = \min\left\{n\colon \text{存在}\, x_0 \in (0, \pi)\, \text{使得} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx_0}{k} \leqslant 0\right\}$$

是定义良好的．设 $S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}$．因为有 $x_0 \in (0, \pi)$ 使得 $S_m(x_0) \leqslant 0 = S_m(0) = S_m(\pi)$，所有 $S_m(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上能取到最小值，不妨设 x_0 就是其最小值点．由 m 的最小性知 $S_{m-1}(x_0) > 0$，所以 $\sin mx_0 < 0$，这意味着 $\sin(mx_0/2) \neq 0$ 和 $\cos((m + 1)x_0/2) \neq 0$[1]．由费马定理知

$$0 = S_m'(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \cos kx_0 = \frac{\cos((m + 1)x_0/2)\sin(mx_0/2)}{\sin(x_0/2)} \neq 0,$$

矛盾！ □

[1]这是因为 $\cos((m + 1)x_0/2) = 0 \Rightarrow (m + 1)x_0 = (2n + 1)\pi \Rightarrow \sin mx_0 = \sin((2n + 1)\pi - x_0) = \sin x_0 > 0$．

3.6 洛必达法则

1.

答 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{bx}}{\sin ax-\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\mathrm{e}^{ax}-b\mathrm{e}^{bx}}{a\cos ax-b\sin bx}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x}{\sin x}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{x^2\cos x+2x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{x\cos x+2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{3\cos x-x\sin x}=-\dfrac{1}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{e}^x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x^3}=+\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{1/\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1/(1-x)}{-1/(x\ln^2 x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln^2 x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2\ln x/x}{-1}=0$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln x/(1-x)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^x\dfrac{a}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\ln\cos(a/x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos(a/x)}{1/x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{a\tan(a/x)/x^2}{-1/x^2}}=1$.

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-1/x}{(x-1)/x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1+x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-x-1}{(\mathrm{e}^x-1)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{(x+2)\mathrm{e}^x}=\dfrac{1}{2}$.

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+1/x)^x-\mathrm{e}}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+1/x)^x((1+x)\ln(1+1/x)-1)/(1+x)}{-1/x^2}=-\mathrm{e}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2((1+x)\ln(1+1/x)-1)}{1+x}=-\mathrm{e}\lim\limits_{x\to\infty}x((2+3x)\ln(1+1/x)-3)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\arccos x-\ln(\pi/2)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-1/(\sqrt{1-x^2}\arccos x)}=\mathrm{e}^{-2/\pi}$.

(14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln\arctan x-\ln(\pi/2)}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{1/((1+x^2)\arctan x)}=1$. □

2.

证明 根据洛必达法则马上得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=f''(x).$$

如果 f 是凸函数，那么

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}(x+h)+\frac{1}{2}f(x-h)\right)\leqslant\frac{1}{2}f(x+h)+\frac{1}{2}f(x-h),$$

所以 $f''\geqslant 0$. □

3.

证明 显然只需证明 g' 在 $x=0$ 处连续. 事实上

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2},$$

而

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2},$$

因此 g' 在 $x=0$ 处连续. □

4.

证明 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)\ln x+f(x)/x}{1/x}=l.$$ □

5.

证明 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x(f(x)+f'(x))}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x(f(x)+2f'(x)+f''(x))}{\mathrm{e}^x}=l,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^xf(x)}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x(f(x)+f'(x))}{\mathrm{e}^x}=l.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))-\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

还有

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2f'(x)+f''(x))-\lim_{x\to+\infty}f(x)-2\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$ □

3.7 函数作图

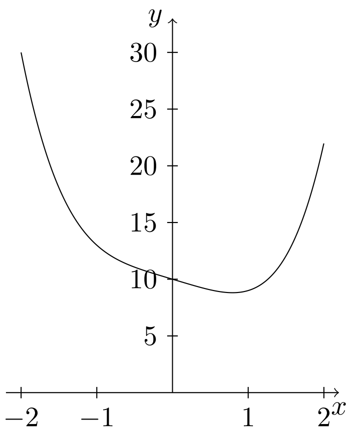

图 3.1: $y = x^4 - 2x + 10$

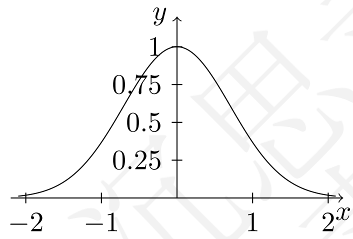

图 3.2: $y = \mathrm{e}^{-x^2}$

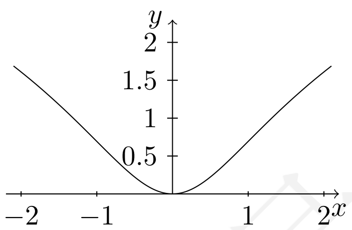

图 3.3: $y = \ln(1 + x^2)$

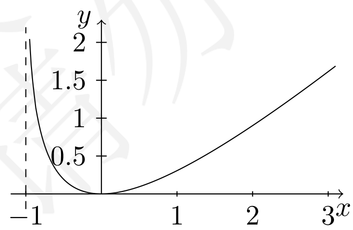

图 3.4: $y = x - \ln(1 + x)$

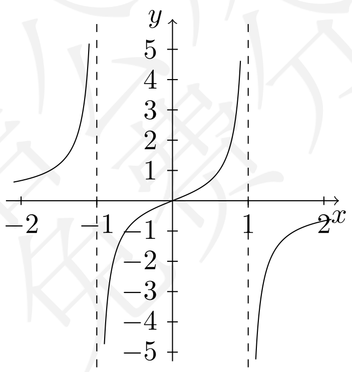

图 3.5: $y = x/(1 - x^2)$

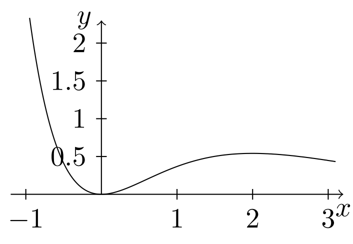

图 3.6: $y = x^2\mathrm{e}^{-x}$

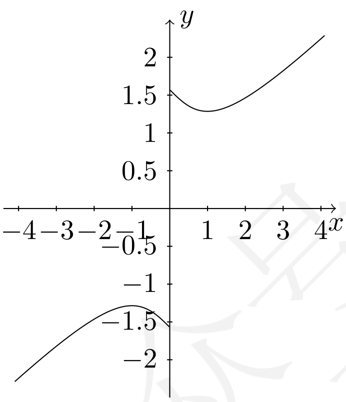

图 3.7: $y = x/2 + \operatorname{arccot} x$

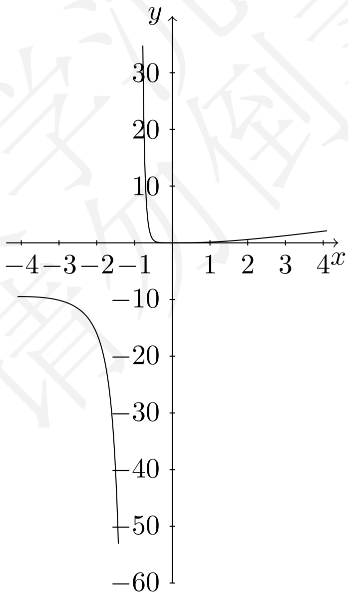

图 3.8: $y = x^4/(1+x)^3$

第四章　一元微分学的顶峰——泰勒定理

4.1　函数的微分

1.

答　(1) $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$.
(2) $\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x/(1+(ax+b)^2)$.
(3) $\mathrm{d}y = x\sin x\,\mathrm{d}x$.
(4) $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sqrt{x^2+a^2}$. □

2.

答　(1) $\mathrm{d}\ln x = \mathrm{d}x/x$.
(2) $\mathrm{d}\arctan x = \mathrm{d}x/(1+x^2)$.
(3) $\mathrm{d}(2\sqrt{x}) = \mathrm{d}x/\sqrt{x}$.
(4) $\mathrm{d}(x^2+x) = (2x+1)\,\mathrm{d}x$.
(5) $\mathrm{d}(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x$.
(6) $\mathrm{d}\,\mathrm{arsinh}\,x = \mathrm{d}x/\sqrt{1+x^2}$.
(7) $\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-a}/a) = \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$.
(8) $\mathrm{d}(-1-\cos 2x)/4 = \cos x\sin x\,\mathrm{d}x$.
(9) $\mathrm{d}\ln\ln x = \mathrm{d}x/(x\ln x)$.
(10) $\mathrm{d}\sqrt{x^2+a^2} = x\,\mathrm{d}x/\sqrt{x^2+a^2}$.
(11) $\mathrm{d}(-\cos^3 x)/3 = \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x$.
(12) $\mathrm{d}(2x-\sin 2x)/4 = \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. □

3.

答　(1) $\mathrm{d}y = (u'vw + uv'w + uvw')\,\mathrm{d}x$.
(2) $\mathrm{d}y = (u'/v^2 - 2uv'/v^3)\,\mathrm{d}x$.
(3) $\mathrm{d}y = -(u'u + v'v + w'w)\,\mathrm{d}x/(u^2+v^2+w^2)^{3/2}$.
(4) $\mathrm{d}y = (u'vw - uv'w - uvw')\,\mathrm{d}x/(u^2+v^2w^2)$.

(5) $\mathrm{d}y = (u'u + v'v + w'w)\,\mathrm{d}x/(u^2+v^2+w^2)$. □

4.

答 (1) $y' = 1/(1+\mathrm{e}^y)$.
(2) $y' = y/(1+y)$.
(3) $y' = b^2x/(a^2y)$.
(4) $y' = \sqrt{y/x}$.
(5) $y' = (x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2})/(2xy\sqrt{x^2+y^2} - x^2y)$. □

5.

答 (1) $\sqrt[4]{80} \approx \sqrt[4]{81} - \dfrac{1}{4}81^{-3/4} \approx 2.99074$.
(2) $\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ - \dfrac{\pi}{180}\cos 30^\circ \approx 0.484885$.
(3) $\arctan 1.05 \approx \arctan 1 + \dfrac{0.05}{1+1^2} \approx 0.810398$.
(4) $\lg 11 \approx \lg 10 + \dfrac{1}{10\ln 10} \approx 1.044139$. □

4.2 带佩亚诺余项的泰勒定理

1.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^4) - (1 - x^2/2 + x^4/8 + o(x^4))}{x^4} = -\dfrac{1}{12}$.
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 + \alpha x + o(x) - (1 + \beta x + o(x))}{\alpha x + o(x) - (\beta x + o(x))} = 1$.
(3)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right)\\ =&\lim_{x\to\infty}\left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x^3\left(1 + \frac{1}{2x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 + x\ln a + x^2\ln^2 a + o(x^2) + 1 - x\ln a + x^2\ln^2 a + o(x^2) - 2}{x^2} = \ln^2 a$. □

2.

答 不一定．比如取 $f(x) = x^{n+1}D(x)$，其中 $D(x)$ 是狄利克雷函数．那么

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} xD(x) = 0,$$

所以

$$f(x)=o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}0x^k+o(x^n).$$

由于 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处不连续，所以 $f'(0),f''(0),\ldots$ 都是不存在的. □

3.

解 因为

$$\begin{aligned}&\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)\left(1+\frac{2}{n^{\alpha+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^{\alpha+2}}\right)\right)^{n^\alpha}=n^\alpha\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^{\alpha+2}}\right)\\=&n^\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^{\alpha+2}}+o\left(\frac{k}{n^{\alpha+2}}\right)\right)=\frac{n(n+1)}{2n^2}+o(1),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)\left(1+\frac{2}{n^{\alpha+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^{\alpha+2}}\right)\right)^{n^\alpha}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$ □

1.

解 因为

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^2\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\frac{\left(\left(1+\frac{1}{t+1}\right)^{t+1}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}-1\right)}{1/t^2}\\=&\mathrm{e}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{t+1}\right)^{t+1}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}-1\right)}{1/t^2}\\=&\mathrm{e}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{t+1}\right)^{t+1}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}\left(\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{t+2}{t+1}\ln\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right)}{-2/t^3}\\=&\mathrm{e}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{t+2}{t+1}\ln\left(1-\frac{1}{(t+1)^2}\right)\right)}{-2/t^3}=\mathrm{e}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{t+2}{(t+1)^3}\right)}{-2/t^3}=\frac{\mathrm{e}}{2}.\end{aligned}$$

所以 $f(2)=\mathrm{e}/2$，当 $x<2$ 时 $f(x)=0$，而当 $x>0$ 时极限不存在，从而 $f(x)$ 无定义. 因此 f 的定义域是 $(-\infty,2]$，值域是 $\{0,\mathrm{e}/2\}$. □

2.

证明　这是因为

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln(1+1/n)}=\mathrm{e}^{1-1/(2n)+1/(3n^2)-1/(4n^3)+1/(5n^4)+o(1/n^4)}\\
=&\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-1/(2n)+1/(3n^2)-1/(4n^3)+1/(5n^4)+o(1/n^4)}\\
=&\mathrm{e}\left(1+\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^2\right.\\
&+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^3+\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^4\\
&\left.+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\\
=&\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}-\frac{7}{16n^3}+\frac{2447}{5760n^4}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}
$$

□

3.

证明　注意到

$$
\begin{aligned}
\ln(1-x)^2=2\ln(1-x)&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{2x^k}{k}+o(x^n)\\
&=\ln(1-2x+x^2)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k}{k}+o(x^n)\ (x\to 0),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}=o(x^n)\ (x\to 0).
$$

因此这个多项式能被 x^{n+1} 整除. □

4.

证明　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 是一件很容易的事情，这里从略. 根据斯托尔兹定理，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}nx_n^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}^2-1/x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/\sin^2 x_n-1/x_n^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{(x+x+x^3/6+o(x^3))(x-(x+x^3/6+o(x^3)))}=3,
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n/3}x_n=1$. □

5.

证明 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n/n=0$ 是一件很容易的事情，这里从略. 根据斯托尔兹定理，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n/y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)/y_{n+1}-n/y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/\ln(1+y_n/n)-n/y_n}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x-(x-x^2/2+o(x^2))}=2.\end{aligned}$$ □

4.3 带拉格朗日余项和柯西余项的泰勒定理

1.

答 $5x^4+4x^3+3x^2+2x+1=5(x+1)^4-16(x+1)^3+21(x+1)^2-12(x+1)+3$. □

2.

答 (1) $-2x^4+2x^2+2x+1$.

(2) $-\dfrac{x^5}{15}-\dfrac{5x^4}{6}-\dfrac{2x^3}{3}+x^2+2x+1$.

(3) $-\dfrac{x^6}{45}-\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^2}{2}$.

(4) $\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{x^3}{3}+x$.

(5) $\dfrac{5x^6}{16}+\dfrac{3x^4}{8}+\dfrac{x^2}{2}+1$. □

3.

答 (1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{\sin((k+1)\pi/2)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$.

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{\cos(\pi+k\pi/2)}{k!}(x-\pi)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}(x-\pi)^{2k}$.

(3) $\displaystyle \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!}$.

(4) $\displaystyle \ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k2^k}(x-2)^k$.

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k+1}$. □

4.

证明 条件蕴含着

$$|f^{(n)}(0)-g^{(n)}(0)|=0,\ n=0,1,2,\ldots.$$

于是根据带拉格朗日余项的泰勒公式，对每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in(-1,1)$ 都存在一个介于 x 和 0 之间的数 $\xi_{n,x}$ 使得

$$|f(x)-g(x)|=\frac{|f^{(n)}(\xi_{n,x})-g^{(n)}(\xi_{n,x})|}{n!}|x|^n\leqslant|\xi_{n,x}x^n|\leqslant|x|^{n+1}.$$

令 $n\to\infty$ 就得到 $|f(x)-g(x)|=0$，亦即 $f=g$. □

5.

证明 一方面，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots-\frac{x^{2n-2}}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(1+\theta x)}<x-\frac{x^2}{2}+\cdots-\frac{x^{2n-2}}{2n-2}+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\ (0<\theta<1),$$

另一方面，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{1}{2n}\frac{x^{2n}}{(1+\theta x)}>x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{2n}\ (0<\theta<1).$$ □

1.

证明 根据带佩亚诺余项的泰勒公式有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}+o(h^{n+1}),$$

所以

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_nh)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}+o(h^{n+1}),$$

由此可得

$$\theta_n=\left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+o(1)\right)\Bigg/\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_nh)-f^{(n)}(x_0)}{\theta_nh}.$$

令 $h\to0$ 并利用导数的定义就得到 $\lim\limits_{h\to0}\theta_n=1/(n+1)$. □

2.

证明 根据带拉格朗日余项的泰勒公式，存在 $\xi\in(a,(a+b)/2)$ 和 $\eta\in((a+b)/2,b)$ 使得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

以及

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\eta)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

因此

$$|f(b)-f(a)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}-\frac{f''(\eta)}{2}\right|\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}(|f''(\xi)|+|f''(\eta)|)\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\leqslant \max\{|f''(\xi)|,|f''(\eta)|\}\frac{(b-a)^2}{4},$$

于是记 $\max\{|f''(\xi)|,|f''(\eta)|\}=f(c)$ 就有

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|. \qquad \square$$

3.

证明 因为 $-1<0=f(0)=f(1)$，所以 f 在 $(0,1)$ 上取到最小值，不妨设最小值点为 x_0，那么根据费马定理有 $f'(x_0)=0$. 根据带拉格朗日余项的泰勒公式，存在 $\zeta\in(0,x_0)$ 和 $\eta\in(x_0,1)$ 使得

$$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\zeta)}{2}(0-x_0)^2=-1+\frac{f''(\zeta)}{2}x_0^2$$

以及

$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x_0)^2=-1+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x_0)^2,$$

于是

$$\max\{f''(\zeta),f''(\eta)\}=2\max\{1/x_0^2,1/(1-x_0)^2\}\geqslant 8,$$

从而取 ξ 使得 $f''(\xi)=\max\{f''(\zeta),f''(\eta)\}$ 即可. $\square$

4.

证明 因为

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)}{n!}h^n,$$

所以

$$f'(x_0+\theta h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)}{n!}h^{n-1}.$$

又因为

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_2\theta h)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},$$

所以

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)}{n!}h^{n-1}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_2\theta h)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}.$$

于是利用连续性就得到

$$\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)}{nf^{(n)}(x_0+\theta_2\theta h)}\right)^{1/(n-1)}=\frac{1}{n^{1/(n-1)}}. \qquad \square$$

5.

证明　(1) 当 $x \geqslant 0$ 时没什么好说的．当 $x < 0$ 时，根据带拉格朗日余项的泰勒公式，

$$0 < \mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{n+1}x^{n+1} < 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

(2) 奇数次多项式当然有实零点．因为 $P_n' = P_{n-1} > 0$，所以 P_n 是严格单调的，从而实零点是唯一的．

(3) 因为

$$P_{2n+1}(-2n-2) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-2n-2)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-2n-2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{n}(2(k-n)-1)\frac{(2n+2)^{2k}}{(2k+1)!} < 0,$$

所以 $x_n > -2n-2$，从而

$$P_{2n+1}(x_{n-1}) = P_{2n-1}(x_{n-1}) + \frac{x_{n-1}^{2n}}{(2n)!} + \frac{x_{n-1}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x_{n-1}^{2n}(2n+1+x_{n-1})}{(2n+1)!} > 0 = P_{2n+1}(x_n),$$

进而 $x_{n-1} > x_n$，即 $\{x_n\}$ 是严格递减的．

假设 $\{x_n\}$ 有有限的极限 x_0，那么 $x_0 < x_n < 0$，于是

$$\mathrm{e}^{x_0} < \mathrm{e}^{x_n} = P_{2n+1}(x_n) + \frac{\mathrm{e}^{\xi_n}}{(2n+2)!}x_n^{2n+2} = \frac{\mathrm{e}^{\xi_n}}{(2n+2)!}x_n^{2n+2} < \frac{x_0^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0\ (n\to\infty),$$

矛盾！因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$．　□

6.

证明　因为

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,$$
$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2,$$

所以

$$f(2) - f(0) = 2f'(x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2 - \frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

从而

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \frac{1}{2}\left|f(2) - f(0) - \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2 + \frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(|f(2)| + |f(0)| + \frac{|f''(\eta)|}{2}(2-x)^2 + \frac{|f''(\xi)|}{2}x^2\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}((2-x)^2 + x^2)\right) \leqslant 2.
\end{aligned}$$

因为当 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ 时可以取到等号，所以 2 是最小的．　□

7.

证明 因为

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\eta)}{2}h^2,$$

所以

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2-\frac{f''(\eta)}{2}h^2,$$

从而

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\left(\left(\frac{|f''(\xi)|}{2}+\frac{|f''(\eta)|}{2}\right)h+\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{h}\right)\leqslant\frac{M_2h}{2}+\frac{M_0}{h}.$$

特别地，取 $h=\sqrt{2M_0/M_2}$ 就得到 $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$，进而

$$2M_0M_2\geqslant\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|^2=M_1^2.$$

□

第五章　求导的逆运算

5.1　原函数的概念

解　(1) $\displaystyle\int(2+x^5)^2\,\mathrm{d}x=\int(4+4x^5+x^{10})\,\mathrm{d}x=4x+\frac{2x^6}{3}+\frac{x^{11}}{11}+C$.

(2) $\displaystyle\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+x-2\ln x+C$.

(3) $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int(x^{1/2}-x^{-3/2})\,\mathrm{d}x=2x^{-1/2}+\frac{2x^{3/2}}{3}+C$.

(4) $\displaystyle\int\cosh x\,\mathrm{d}x=\sinh x+C$.

(5) $\displaystyle\int\sinh x\,\mathrm{d}x=\cosh x+C$.

(6) $\displaystyle\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^x\times 5\ln 2}-\frac{2}{5^x\ln 5}+C$.

(7) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C$.

(8) $\displaystyle\int\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x=C+\begin{cases}-\cos x-\sin x, & \sin x\geqslant\cos x\\ \sin x+\cos x, & \sin x\leqslant\cos x\end{cases}.$

(9) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C$.

(10) $\displaystyle\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{2}+C$.

(11) $\displaystyle\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

(12) $\displaystyle\int\frac{x^5}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-x+x^2-x^3+x^4-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=x-\frac{x^2}{x}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ln(1+x)+C$.

(13) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int(\csc^2 x+\sec^2 x)\,\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C$.

(14) $\displaystyle\int\frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C$. □

5.2 分部积分法和换元法

1.

解 (1) $\int \arctan x \,\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

(2) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

(3) $\int x\,\mathrm{arccot}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{arccot}\,x\,\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arccot}\,x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arccot}\,x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\arctan x + C$.

(4) $\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \arccos x\,\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(2+x^2) + C$.

(5) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$.

(6) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x^{3/2} = \frac{8}{27}\int \ln^2(x^{3/2})\,\mathrm{d}x^{3/2} = \frac{8}{27}x^{3/2}(2-2\ln(x^{3/2})+\ln^2(x^{3/2})) + C = \frac{2}{27}x^{3/2}(4-12\ln x + 9\ln^2 x)$.

(7) $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x^2\sin x + 2\int x\,\mathrm{d}\cos x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,\mathrm{d}x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$.

(8) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\tan x = x\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}x = x\tan x + \ln\cos x + C$.

(9) $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \arctan x\,\mathrm{d}\frac{1}{x} = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = -\frac{\arctan x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}(1+x^2) + C$.

(10) $\int x^2\cosh x\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}\sinh x = x^2\sinh x - 2\int x\sinh x\,\mathrm{d}x = x^2\sinh x - 2\int x\,\mathrm{d}\cosh x = x^2\sinh x - 2x\cosh x + 2\int \cosh x\,\mathrm{d}x = x^2\sinh x - 2x\cosh x + 2\sinh x + C$.

(11)(12) 因为

$$\begin{cases}\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = x\cos\ln x - \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x\\ \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = x\sin\ln x + \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x\end{cases},$$

所以

$$\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C,\quad \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C. \qquad \square$$

2.

答　利用分部积分法和归纳法不难写出

$$\int p(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{a^{i+1}}p^{(i)}(x)\right)\mathrm{e}^{ax}+C.$$ □

3.

答　$\int xf''(x)\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)-\int f'(x)\,\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C.$ □

4.

解　(1) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x^2=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C.$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$

(3) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\int \ln^2 x\,\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$

(4) $\int \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2+4}=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}=2\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}=2\arctan\mathrm{e}^x+C.$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+x}=2\arctan\sqrt{x}+C.$

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int\frac{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\cot\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x\ln\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}\ln\ln x}{\ln\ln x}=\ln\ln\ln x+C.$

(9) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\int\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\frac{1}{x}=\cos\frac{1}{x}+C.$

(10) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\arctan^2 x\,\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{3}\arctan^3 x+C.$

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b}\int\frac{\mathrm{d}(a+bx)}{(a+bx)^2}=-\frac{1}{b(a+bx)}+C.$

(12) $\int \cos ax\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\sin(a+b)x-\sin(a-b)x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(a-b)x}{a-b}-\frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right)+C.$

(13) $\int \cos ax\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b}+\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right)+C.$

(14) $\int \cos ax\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b}-\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right)+C.$

(15) $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int(\cos 4x-4\cos 2x+3)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3x}{8}+C.$

(16) $\displaystyle\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{80}\cos 5x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{5}{8}\cos x + C.$

(17) $\displaystyle\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{2/3} + C.$

(18) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x} = \int\frac{\mathrm{d}\tan x}{2+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$

(19) $\displaystyle\int \frac{\cos x\sin x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin 2x}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\cos 2x}{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x} =$
$\displaystyle\frac{1}{2(b^2-a^2)}\ln|a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x| + C.$

(20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\tan\frac{x+\pi/4}{2}\right| + C.$

(21) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{1}{\sin(x+\arcsin(a/\sqrt{a^2+b^2}))} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arcsin(a/\sqrt{a^2+b^2})}{2}\right|$
C

(22) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{3/2}} + C.$

(23) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}\ln x = \frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x} + C.$

(24) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2) + C.$

(25) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)^{3/2}}} = \int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$

(26) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} \overset{x=\tan t}{=} \int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{\arctan x}{2}\right| + C.$

(27) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$

(28) $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{x}^2 = -\frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2} + C.$

(29) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

(30) $\displaystyle\int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int(\sqrt{x})^3\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x} + 6(x-2)\sin\sqrt{x} + C.$

(31) $\displaystyle\int \frac{x^{n/2}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n+2}\int\frac{\mathrm{d}x^{n/2+1}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} = \frac{2}{n+2}\ln(x^{n/2+1}+\sqrt{1+x^{n+2}}) + C.$

(32) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int\left(\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$

(33) $\displaystyle\int \frac{\cos x\sin x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan\sin^2 x + C.$ □

5.

证明 使用分部积分法可以直接写出

$$\int \ln^n x\,\mathrm{d}x = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

6.

答 (1) $\int (x^2+a^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\sinh t}{=} \frac{1}{a^2}\int \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\tanh t + C = \frac{1}{a^2}\tanh\operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + C$.

(2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\cosh t}{=} a^2\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (\cosh 2t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\sinh 2t + \frac{a^2}{2}t + C = \frac{a^2}{4}\sinh 2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C$.

(3) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\cosh t}{=} a^2\int \sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (\cosh 2t-1)\,\mathrm{d}tt = \frac{a^2}{4}\sinh 2t - \frac{a^2}{2}t + C = \frac{a^2}{4}\sinh 2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C$. $\square$

7.

答 (1) $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{4}{x}+\left(1-\frac{4}{x}\right)'\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left(1-\frac{4}{x}\right)\mathrm{e}^x + C$.

(2) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + C$. $\square$

8.

答 (1) 因为 $f'(x) = 1/\sqrt{x}$，所以 $f(x) = 2\sqrt{x} + C$.

(2) 因为 $f'(x) = 1-x$，所以 $f'(x) = x - x^2/2 + C$. $\square$

5.3 有理函数的原函数

解 (1) $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \left(\frac{2}{x-2}+\frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{10}\ln|2x+1| + C$.

(2) $\int \frac{2x^2+1}{(x+3)(x-1)(x-4)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{11}{7(x-4)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{19}{28(x+3)}\right)\mathrm{d}x = \frac{11}{7}\ln|x-4| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{19}{28}\ln|x+3| + C$.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^3+3x^2+x} = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}-\frac{4}{1+2x}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + \ln|1+x| - 2\ln|1+2x| + C$.

(4) $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(2+x)^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|1+x| + \frac{4}{2+x} + C$.

(5) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{11}{(x-2)^3}+\frac{4}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} + C$.

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{(2+x)^2} - \frac{2}{2+x} + \frac{4}{(4+x)^2} + \frac{2}{4+x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2+x} - 2\ln|2+x| - \frac{4}{4+x} + 2\ln|4+x| + C$.

(7) $\displaystyle\int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{12}{(1+2x)^3} - \frac{6}{(1+2x)^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|1+x| - \frac{3}{(1+2x)^2} + \frac{3}{1+2x} + C$.

(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \int\left(\frac{1}{8(1+x)} - \frac{1}{(2+x)^2} + \frac{2}{2+x} - \frac{1}{2(3+x)^3} - \frac{5}{4(3+x)^2} - \frac{17}{8(3+x)}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\ln|1+x| + \frac{1}{2+x} + 2\ln|2+x| + \frac{1}{4(3+x)^2} + \frac{5}{4(3+x)} - \frac{17}{8}\ln|3+x| + C$.

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1/2-x}{1-x+x^2} + \frac{3/2}{3/4+(x-1/2)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|1+x| + \frac{1}{6}\ln|1-x+x^2| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}} + C$.

(10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{18}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{18}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+9}\right) = \frac{1}{36}\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{18}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}\right) + C$.

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x^2 = \ln|x| + \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C$.

(13) $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} + C$.

(14) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)} = \int\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \arctan x + C$. □

5.4 可有理化函数的原函数

1.

答 (1) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}\cos x = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$.

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x\sin x} = -\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^4 x(1-\cos^2 x)} = -\int\left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2(\cos x+1)} - \frac{1}{2(\cos x-1)}\right)\mathrm{d}\cos x = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| + C$.

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{1}{4t/(1+t^2)-(1-t^2)/(1+t^2)+5}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+2t+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan(x/2)+1}{\sqrt{5}}+C$.

(4) $\int\frac{\cos x\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\cos x+\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{x+\pi/4}{2}\right|+C$.

(5) $\int\frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2t/(1+t^2)}{1+(1-t^2)/(1+t^2)+2t/(1+t^2)}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\arctan t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\ln|1+t|+C=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tan^2(x/2)}{(1-\tan(x/2))^2}+C$.

(6) $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^2 x}{2\tan^2 x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{2t^2+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\int\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\arctan t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}t=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\tan x+C$.

(7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}=\int\frac{(\tan^2 x+1)^2}{\tan^4 x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(t^2+1)^2}{t^4+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t-1/t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x-\cot x}{\sqrt{2}}+C$.

(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x\sin^4 x}=\int\frac{(\tan^2 x+1)^4}{\tan^4 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(t^2+1)^3}{t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+3t-\frac{3}{t}-\frac{1}{3t^3}+C=\frac{\tan^3 x}{3}+3\tan x-3\cot x-\frac{\cot^3 x}{3}+C$.

(9) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^3 x+\tan x}{\tan^3 x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^3+t}{t^3+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{3}\ln(1+t)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{6}\ln|\tan^2 x-\tan x+1|-\frac{1}{3}\ln|1+\tan x|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}+C$.

(10) 由于

$$\begin{aligned}\int(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}\\&=\sqrt{2}\arcsin(\sin x-\cos x)+C\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\int(\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}}\\&=-\sqrt{2}\ln|\sin x+\cos x+\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}|+C,\end{aligned}$$

所以

$$\int\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin(\sin x-\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln|\sin x+\cos x+\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}|+C.$$

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x} = \int \frac{1}{1+\varepsilon(1-t^2)/(1+t^2)}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\operatorname{artanh}\frac{\sqrt{\varepsilon-1}t}{\sqrt{\varepsilon+1}} + C = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\operatorname{artanh}\frac{\sqrt{\varepsilon-1}\tan(x/2)}{\sqrt{\varepsilon+1}} + C$ □

2.

解 (1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{1+x}} \overset{t=\sqrt[3]{1+x}}{=} 3\int \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}(1+t)^2 - 6(1+t) + 3\ln(1+t) + C = \frac{3}{2}(1+\sqrt[3]{1+x})^2 - 6(1+\sqrt[3]{1+x}) + 3\ln(1+\sqrt[3]{1+x}) + C$.

(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} 6\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = 6\ln\frac{t}{1+t} + C = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}} + C$.

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt[6]{1+x}}{=} 6\int t^3(t-1)(t^4+t^2+1)\,\mathrm{d}t = 6\Big(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4}\Big) + C = 6\Big(\frac{(x+1)^{3/2}}{9} - \frac{(x+1)^{4/3}}{8} + \frac{(x+1)^{7/6}}{7} - \frac{x+1}{6} + \frac{(x+1)^{5/6}}{5} - \frac{(x+1)^{2/3}}{4}\Big) + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)}\right)\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}x - \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{3/2}(2+x^2)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}x - \int \frac{1}{2-x^2/(1+x^2)}\,\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{artanh}\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}} + C$.

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}}{(\sqrt{1+x^2})^2-1} = -\operatorname{artanh}\sqrt{1+x^2} + C$.

(6) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^2}}\,\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2} + C$.

(7) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})}}{=} 8\int \frac{t^2(t^2-1)}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = 8\int \left(\frac{2}{(1+t^2)^3} - \frac{3}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 8\left(\frac{1}{2}\frac{t}{(1+t^2)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right) + 8\arctan t = \frac{4t}{(1+t^2)^2} - \frac{6t}{1+t^2} + 2\arctan t + C = (\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} + 2\arctan\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} + C$.

(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-(\sqrt{a^2-x^2})^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{artanh}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + C$.

(9) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \overset{t=\sqrt{(1-x)/(1+x)}}{=} -4\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}\right)\mathrm{d}t = \ln|t+1| - \ln|t-1| + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$.

(10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^3} = \int \left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^5}\,\mathrm{d}x \overset{t=(x+b)/(x+a)}{=} -\frac{1}{(b-a)^4}\int \left(1-\frac{1}{t}\right)^3\mathrm{d}t = -\frac{1}{(b-a)^4}\left(\frac{1}{2t^2} - \frac{3}{t} + t - 3\ln t\right) + C = -\frac{1}{(b-a)^4}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 - 3\frac{x+a}{x+b} + \frac{x+b}{x+a} - 3\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|\right) + C$

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n} = \int \left(\frac{x+b}{x+a}\right)^m \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^{m+n}}\,\mathrm{d}x \overset{t=(x+b)/(x+a)}{=} -\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int \frac{(t-1)^{m+n-2}}{t^m}\,\mathrm{d}t$，其中最后一个积分是容易计算的，但具体地写出是一个繁琐的过程.

(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^n\sqrt[n]{1+x^n}} = \int \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} - \frac{x^n}{(1+x^n)\sqrt[n]{(1+x^n)}}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x'}{\sqrt[n]{1+x^n}} + x\left(\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}\right)'\right) = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} + C$. □

第六章　函数的积分

6.1　积分的概念

1.

答　(1) 被积函数是的图像是一个半圆，因此可以直接写出 $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(b-a)^2\pi$.

(2) 不难直接写出 $\displaystyle\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(b-a)^2$. □

2.

解　对 $[a,b]$ 的任意分割 $\pi\colon a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 作积分和 $\displaystyle\sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x_i$. 取定

$$\eta_i = \sqrt[2]{\frac{x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2}{3}},$$

那么

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3-x_{i-1}^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

因为 x^2 在 $[a,b]$ 上连续，所以一致连续. 从而对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|\leqslant\delta$ 时有 $|x'^2-x''^2|<\varepsilon/(b-a)$. 于是当 $\|\pi\|<\delta$ 时就有 $|\xi_i^2-\eta_i^2|<\varepsilon/(b-a)$，因此

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x_i - \frac{b^3-a^3}{3}\right| = \left|\sum_{i=1}^n (\xi_i^2-\eta_i^2)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |\xi_i^2-\eta_i^2|\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

所以

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x_i = \frac{b^3-a^3}{3}. \qquad □$$

3.

解 对 $[a,b]$ 的任意分割 $\pi\colon a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 作积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i/\xi_i^2$. 取定 $\eta_i=1/\sqrt{x_{i-1}x_i}$ 那么

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

因为 $1/x^2$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以一致连续. 从而对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|\leqslant\delta$ 时有 $|1/x'^2-1/x''^2|<\varepsilon/(b-a)$. 于是当 $\|\pi\|<\delta$ 时就有 $|1/\xi_i^2-1/\eta_i^2|<\varepsilon/(b-a)$, 因此

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{\xi_i^2}-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\xi_i^2}-\frac{1}{\eta_i^2}\right)\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{\xi_i^2}-\frac{1}{\eta_i^2}\right|\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon.$$

所以

$$\int_a^b\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{\xi_i^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

□

4.

解 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=(x-\arctan x)\big|_{-1}^{1}=2-\frac{\pi}{2}$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1+x}&=x^n\sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i=(-1)^n\sum_{i=n}^{\infty}(-x)^i=(-1)^{n+1}(1-x+x^2+\cdots+(-x)^{n-1})+(-1)^n\sum_{i=n}^{\infty}(-x)^i\\&=(-1)^{n+1}(1-x+x^2+\cdots+(-x)^{n-1})+\frac{(-1)^n}{1+x},\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=(-1)^n\ln2+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i-1}{n}.$$

(3) 因为

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}&=\int\frac{1}{1+\varepsilon(1-t^2)/(1+t^2)}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon}\\&=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-\varepsilon}t}{\sqrt{1+\varepsilon}}+C=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\tan(x/2)}{\sqrt{1+\varepsilon}}+C,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$

□

5.

(1) 因为

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) 因为

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \mathrm{e}^{-na^2}\,\mathrm{d}x = (b-a)\mathrm{e}^{-na^2},$$

所以 $\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

6.

证明 (1) 这是因为

$$\frac{x}{x^3+16} = \frac{1}{x^2+8/x+8/x} \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}.$$

(2) 这是因为 $\mathrm{e}^{-1/4} \leqslant \mathrm{e}^{x^2-x} \leqslant \mathrm{e}^2$.

(3) 这是因为 $|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

(4) 这是因为

$$x^m(1-x)^n = m^m n^n \left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{1-x}{n}\right)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$ □

7.

答 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} = \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right) = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(1/n)^2}+\frac{1}{1+(2/n)^2}+\cdots+\frac{1}{1+(n/n)^2}\right) = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$. □

8.

证明　这是因为

$$0 \geqslant \int_{-a}^{b} (x+a)(x-b) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{b} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - ab\int_{-a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

9.

证明　(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2+4x+5-\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{22}{3}-\pi.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{22}{7}-\pi.$ $\square$

1.

证明　因为 f 在 $[a,b]$ 上可积，所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{(b-a)(i-1/2)}{2n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{(b-a)(i-1/2)}{2n}\right) + f\left(\frac{(b-a)(2n+1/2-i)}{2n}\right)\right)\\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \qquad \square\end{aligned}$$

2.

证明　事实上

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2+5n}} + \frac{1}{\sqrt{4+5n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+5n}} &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n\sqrt{5+2/n}} + \frac{1}{n\sqrt{5+4/n}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{5+2n/n}}\right)\\ &< \sqrt{n}\int_5^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \sqrt{7n}-\sqrt{5n}. \qquad \square\end{aligned}$$

6.2　可积函数的性质

1.

证明　方便起见，补充定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 外的值为 0. 假设在某个 $x_0 \in [a,b]$ 处有 $f(x_0) < g(x_0)$，那么由连续性可知知在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上也有 $f(x) < g(x)$，从而 $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)\,\mathrm{d}x$，进而 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$，矛盾！因此 $f = g$. $\square$

2.

证明　特别地，也有 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$，因此 $f = 0$. $\square$

3.

答 (1) 正.

(2) 负. □

4.

答 (1) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. □

5.

证明 这是因为在 $[0,\pi/2]$ 上成立若尔当不等式 $\sin x > 2x/\pi$. □

6.

证明 这是因为

$$\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} = 1 + 2(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx).$$ □

7.

证明 因为

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^\pi \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\sin^2((n+1)x/2) - \sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x = \pi,$$

所以取 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 时的情形累加就得到

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x = n\pi.$$ □

注意

正弦函数也拥有“平方差公式”: $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

8.

证明 这是第 10 题的特殊情形. □

9.

证明 因为 $\sin\theta$ 在 $(0,\pi)$ 上恒正，所以 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0$ 蕴含着 f 在 $(0,\pi)$ 上变号，从而有零点 θ_0. 假设 f 在 $(0,\pi)$ 内只有 θ_0 这一个零点，那么 $f(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ 在 $(0,\pi)$ 上除了 θ_0 这一点外都是恒正或恒负的，于是

$$0 \neq \int_0^{\pi} f(x)\sin(\theta-\theta_0)\,\mathrm{d}\theta = \cos\theta_0\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \sin\theta_0\int_0^{\pi} f(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0,$$

矛盾！因此 f 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点. □

10.

证明 因为

$$0 \leqslant \int_a^b (tf(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x = t^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\left(2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

亦即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

1.

证明 根据伯努利不等式，我们有

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3\sqrt{n}},$$

显然等号仅当 $n=1$ 时取得. □

2.

证明 我们把结论加强为: $f\equiv 0$ 或 f 在 (a,b) 上至少改变 $n+1$ 次符号, 从而至少有 $n+1$ 个零点. 于是显然只需讨论 $f\not\equiv 0$ 时的情况.

当 $n=0$ 时结论显然成立. 假设当 $n<m$ 时结论也成立，那么当 $n=m$ 时 f 在 (a,b) 中至少有 m 个变号的零点，把它们从小到大记为 $x_1,x_2,\dots,x_m$. 假设 f 只有这 m 个变号的零点，那么 $f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$ 在 (a,b) 上不变号，从而

$$0\neq\int_a^b f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)\,\mathrm{d}x=0,$$

矛盾! 因此 f 在 (a,b) 上至少有 $m+1$ 个变号的零点，即当 $n=m$ 时结论也成立. 根据归纳法原理，结论普遍成立. □

3.

证明 如果 $M=0$, 那么没什么好说的. 如果 $M>0$, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 使得在 $[\alpha,\beta]$ 上成立 $f(x)>M-\varepsilon$，于是

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_\alpha^\beta f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}\geqslant\lim_{n\to\infty}(\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon)=(M-\varepsilon).$$

又

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}\leqslant\lim_{n\to\infty}(b-a)^{1/n}M=M,$$

所以由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}=M$. □

4.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，因为 $f(b-\varepsilon/2)/f(b-\varepsilon)>1$，所以存在 $N>0$ 使得当 $p>N$ 时有 $f^p(b-\varepsilon/2)/f^p(b-\varepsilon)>2(b-a)/\varepsilon$，于是

$$(b-a)f^p(x_p)=\int_a^b f^p(x)\,\mathrm{d}x>\int_{b-\varepsilon/2}^b f^p(x)\,\mathrm{d}x>\frac{\varepsilon}{2}f^p\left(b-\frac{\varepsilon}{2}\right)>(b-a)f^p(b-\varepsilon),$$

从而 $x_p>b-\varepsilon$. 由此可见 $\lim\limits_{p\to+\infty}x_p=b$. □

5.

证明 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，那么

$$\int_0^1 x^kf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}=\frac{p(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)},$$

其中 $p(k)$ 是 k 的 n 次多项式．由 $\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 知 $p(k)=c(k-1)(k-2)\cdots(k-n)$．注意到

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=\frac{p(0)}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n c}{n+1},$$

所以 $c=(-1)^n(n+1)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$．此外，在等式

$$\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}=\frac{p(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}=\frac{c(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

的两端乘以 $k+1$ 后再令 $k=-1$ 就得到

$$a_0=c(-1)^n(n+1)=(n+1)^2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)f(x)\,\mathrm{d}x=a_0\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\ \square$$

6.3 微积分基本定理

1.

答 (1) $a+b$.

(2) $\int_0^{\pi/2}\cos mx\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin(m+n)x-\sin(m-n)x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos((m+n)\pi/2)}{m+n}-\frac{1-\cos((m-n)\pi/2)}{m-n}\right)$.

(3) $\int_1^4\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$.

(4) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{26}(2-x^2)^{13}\Big|_0^1=\frac{8191}{26}$. $\square$

2.

证明 事实上

$$\varphi'(x)=f(x)\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\Big/\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2>0.\quad\square$$

3.

证明 在已知式两端求导得到 $f(x)=(f(x)+xf'(x))/2$，或者 $1/x=f'(x)/f(x)=(\ln f(x))'$. 因此 $\ln f(x)=\ln x+C$，进而 $f(x)=cx$. □

4.

证明 因为

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^{ab}f(x)\,\mathrm{d}x=bf(ab)-f(a),$$

所以取 $a=1$ 就得到 $f(b)=f(1)/b$，亦即 $f(x)=c/x$. □

5.

证明 因为 f 连续，所以存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(\xi)|$. 另一方面，根据积分中值定理，存在 $\eta\in[a,b]$ 使得

$$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=|f(\eta)|,$$

于是

$$\begin{aligned}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|&\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+|f(\xi)-f(\eta)|=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\xi^\eta f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

6.

证明 在已知式两端求导得到 $2xf(x^2)-f(x)=f(x)$，或者 $x^2f(x^2)=xf(x)$，由问题2.7的第7题知 $xf(x)=c$，即 $f(x)=c/x$. □

7.

证明 使用洛必达法则立得结果. □

1.

证明 设

$$g(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

那么

$$g'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{1}{2}\int_a^t(f(t)-f(x))\,\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

所以 $g(b)\geqslant g(0)=0$，亦即

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

2.

证明　在第1题中取 $f(x)=1/x$ 即可. $\square$

3.

证明　设

$$F(t)=\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^t f^3(x)\,\mathrm{d}x,$$

那么

$$F'(t)=f(t)\left(2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-f^2(t)\right).$$

再令

$$G(t)=2\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-f^2(t),$$

那么

$$G'(t)=2f(t)(1-f'(t))\geqslant 0,$$

所以 $G(t)\geqslant G(0)=0$，从而 $F'(t)\geqslant 0$，进而 $F(t)\geqslant F(0)=0$，亦即

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \qquad \square$$

4.

证明　事实上

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}|f(x)-f'(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_0^1(\mathrm{e}^{-x}f(x))'\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{\mathrm{e}}. \qquad \square$$

5.

证明　因为 $f'(x)>0$，所以 f 是递增的，从而

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t=1+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2+f^2(t)}\leqslant 1+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\leqslant 1+\frac{\pi}{4},$$

进而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. $\square$

6.4　分部积分与换元

1.

答　(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^3 x\,\mathrm{d}x = 2\times\frac{2!!}{3!!} = \frac{4}{3}$.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}\sin x = -2\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\pi}^{\pi}x\,\mathrm{d}\cos x = -4\pi - \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x = -4\pi$.

(3) $\displaystyle\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^3(\sqrt{1+x}-1)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x\,\mathrm{d}x^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2x+1)\sqrt{1-x-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x-x^2}\,\mathrm{d}(1-x-x^2) = 0$.

(6) $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x - \int_{1/\mathrm{e}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{2(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}}$.

(7) $\displaystyle\int_0^5\lfloor x\rfloor\sin\frac{\pi x}{5}\,\mathrm{d}x = \left(\int_1^2 + 2\int_2^3 + 3\int_3^4 + 4\int_4^5\right)\sin\frac{\pi x}{5}\,\mathrm{d}x = \frac{20}{\pi}$.

(8) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{ax^2-x^4}\,\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int_0^{a|a|}\sqrt{a^2u-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{a^4\pi\operatorname{sgn}a}{16}$.

(9) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \overset{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=u}{=} 2\int_0^1\frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2-\frac{\pi}{2}$.

(10) $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x^{n+1} = -\frac{n+1^{\,1}}{\int_{\ 0}}x^n\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

(11) $\displaystyle\int_0^a\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x = (x\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\sqrt{a^2+x^2})|_0^a = a\ln(1+\sqrt{2})a + a(1-\sqrt{2})$.

(12) 其不定积分在练习题 5.2 的第 4 题的 (19) 中已经算出，所以

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\sin x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{\ln|a|-\ln|b|}{a^2-b^2}, & a\neq b\\ \dfrac{1}{2a^2}, & a=b\end{cases}.$$ □

2.

证明　略.　□

3.

证明　略.　□

4.

证明 这是因为对任意的 $\varepsilon > 0$ 都有

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\int_0^{\pi/2-\varepsilon} + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \right) \sin^n x \,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + \varepsilon = \varepsilon. \qquad \square$$

5.

证明 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x = 0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x = 0$. $\square$

6.

证明 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\cos x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos(\pi/2) - x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) \,\mathrm{d}x$.

(2) 这是因为

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x)) \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) \,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x f(\sin x) \,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

7.

证明 这是因为

$$\left| \int_0^2 f(x) \,\mathrm{d}x - 2 \right| \leqslant \int_0^2 |f(x) - 1| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(x) - f(0)| \,\mathrm{d}x + \int_1^2 |f(x) - f(2)| \,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 |f'(\xi_x)| x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 |f'(\eta_x)| (2 - x) \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2 - x) \,\mathrm{d}x = 1. \qquad \square$$

8.

证明 根据积分中值定理知存在 $\xi_1 \in [-a, 0]$ 和 $\xi_2 \in [0, a]$ 使得

$$0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^{0} f(x) \,\mathrm{d}x + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \,\mathrm{d}x = f(\xi_1) + f(\xi_2),$$

于是

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x) \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{-1}^{-a} (f(x) - f(\xi_1)) \,\mathrm{d}x + \int_a^1 (f(x) - f(\xi_2)) \,\mathrm{d}x \right|$$
$$\leqslant \int_{-1}^{-a} |f'(\eta_x)| (\xi_1 - x) \,\mathrm{d}x + \int_a^1 |f'(\zeta_x)| (x - \xi_2) \,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant M \int_{-1}^{-a} (\xi_1 - x) \,\mathrm{d}x + M \int_a^1 (x - \xi_2) \,\mathrm{d}x = M(1 - a^2 + (a - 1)(\xi_2 - \xi_1))$$
$$\leqslant M(1 - a^2). \qquad \square$$

9.

证明 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=0.$ □

10.

证明 $\displaystyle\int_0^{a}\left(\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^{a}\left(\int_t^{a}f(t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_0^{a}f(t)(a-t)\,\mathrm{d}t.$ □

11.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,1)$ 使得当 $|x|\leqslant\delta$ 时有 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$，于是

$$\begin{aligned}0\leqslant\varliminf_{h\to0^+}\left|\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\varlimsup_{h\to0^+}\left|\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\varlimsup_{h\to0^+}\left(\int_{|x|\leqslant\delta}+\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant1}\right)\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\varlimsup_{h\to0^+}\varepsilon\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x+2M\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant1}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\varlimsup_{h\to0^+}2\varepsilon\arctan\frac{\delta}{h}+4M\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{\delta}{h}\right)=\pi\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 M 是 f 的一个界．因此

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\pi f(0).$$ □

12.

证明 (1) 这是因为

$$\begin{aligned}0\leqslant\varliminf_{\lambda\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\&=\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\left|f(b)\sin\lambda b-f(a)\sin\lambda a-\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\left(|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)=0.\end{aligned}$$

(2) 略． □

13.

答 $f(x)=-\int_{-1}^{x}\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{(1+\mathrm{e}^{1/t})^2}\,\mathrm{d}\frac{1}{t}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}-\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$. □

14.

解 $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin(x+\pi/4)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\tan\frac{x+\pi/4}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\ln\cot(\pi/8)}{\sqrt{2}}$. □

1.

证明 事实上

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x/T\rfloor T}{x}\frac{1}{\lfloor x/T\rfloor T}\int_0^{\lfloor x/T\rfloor T}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{\lfloor x/T\rfloor T}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x/T\rfloor T}{x}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{x-\lfloor x/T\rfloor T}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

□

2.

证明 根据斯托尔兹定理，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}-I_n}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(n+1)t-\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t\bigg/\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t\bigg/\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\bigg/\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

3.

证明 (1) 注意到

$$
f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 x^{m+k}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^m\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x
$$

即可.

(2) 因为

$$
\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}\int_0^1(1-x)^n\,\mathrm{d}x^{m+1}=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x,
$$

所以

$$
f(m,n)=\frac{n}{m+1}f(m+1,n-1)=\cdots=\frac{n!}{(m+n)!/m!}f(m+n,0)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.
$$

□

4.

证明 (1) 略.
(2) 根据莱布尼茨公式是显然的.
(3) 分部积分可得

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i f^{(i)}(x)\sin\left(x-\frac{(i+1)\pi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi},$$

由此可见 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ 是整数，且是正的. 另一方面，

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{a}{2b}\right)=\frac{a^{2n}}{4^n b^n n!},$$

所以当 n 足够大时 $f(x)\leqslant 1/\pi$，进而 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x<1$，矛盾! 因此 π 是无理数. □

5.

证明 假设对每个 $x\in(0,1)$ 都有 $|f(x)|<2^n(n+1)$，那么

$$1=\int_0^1 f(x)x^n\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}x<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x=1,$$

矛盾! □

6.

证明 根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^1(6x-2)^2\,\mathrm{d}x\int_0^1(f''(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}\left(\int_0^1(6x-2)f''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &=\frac{1}{4}\left(\int_0^1(6x-2)\,\mathrm{d}f'(x)\right)^2=\frac{1}{4}\left(4-6\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=4.\end{aligned}$$ □

6.5 可积性理论

1.

证明 因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在分割 $\pi\colon a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$. 作阶梯函数

$$q(x)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x), & x\in(x_{i-1},x_i)\\ f(x_i), & x=x_i,\end{cases}\quad p(x)=\begin{cases}\inf\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x), & x\in(x_{i-1},x_i)\\ f(x_i), & x=x_i,\end{cases}\qquad(6.1)$$

这样就有

$$\int_a^b (q(x)-p(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon. \qquad \square$$

2.

证明 因为 f 在 $[a,b]$ 上可积，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在分割 $\pi\colon a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon/2$. 先按(6.1)式作出函数 p 和 q. 现在取定一个足够小的正数 δ，并记

$$M_i=\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x),\ m_i=\inf_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x).$$

如果 $M_i\leqslant M_{i+i}$，就用线性函数在 $[x_i-\delta,x_i]$ 上代替 $q(x)$，如果 $M_i>M_{i+1}$，就用线性函数在 $[x_i,x_i+\delta]$ 上代替 $q(x)$. 如果 $m_i\leqslant m_{i+i}$，就用线性函数在 $[x_i,x_i+\delta]$ 上代替 $p(x)$，如果 $m_i>m_{i+1}$，就用线性函数在 $[x_i-\delta,x_i]$ 上代替 $p(x)$. 这样就得到了连续函数 p 和 q，且满足 $p\leqslant f\leqslant q$. 易见当 δ 足够小时有

$$\left|\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i-\int_a^b (q(x)-p(x))\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\int_a^b (q(x)-p(x))\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon. \qquad \square$$

3.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$，所以对任意的 $\varepsilon>0$ 都存在 $A>0$ 使得当 $x>A$ 时有

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon,$$

从而

$$\frac{1}{x}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x-A}{x}(l-\varepsilon)<\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x<\frac{1}{x}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{x-A}{x}(l+\varepsilon),$$

进而

$$l-\varepsilon\leqslant \varliminf_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x\leqslant \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x\leqslant l+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x=l$. $\square$

4.

证明 因为 f 在 $[a,b]$ 上可积，所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sigma(b-a).$$ □

1.

证明 因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，所以 $f(x) + mM/f(x) \leqslant m + M$，进而

$$m + M \geqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + mM\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \geqslant 2\sqrt{mM\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}},$$

所以

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$ □

2.

证明 注意到 $f(x) + f(-x)$ 也是偶函数，所以

$$0 = \int_{-1}^1 f(x)(f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(-x)(f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x,$$

从而

$$0 = \int_{-1}^1 f(x)(f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 f(-x)(f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (f(x)+f(-x))^2\,\mathrm{d}x,$$

进而 $f(x) + f(-x) = 0$，即 f 是 $[-1,1]$ 上的奇函数． □

3.

证明 设 $y(t) = M + k\displaystyle\int_0^t |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$，那么 $y'(t) = k|x(t)| \leqslant ky(t)$，从而

$$(\mathrm{e}^{-kt}y(t))' = \mathrm{e}^{-kt}(y'(t) - ky(t)) \leqslant 0,$$

因此 $\mathrm{e}^{-kt}y(t) \leqslant y(0) = M$，亦即 $M\mathrm{e}^{kt} \geqslant y(t) \geqslant |x(t)|$． □

6.6 勒贝格定理

1.

证明 这是因为

$$\max\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},\ \min\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

□

2.

证明 易见 φ 的连续点必是 $f\circ\varphi$ 的连续点，从而 $D(f\circ\varphi)\subset D(\varphi)$，因此 $f\circ\varphi$ 在 $[c,d]$ 上可积. □

3.

答 比如取 $f(x)=\lceil x\rceil$ 而 $\varphi(x)$ 为黎曼函数，那么事实上 $f\circ\varphi$ 就是狄利克雷函数，从而不可积. □

4.

证明 因为 f 在 $[a,b]$ 上可积，所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因而 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$. □

1.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\left\lfloor\frac{\alpha}{x}\right\rfloor-\frac{\alpha}{x}\right)\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1\left(\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\left\lfloor\frac{\alpha}{x}\right\rfloor-\frac{\alpha}{x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^\alpha\left(\left\lfloor\frac{\alpha}{x}\right\rfloor-\frac{\alpha}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_\alpha^1\left(\left\lfloor\frac{\alpha}{x}\right\rfloor-\frac{\alpha}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_\alpha^1\frac{\alpha}{x}\,\mathrm{d}x=\alpha\ln\alpha.\end{aligned}$$

□

2.

证明 当 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 时，假设 f 在某个连续点 x_0 处取正值，那么在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上有 $f(x)>f(x_0)/2$，由此易知 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$，矛盾！因此 f 在连续点取零值.

当 f 在连续点取零值时，因为 f 是可积的，所以 $[a,b]$ 的任一分割的每个小区间中都有 f 的连续点，进而

$$0=\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

6.7 反常积分

1.

答 (1) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^p x}=\frac{\ln^{1-p}2}{p-1}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}=-(1+\sqrt{x})\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\Big|_0^{+\infty}=2$.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^x|_{-\infty}^0=-1$.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^5\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(x^4+2x^2+2)\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=1$.

(5) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$.

(6) 其不定积分在练习题 5.3 的第 (9) 题中已经算出，因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\pi$.

(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\left(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=(n-1)!$.

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}=\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{n-1}}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!a^{2n-2}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{(2n-3)!!\pi}{(2n-2)!!a^{2n-1}}$.

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}n!$.

(12) 其不定积分在练习题 5.3 的第 (13) 题中已经算出，因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. □

2.

证明 假设 f 在某个点 x_0 处取正值，那么在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上有 $f(x)>f(x_0)/2$，于是

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{U(x_0)}f(x)\,\mathrm{d}x>0,$$

矛盾！因此 $f=0$. □

3.

证明 (1) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x|_{-1}^1=\pi$.

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arcsin^2 x\Big|_{-1}^{1}=0$.

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\arctan\sqrt{1-x}\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}$.

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2-2x^2}}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(5) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}=\arcsin^2\sqrt{x}\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi^2}{4}$.

(6) 根据练习题5.2的第5题，$\displaystyle\int_{0}^{1}\ln^n x\,\mathrm{d}x=-n\int_{0}^{1}\ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x=(-1)^n n!$.

(7) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},n+1\right)$. □

4.

证明 因为

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}\overset{t^2=\sin u}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin u}},$$

而

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\overset{t^2=\sin u}{=}\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin 2u}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin u}},$$

所以

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}\Big/\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=\sqrt{2}.$$ □

5.

证明 事实上

$$\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2/4}\int_0^x\mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2/4}\int_{-x}^{x}\mathrm{e}^{-u^2/4}\,\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{x^2/4}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2/4}\,\mathrm{d}t.$$ □

6.

解 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\cot x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}x\,\mathrm{d}\ln\sin x=-\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}\arcsin x=-\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\,\mathrm{d}x\overset{x=\sin u}{=}-\int_0^{\pi/2}u\cot u\,\mathrm{d}u=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

□

6.8 数值积分

1.

解 (1) 在 Mathematica 中输入 `With[{f = If[# == 0, 1, Sin[#]/#] &, a = 0, b = Pi, n = 100}, N@Total@Table[(b - a)/n (f[a + (b - a) (i - 1)/n] + f[a + (b - a) i/n])/2, {i, 1, n}]]`，可以算出 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 1.85191$.

(2) 在 Mathematica 中输入 `With[{f = Exp[-#]/(# + 100) &, a = 0, b = 100, n = 1000}, N@Total@Table[(b - a)/n (f[a + (b - a) (i - 1)/n] + f[a + (b - a) i/n])/2, {i, 1, n}]]`，可以算出 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x \approx 0.00991036$. □

2.

答 用梯形法算出 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx 0.784981$，其误差不超过 $1/1200 < 0.001$. 进一步地可以得到 $\pi \approx 3.13993$. □

第七章　积分学的应用

7.1　积分学在几何学中的应用

1.

答　(1) $\displaystyle\int_0^a \left(-\frac{x^2}{a}+\sqrt{ax}\right) \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$.

(2) $\displaystyle\int_1^2 ((2x-x^2)-(2-x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

(4) 由二次型的理论[1]知 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ 是一个椭圆，其两个半轴长为

$$\sqrt{2\Big/\left(a+c\pm\sqrt{a^2-2ac+4b^2+c^2}\right)},$$

由此知其面积为 $\pi/\sqrt{ac-b^2}$.

(5) $\displaystyle 3\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (a\sin 3\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2\pi}{4}$.

(6) $\displaystyle 2\times\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2$. □

2.

答　(1) $\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2b}{a}\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = ab\pi$.

(2) 用平面 $z=z_0$ 去截椭圆得到 $x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1-z_0^2/c^2$，或

$$\frac{x^2}{a^2(1-z_0^2/c^2)}+\frac{y^2}{b^2(1-z_0^2/c^2)}=1,$$

因此椭球的面积是

$$\int_{-c}^c ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{3}abc\pi.$$ □

[1]把二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 的两个特征值记为 λ_1 和 λ_2，且 $0<\lambda_1<\lambda_2$. 那么在 $x^2+y^2=1$ 的条件下有 $\lambda_1\leqslant ax^2+2bxy+cy^2\leqslant\lambda_2$，从而在 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ 的条件下有 $1/\lambda_2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1/\lambda_1$.

3.

答　(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{2\pi}-1)$.

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}at\,\mathrm{d}t=2a\pi^2$.

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}3c^2|\sin t\cos t|\sqrt{\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}}\,\mathrm{d}t=6c^2\int_0^{\pi/2}\sin 2t\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2a^2}+\frac{1-\cos 2t}{2b^2}}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\frac{4(a^2+ab+b^2)c^2}{ab(a+b)}=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\pi$.

(5) $\displaystyle\int_0^{2}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2}(1+18t^2)\,\mathrm{d}t=50$.

(6) $\displaystyle 2\int_0^{\sqrt{2pa}}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,\mathrm{d}y=2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{a}{p}}\sqrt{ap}+p\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{2a}{p}}$.

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x=\ln(2+\sqrt{3})$.

(8) $\displaystyle\int_0^{5\sqrt{2}/2}\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\pi$. □

4.

答　(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=8a$.

(2) 心脏线在直角坐标系下的参数方程可以写成

$$\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases},$$

于是所求体积为

$$\pi\int_0^{2a}y^2\,\mathrm{d}x=\pi a^3\int_\pi^0((1+\cos\theta)\sin\theta)^2\,\mathrm{d}(1+\cos\theta)\cos\theta=\frac{8\pi a^3}{3}.$$

(3) $\displaystyle 2\pi\int_0^{\pi}y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\int_0^{\pi}\sqrt{2}(1+\cos\theta)^{3/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{32\pi a^2}{5}$. □

5.

答　$\displaystyle 2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. □

6.

答 最大值是 1，最小值是 0. □

7.

证明 注意到

$$3=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)',$$

所以 $f(x)/x=3x+c$，或者 $f(x)=3x^2+cx$．于是对应的旋转体的体积是

$$\pi\int_0^1(3x^2+cx)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{c^2}{3}+\frac{3c}{2}+\frac{9}{5}\right).$$

由此可见当 $x=-9/4$ 时体积最小，此时该平面图形的面积是 $9/80$. □

7.2 物理应用举例

1.

答 用 g 表示重力加速度，ρ 表示水的密度，那么重力做的功就是

$$\int_0^{10}\pi\times5^2\rho\mathrm{g}x\,\mathrm{d}x=1250\pi\mathrm{g}\rho.$$ □

2.

答 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{G}\rho}{x^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{G}\rho}{a}.$ □

3.

答 使用数值方法求解积分方程

$$h(t)+\frac{1}{0.5^2\pi}\int_0^t0.005^2\pi\times0.6\sqrt{2\mathrm{g}h(\tau)}\,\mathrm{d}\tau=2,$$

得到当 $t=2.96\,\mathrm{h}$ 时 $h(t)\approx0$，即水全部流完需要 2.96 小时. □

7.3 面积原理

1.

证明 在杨不等式中取 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x-1}$ 即得．等号成立当且仅当 $\mathrm{e}^{a-1}=b$. □

2.

证明 因为 $\dfrac{1}{(x+a)}\sqrt{\dfrac{a}{k}}$ 是递减的，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+a)\sqrt{k}}<\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+a)}\sqrt{\frac{a}{k}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2\sqrt{a}\,\mathrm{d}\sqrt{x}}{x+a}=\pi. \qquad \square$$

3.

证明 根据杨不等式的推论，我们有

$$\frac{|f|}{\left(\displaystyle\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}}\frac{|g|}{\left(\displaystyle\int_a^b|g|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\displaystyle\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x}+\frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\displaystyle\int_a^b|g|^q\,\mathrm{d}x},$$

积分之，得到

$$\frac{\displaystyle\int_a^b|fg|\,\mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\displaystyle\int_a^b|g|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

亦即

$$\int_a^b|fg|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b|g|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}. \qquad \square$$

4.

证明 因为

$$\begin{aligned}\int_a^b|f+g|^p\,\mathrm{d}x&=\int_a^b|f+g|^{p-1}|f+g|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f+g|^{p-1}|f|\,\mathrm{d}x+\int_a^b|f+g|^{p-1}|g|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_a^b|f+g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}\left(\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|f+g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}\left(\int_a^b|g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\end{aligned}$$

所以

$$\left(\int_a^b|f+g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \qquad \square$$

5.

证明 因为 $1/x^p$ 是递减的，所以极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}-\frac{n^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{1-p}=\alpha$$

存在. 取 $\beta=\alpha-1/(1-p)$, 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}1/x^p=0$, 所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}-\frac{n^{1-p}}{1-p}-\beta\right|\leqslant\frac{1}{(n-1)^p},$$

亦即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=\frac{n^{1-p}}{1-p}+\beta+O\left(\frac{1}{n^p}\right). \qquad \square$$

6.

答 $\sum\limits_{k=3}^{n}\ln\ln k=\int_3^n\ln\ln x\,\mathrm{d}x+O(\ln\ln n)=x\ln\ln x|_3^n-\int_3^n\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+O(\ln\ln n)=n\ln\ln n+O(n)$. $\square$

7.

证明 当 $x\geqslant3$ 时 $\ln x/x$ 是递减的, 所以

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}-\int_3^n\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac12\ln^2 n+\frac12\ln^2 3$$

在 $n\to\infty$ 时收敛到某个数 β. 现在取 $\alpha=\beta-\frac12\ln^2 3+\frac12\ln 2$, 那么就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac12\ln^2 n-\alpha\right|\leqslant\frac{\ln(n-1)}{n-1},$$

亦即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=\frac12\ln^2 n+\alpha+O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \qquad \square$$

8.

证明 这是因为

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k}=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2k}{2k}=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}+\ln 2\left(1+\frac12+\cdots+\frac1n\right)\\&=-\left(\frac12\ln^2 2n+\alpha+O\left(\frac{\ln 2n}{2n}\right)\right)+\left(\frac12\ln^2 n+\alpha+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)+\ln 2\left(\ln n+\gamma+O\left(\frac1n\right)\right)\\&=-\frac12\ln^2 2+\gamma\ln 2+O\left(\frac{\ln 2n}{2n}\right)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)+O\left(\frac1n\right)\to\left(\gamma-\frac12\ln 2\right)\ln 2\ (n\to\infty).\end{aligned} \qquad \square$$

9.

证明　当 $\varphi(a)=b$ 时，

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b \varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a \varphi^{-1}(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) \\ &= \int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a x\,\mathrm{d}\varphi(x)=\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+x\varphi(x)|_0^a-\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\varphi(a)=ab.\end{aligned}$$

当 $b>\varphi(a)$ 时，

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b \varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\varphi(a)} \varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y+\int_{\varphi(a)}^b \varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \\ &> a\varphi(a)+(b-\varphi(a))\varphi^{-1}(\varphi(a))=ab.\end{aligned}$$

当 $b<\varphi(a)$ 时把 φ 视为 φ^{-1} 的反函数，也有

$$\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b \varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y>ab.$$ □

1.

证明　(1) 方便起见，记 $a_{n+1}=0$．当 n 是偶数时，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}f(a_k) &= \sum_{k=1}^{n/2}\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n/2}\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n/2}\int_{\sum_{i=2k+1}^n(-1)^{i+1}a_i}^{\sum_{i=2k-1}^n(-1)^{i+1}a_i} f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}a_i} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f\left(\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}a_k\right).\end{aligned}$$

那么当 n 是奇数时，

$$\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}f(a_k)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}f(a_k)\geqslant f\left(\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}a_k\right)=f\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right).$$

(2) 取 $f(x)=x^r$ 即可． □

2.

证明　注意到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\left\lfloor\frac{2n}{k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)=\int_0^1\left(\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{1/(k+1)}^{1/(k+1/2)}+\int_{1/(k+1/2)}^{1/k}\right)\left(\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{1/(k+1)}^{1/(k+1/2)}\left(\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1/2}-\frac{1}{k+1}\right)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=2\ln 2-1. \qquad \square
\end{aligned}
$$

3.

证明 因为 $-f$ 是凸函数，所以

$$
f(x)=f\left(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\right)\geqslant\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)=0,
$$

从而 $\displaystyle\int_a^b f(x)\geqslant 0$．记 $x_0=(a\alpha-b\beta)/(\alpha-\beta)$，那么当 $a<x<x_0$ 时 $f(x)\leqslant\alpha(x-a)$，当 $x_0<x<b$ 时 $f(x)\leqslant\beta(x-b)$，所以

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{x_0}\alpha(x-a)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b\beta(x-b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}. \qquad \square
$$

7.4 沃利斯公式和斯特林公式

1.

答 $\displaystyle\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{\sqrt{4n\pi}(2n/\mathrm{e})^{2n}}{(\sqrt{2n\pi}(n/\mathrm{e})^n)^2}=\frac{n^{2n-1/2}}{\sqrt{\pi}}\ (n\to\infty).$ $\square$

2.

证明 这是因为

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t=\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},n+1\right)=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}\\
&=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\ (n\to\infty). \qquad \square
\end{aligned}
$$

3.

证明 事实上

$$
\begin{aligned}
(-1)^n\binom{-1/2}{n}\sqrt{n}&=(-1)^n\frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-(n-1))\sqrt{n}}{n!}=\frac{(2n-1)!!\sqrt{n}}{(2n)!!}\\
&=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\Bigg/\sqrt{\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2}\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ (n\to\infty). \qquad \square
\end{aligned}
$$

4.

证明 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{1-1/k}}{(1+1/k)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\mathrm{e}^{n-1-1/2-\cdots-1/n}}{(n+1)^n/n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\mathrm{e}^{n-1-1/2-\cdots-1/n}}{(n+1)^n/(\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\ln n-1-1/2-\cdots-1/n}}{(1+1/n)^n}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^{1+\gamma}}.$$ □

5.

证明 这是因为根据沃利斯公式有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{2n+1}x_{2n+2}}\left(\frac{x_2x_3x_4x_5\cdots x_{2n}x_{2n+1}}{x_1x_2x_3x_4\cdots x_{2n}}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n+1}}{x_{2n+2}}\frac{1}{x_1^2}=\frac{1}{x_1^2}.$$ □

1.

证明 因为

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}t\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n<\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}t\,\mathrm{d}t=\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

令 $n\to\infty$，并利用练习题的第 2 题和沃利斯公式就得到 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

2.

证明 注意到

$$S_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{(n+2)\cdots(n+k+1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{n+k+1}\Big/\binom{2n}{n-1}$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}-2\binom{2n}{n-1}-\binom{2n}{n}\right)\Big/\binom{2n}{n-1}$$
$$=2^{2n-1}\Big/\binom{2n}{n-1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\Big/\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)!2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2(n-1)\pi}((n-1)/\mathrm{e})^{n-1}\sqrt{2(n+1)\pi}((n+1)/\mathrm{e})^{n+1}2^{2n}}{\sqrt{4n\pi}(2n/\mathrm{e})^{2n}\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \square$$

第八章　多变量函数的连续性

8.1　n 维欧几里得空间

1.

证明　这是因为 $\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_i}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{e}_i\|}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. □

2.

证明　这是因为

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle-2\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-2\|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta.$$ □

3.

证明　这是因为此时第 2 题中的 $\cos\theta=0$. □

4.

证明　在第 2 题中用 $-\boldsymbol{y}$ 代替 $\boldsymbol{y}$ 后再与原来的式子相加即可. □

5.

证明　若不然，取 $\boldsymbol{x}\in B_r(\boldsymbol{a})\cap B_r(\boldsymbol{b})$，那么同时有 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<r$ 和 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|<r$，所以

$$2r=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|<2r,$$

矛盾！所以 $B_r(\boldsymbol{a})\cap B_r(\boldsymbol{b})=\varnothing$. □

6.

证明　取 $\boldsymbol{y}=(\operatorname{sgn}x_1,\operatorname{sgn}x_2,\ldots,\operatorname{sgn}x_n)$，那么由柯西–施瓦茨不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|.$$

又显然有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|. \qquad \square$$

7.

证明 一方面，$\max|x_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|$ 是显然的. 另一方面，根据第 6 题马上得到 $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant n\max\|x_i\|$. $\square$

8.2 $\mathbb{R}^n$ 中点列的极限

1.

证明 这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. $\square$

2.

证明 (1) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$ 使得当 $i > N_1$ 时有 $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon/2$, 也存在 $N_2 > 0$ 使得当 $i > N_2$ 时有 $\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{b}\| < \varepsilon/2$. 现在取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 那么当 $i > N$ 时就有

$$\|\boldsymbol{x}_i \pm \boldsymbol{y}_i - (\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})\| \leqslant \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{b}\| < \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{i\to\infty}(\boldsymbol{x}_i \pm \boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$.

(2) 当 $\lambda = 0$ 时没什么好说的. 当 $\lambda \neq 0$ 时，对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得当 $i > N$ 时有 $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon/|\lambda|$, 从而 $\|\lambda\boldsymbol{x}_i - \lambda\boldsymbol{a}\| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda\boldsymbol{x}_i = \lambda\boldsymbol{a}$. $\square$

3.

证明 设 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 是欧氏空间中的一个收敛点列, 它的极限是 $\boldsymbol{a}$. 于是存在 $N > 0$ 使得当 $i > N$ 时有 $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}\| < 1$, 从而 $\|x_i\| < 1 + \|\boldsymbol{a}\|$. 现在取

$$R = \max\{\|\boldsymbol{x}_1\|, \ldots, \|\boldsymbol{x}_N\|, 1 + \|\boldsymbol{a}\|\},$$

那么就有 $\{\boldsymbol{x}_i\} \subset \overline{B}_R(\boldsymbol{0})$, 因此 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 是有界的. $\square$

4.

证明 这是因为基本点列一定是收敛的. $\square$

5.

证明 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k\|$，那么 $\{S_n\}$ 是收敛的，从而是基本列．易见对于 $m > n$ 有 $\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| \leqslant |S_{m-1} - S_n|$，所以 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 也是基本列，从而收敛． □

8.3 $\mathbb{R}^n$ 中的开集和闭集

1.

答 (1) $A^\circ = \varnothing$，$\overline{A} = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$，$\partial A = A$.
(2) $A^\circ = A$，$\overline{A} = \{(x,y)\colon 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，$\partial A = (-1, +\infty) \times \{0\} \cup \{(x, x+1)\colon x \geqslant -1\}$.
(3) $A^\circ = \varnothing$，$\overline{A} = A = \partial A$. □

2.

答 $A^\circ = \varnothing$，$(A^{\mathrm{c}})^\circ = \varnothing$，$\partial A = \mathbb{R}^2$. □

3.

证明 当 $\boldsymbol{p} \in \overline{A}$ 时，如果 $\boldsymbol{p} \in A$，那么 $\boldsymbol{p} \in B_r(\boldsymbol{p}) \cap A \neq \varnothing$；如果 $\boldsymbol{p} \notin A$，那么 $\boldsymbol{p} \in A'$，从而对任意的 $r > 0$ 都有 $\varnothing \neq B_r(\check{\boldsymbol{p}}) \cap A = B_r(\boldsymbol{p}) \cap A$.

当对一切的 $r > 0$ 都有 $B_r(\boldsymbol{p}) \cap A \neq \varnothing$ 时，如果 $\boldsymbol{p} \in A$，那么当然有 $\boldsymbol{p} \in \overline{A}$；如果 $\boldsymbol{p} \notin A$，那么 $B_r(\check{\boldsymbol{p}}) \cap A = B_r(\boldsymbol{p}) \cap A \neq \varnothing$，所以 $\boldsymbol{p} \in A' \subset \overline{A}$. □

4.

证明 因为

$$x \in \left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^{\mathrm{c}} \iff x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha \iff x \notin E_\alpha,\ \forall \alpha \in \mathrm{A} \iff x \in E_\alpha^{\mathrm{c}},\ \forall \alpha \in \mathrm{A} \iff x \in \bigcap_\alpha E_\alpha^{\mathrm{c}},$$

所以 $\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^{\mathrm{c}} = \bigcap_\alpha E_\alpha^{\mathrm{c}}$，从而 $\left(\bigcup_\alpha E_\alpha^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} = \bigcap_\alpha E_\alpha$，进而 $\left(\bigcap_\alpha E_\alpha\right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_\alpha E_\alpha^{\mathrm{c}}$. □

5.

证明 这是因为

$$\partial A = (A^\circ \cup (A^{\mathrm{c}})^\circ)^{\mathrm{c}} = (A^\circ)^{\mathrm{c}} \cap ((A^{\mathrm{c}})^\circ)^{\mathrm{c}} = (A^\circ)^{\mathrm{c}} \cap ((\overline{A})^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = (A^\circ)^{\mathrm{c}} \cap \overline{A},$$

其中用到了第 6 题. □

6.

证明 事实上

$$A^\circ = (\partial A \cup (A^c)^\circ)^\circ = (\partial A^c \cup (A^c)^\circ)^c = (\overline{A^c})^c. \qquad \square$$

7.

证明 (1) 设 $x \in (A \cap B)^\circ$, 那么存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset A \cap B \subset A$, 所以 $x \in A^\circ$. 同样地也有 $x \in B^\circ$, 因此 $x \in A^\circ \cap B^\circ$. 设 $x \in A^\circ \cap B^\circ$, 那么存在 r_1 和 r_2 使得 $B_{r_1}(x) \subset A$ 和 $B_{r_2}(x) \subset B$. 于是取 $r = \min\{r_1, r_2\}$ 就有 $B_r(x) \subset A \cap B$，从而 $x \in (A \cap B)^\circ$. 因此 $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(2) 利用 (1) 和第 6 题有

$$\overline{A \cup B} = (((\overline{A^c \cap B^c})^c)^c)^c = ((A^c \cap B^c)^\circ)^c = ((A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ)^c = ((\overline{A})^c \cap (\overline{B})^c)^c = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad \square$$

8.

答 (1) 取 $F_i = \overline{B_{1-1/i}(\mathbf{0})}$ 即可.

(2) 取 $G_i = B_{1+1/i}(\mathbf{0})$ 即可. $\square$

9.

证明 (1) 这是因为

$$\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} \subset \overline{\bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}.$$

取 $A_i = (0, 1/i)$，其中 $i \in \mathbb{N}^+$，就出现了真包含关系.

(2) 这是因为

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^\circ \supset \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^\circ\right)^\circ = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^\circ.$$

取 $A_i = [0, 1 - 1/i]$，其中 $i \in \mathbb{N}^+$，就出现了真包含关系. $\square$

10.

证明 设 x 是 ∂E 的一个聚点, 那么对任意的 $r > 0$ 有 $B_r(x) \cap \partial E \neq \varnothing$. 取 $y \in B_r(x) \cap \partial E \subset B_r(x)$，那么存在 $r' > 0$ 使 $B_{r'}(y) \subset B_r(x)$. 因为 $y \in \partial E$，所以 $B_{r'}(y)$ 中既有 E 中的点也有 E^c 中的点，从而 $B_r(x)$ 中当然也既有 E 中的点也有 E^c 中的点，进而 $x \in \partial E$. 因此 ∂E 是闭集. $\square$

11.

证明 若不然，取 $x \in G_1 \cap \overline{G_2}$. 因为 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$，所以 $x \in G_1 \cap G_2'$. 由 $x \in G_1$ 知存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset G_1$，于是由 $x \in G_2'$ 知 $B_r(x)$ 中有 G_2 中的点，进而 G_1 中有 G_2 中的点，矛盾! 因此 $G_1 \cap \overline{G_2} = \varnothing$. 对称地也有 $\overline{G_1} \cap G_2 = \varnothing$. $\square$

12.

答 比如取 $A=\{(1/n,n)\colon n\in\mathbb{N}^+\}$. □

13.

证明 当 E 是闭集时，任取 $x\in\partial E$. 那么对任意的 $r>0$ 都有 $B_r(x)\cap E\neq\varnothing$. 如果对某个 $r_0>0$ 有 $B_{r_0}(\breve{x})\cap E=\varnothing$，那么 $x\in E$. 如果对任意的 $r>0$ 都有 $B_r(\breve{x})\cap E\neq\varnothing$，那么 x 是 E 的聚点，所以 $x\in E$. 因此 $\partial E\subset E$.

当 $E\supset\partial E$ 时，设 x 是 E 的一个聚点，那么对任意的 $r>0$ 都有 $B_r(\breve{x})\cap E\neq\varnothing$. 假设 $x\notin E$，那么 $B_r(x)$ 中既有 E 中的点又有不在 E 中的点，从而 $x\in\partial E\subset E$，矛盾！因此 $x\in E$，进而 E 是闭集. □

1.

证明 设 $x\in\partial\overline{E}$，那么对任意的 $r>0$，$B_r(x)$ 中都既有 $\overline{E}$ 中的点，也有 $\overline{E}^{\mathrm{c}}$ 中的点. 因为 $\overline{E}^{\mathrm{c}}\subset E^{\mathrm{c}}$，所以 $B_r(x)$ 中已经有 E^{c} 中的点了. 再取 $y\in B_r(x)\cap\overline{E}$，如果 $y\in E$，那么 $B_r(x)\cap E\neq\varnothing$；如果 $y\neq E$，那么 y 是 E 的聚点，而由 $y\in B_r(x)$ 知存在 $r'>0$ 使得 $B_{r'}(y)\subset B_r(x)$，于是 $B_{r'}(y)$ 中有 E 中的点，进而 $B_r(x)$ 中有 E 中的点. 因此 $\partial\overline{E}\subset\partial E$. □

2.

证明 设 $x_0\in G$，令 $F=[x_0,+\infty)\cap G^{\mathrm{c}}$，那么由 G 有界知 F 是一个非空的闭集. 设 $\mu=\min F$，那么 $x_0\leqslant\mu$. 因为 $x_0\in G$，所以 $x_0\neq\in F$，从而 $x_0\neq\mu$，进而 $x_0<\mu$. 因为 $\mu\in F\subset G^{\mathrm{c}}$，所以 $\mu\notin G$，因此 $[x_0,\mu)\subset G$. 事实上若不然，就存在 $y\in[x_0,\mu)$ 但 $y\notin G$，于是 $y\in F$ 且 $y<\mu$，矛盾！这样，对 $x_0\in G$ 可以找到 μ 使得

$$\mu>x_0,\ \mu\notin G,\ [x_0,\mu)\subset G.$$

类似地，也可以找到 λ 使得

$$\lambda<x_0,\ \lambda\notin G,\ (\lambda,x_0]\subset G.$$

进而，存在区间 (λ,μ) 满足

$$x_0\in(\lambda,\mu);\ (\lambda,\mu)\subset G;\ \alpha,\beta\notin G.$$

我们称这样的一个区间为 G 的构成区间.

设 (λ,μ) 和 (σ,τ) 是 G 的两个构成区间，我们断言它们完全相等或者互不相交，事实上假设它们有公共点 x. 那么有 $\lambda<x<\mu$ 和 $\sigma<x<\tau$. 如果 $\tau<\mu$，那么 $\tau\in(\lambda,\mu)$，但这是不可能的，因为 $(\lambda,\mu)\subset G$ 而 $\tau\notin G$. 于是得到 $\mu\leqslant\tau$. 对称地有 $\tau\leqslant\mu$，所以 $\mu=\tau$. 同理有 $\lambda=\sigma$，因此 (λ,μ) 和 (σ,τ) 是完全一样的.

从 G 的每个构成区间中可以取出一个有理数，所以 G 的构成区间的全体与有理数集的一个子集一一对应，从而至多可数. 因此 G 是至多可数个互不相交的开集的并. □

3.

证明　因为 F 是闭集，所以可以取出 $\alpha = \min F$ 和 $\beta = \max F$，于是 $F \subset [a,b]$，从而

$$F = [a,b] \setminus ([a,b] \setminus F) = [a,b] \setminus ((a,b) \cap F^{\mathrm{c}}),$$

由第 2 题知其中的开集 $(a,b) \cap F^{\mathrm{c}}$ 是至多可数个不互相交的开区间的并. □

8.4　列紧集和紧致集

1.

证明　设 $\mathscr{J} = \{G_\alpha\}$ 是 $P(A)$ 的一个开覆盖，那么 $\mathscr{I} = \{G_\alpha \times \mathbb{R}\colon G_\alpha \in \mathscr{J}\}$ 是 A 的一个开覆盖，从而从中可以取出一个有限子覆盖，对应地也得到了 $\mathscr{J}$ 的一个有限子集，它是 $P(A)$ 的有限覆盖. 因此 $P(A)$ 是紧致集. □

2.

证明　当 $A \times B$ 是紧致集时，由第 1 题知 A 和 B 都是紧致集.

当 A 和 B 都是紧致集时，设 $\mathscr{J}$ 是 $A \times B$ 的一个开覆盖，设 $\mathscr{I} = \{P_1(G_\alpha)\colon G_\alpha \in \mathscr{J}\}$ 和 $\mathscr{K} = \{P_2(G_\alpha)\colon G_\alpha \in \mathscr{J}\}$，其中

$$P_1\colon (x,y) \mapsto x,\ P_2\colon (x,y) \mapsto y,$$

那么从 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{K}$ 中分别可以取出一个有限子集 $\mathscr{I}_1$ 和 $\mathscr{K}_1$，使得它们分别覆盖 A 和 B. 于是

$$\mathscr{J}_1 = \{I \times K\colon I \in \mathscr{I}_1,\ K \in \mathscr{K}_1\}$$

就是 $A \times B$ 的一个有限覆盖. 因此 $A \times B$ 是紧致集. □

3.

证明　当 A 是紧致集时，如果 $\mathscr{F} = \{A_\alpha\}$ 是一个闭集族且 $A \cap \bigcap\limits_\alpha A_\alpha = \varnothing$，那么 $\{A_\alpha^{\mathrm{c}}\}$ 是 A 的一个开覆盖，从而从中可以取出一个有限子覆盖 $\{A_1^{\mathrm{c}}, A_2^{\mathrm{c}}, \ldots, A_k^{\mathrm{c}}\}$，于是

$$\varnothing = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} = A \cap \bigcap_{i=1}^{k} A_i.$$

如果 $\mathscr{F} = \{A_\alpha\}$ 是一个闭集族且 $A \cap \bigcap\limits_\alpha A_\alpha = \varnothing$ 蕴含着存在 $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathscr{F}$ 使得 $A \cap \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i = \varnothing$，那么对 A 的任意开覆盖 $\mathscr{J} = \{G_\alpha\}$，$\{G_\alpha^{\mathrm{c}}\}$ 是一个闭集族，且

$$\varnothing = A \cap \left(\bigcup_{\alpha} A\right)^{\mathrm{c}} = A \cap \bigcap_{\alpha} A_\alpha^{\mathrm{c}},$$

于是存在 $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_k^c \in \mathscr{J}$ 使得

$$\varnothing = A \cap \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c,$$

因此 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \mathscr{J}$ 就是 A 的一个有限覆盖，所以 A 是紧致集. □

4.

证明 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是弗雷歇紧的，因为 A 中的任一点列都是 A 的无穷子集，所以 A 中的任一点列都收敛于 A 中的一点，从而 A 是列紧的.

设 A 是列紧的，因为从 A 的一个无穷子集中显然可以取出一个收敛点列，所以 A 的每个无穷子集在 A 中都有一个凝聚点，从而 A 是弗雷歇紧的. □

5.

证明 不一定，比如取 $F_k = [k, +\infty)^n$.

如果改为非空紧致集，那么答案是一定的. 事实上可以在每个 F_k 中取出一个点 $\boldsymbol{x}_k$，那么 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset F_1$. 因为 F_1 是紧致集，所以 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有一个极限点 $\boldsymbol{x}$，且 $\boldsymbol{x}$ 在每一个 F_k 中. 因此 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$. □

1.

证明 如果不存在这样的数 σ，那么对每个 $k \in \mathbb{N}^+$，存在 $A_k \subset E$，虽然 $\operatorname{diam} A_k < 1/k$，但是 A_k 不被 $\{G_\alpha\}$ 中的任何集合包含. 在每个 A_k 中取一点 $\boldsymbol{x}_k$，那么 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有一个收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_j}\}$，极限设为 $\boldsymbol{x}$. 因为 $\{G_\alpha\}$ 覆盖 F，所以存在 G_{α_0} 使得 $\boldsymbol{x} \in G_{\alpha_0}$，进而存在 $r > 0$ 使得 $B_r(\boldsymbol{x}) \subset G_{\alpha_0}$. 当 j 足够大时有 $\|\boldsymbol{x}_{k_j} - \boldsymbol{x}\| < r/2$ 和 $1/k_j < r/2$，所以 $A_{k_j} \subset B_{1/k_j}(\boldsymbol{x}_{k_j}) \subset B_r(\boldsymbol{x}) \subset G_{\alpha_0}$，矛盾！因此这样的 σ 是存在的. □

注意

这是勒贝格数引理，是有限覆盖定理的加强. 在很多情况下，它比有限覆盖定理使用起来更方便.

2.

证明 设 $\{G_\alpha\}$ 的勒贝格是 σ. 先用一个 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体把 E 包住，再用平行于各坐标平面的平面把这个立方体分成许多相等的小立方体，使得小立方体的直径小于 σ. 把那些与 E 由公共部分的闭小立方体记作 $F_1, F_2, \ldots, F_k$，那么存在 $G_i \in \{G_\alpha\}$ 使得 $F_i \subset G_i$. 于是 $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ 就是 E 的一个有限开覆盖. □

8.5 集合的连通性

1.

证明 设 E 是一个区域. 对每个 $x \in E$, 设

$$E_x = \{y \in E \colon \text{在}\, E\, \text{中存在连接}\, x\, \text{与}\, y\, \text{的道路}\},$$

那么我们断言 E_x 是一个开集. 事实上, 对于 $z \in E_x \subset E$, 存在 $r > 0$ 使得 $B_r(z) \subset E$, 而对任意的 $w \in B_r(z)$ 可以用直线段将 z 和 w 连接, 所以在 E 中有道路将 x 和 w 连接, 这说明 $w \in E_x$, 因此 $B_r(z) \subset E_x$, 进而 E_x 是开集.

对于 E 中两个不同的 x_1 和 x_2, 易见 E_{x_1} 和 E_{x_2} 或者相同或者不交, 所以

$$E = E_x \cup \bigcup_{y \in E \setminus E_x} E_y$$

是两个不交开集的并, 由 E 连通及 E_x 非空知 $\bigcup\limits_{y \in E \setminus E_x} E_y = \varnothing$, 从而 $E = E_x$. 由 x 的任意性知 E 是道路连通的. □

2.

证明 因为 A 是闭集, 所以 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 是开集. 于是 $A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个不交分解. 因为 $\mathbb{R}^n$ 是连通的, 所以开集 A 和开集 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 中有一个是空集, 因此 $A = \varnothing$ 或者 $A = \mathbb{R}^n$. □

1.

证明 假设 $\overline{E}$ 不连通, 那么存在 $\overline{E}$ 的一个不交分解 $\overline{E} = A \cup B$ 使得 $A' \cap B = \varnothing$ 且 $A \cap B' = \varnothing$. 现在取 $A_1 = A \cap E$, $B_1 = B \cap E$, 那么显然有 $E = A_1 \cup B_1$ 和 $A_1 \cap B_1 = \varnothing$. 由 $A_1' \cap B_1 \subset A' \cap B$ 和 $A_1 \cap B_1' \subset A \cap B'$ 知 $A_1' \cap B_1 = \varnothing$ 和 $A_1 \cap B_1' = \varnothing$, 这与 E 的连通性矛盾! 因此 $\overline{E}$ 是连通的. □

2.

证明 首先 E 的连通性是显然的, 于是由第 1 题知 $\overline{E}$ 是连通的.

设 $I = \{0\} \times [0,1]$, 那么易见 $\overline{E} = E \cup I$. 取 $\boldsymbol{a} \in A$ 和 $\boldsymbol{b} \in I$, 设 $\boldsymbol{\varphi} \colon [0,1] \to \overline{E}$ 是一个满足 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(1) = \boldsymbol{b}$ 的连续映射. 令

$$\tau = \inf\{t \in [0,1] \colon \boldsymbol{\varphi}(t) \in I\},$$

那么显然 $t^* > 0$, 且存在 $\{t_n\} \subset I$ 使得当 $n \to \infty$ 时 $t_n \to \tau^+$ 且 $\boldsymbol{\varphi}(t_n) \in I$. 于是

$$\lim_{t \to \tau} \varphi_1(t) = \varphi_1(\tau) = \lim_{n \to \infty} \varphi_1(t_n) = 0,$$

从而

$$\varphi_2(\tau) = \lim_{t\to\tau^-} \varphi_2(t) = \lim_{t\to\tau^-} \sin\frac{1}{\varphi_1(t)}$$

是不存在的，矛盾！因此 $\overline{E}$ 不是道路连通的. □

8.6 多变量函数的极限

1.

答 (1) $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$.
(2) $[-1,1]\times(\mathbb{R}\setminus(-1,1))$.
(3) $\{(x,y)\colon x^2+y^2\geqslant 1\}$.
(4) $\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$.
(5) $\{(x,y)\colon |x|\leqslant|y|,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$.
(6) $\{(x,y)\colon x+y>0\}$.
(7) $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
(8) $\{(x,y)\colon |x|\leqslant|x+y|\}$.

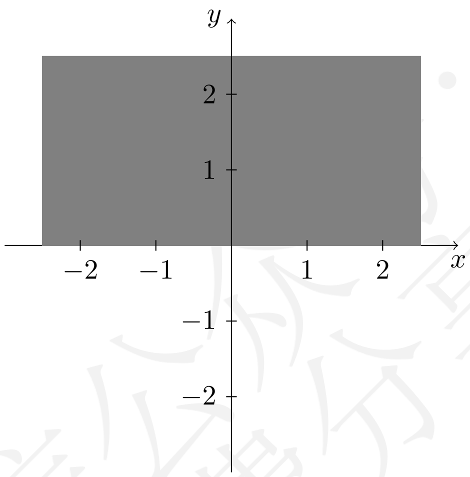

图 8.1: $u=x+\sqrt{y}$ 的定义域

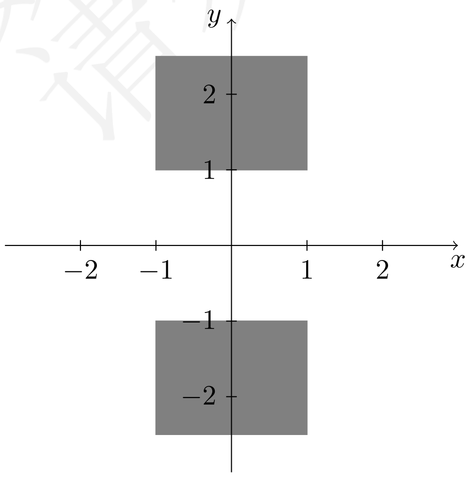

图 8.2: $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 的定义域

□

2.

答 (1) $\{(x,y,z)\colon xyz>0\}$.
(2) $\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2<2\}$.
(3) $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^2\times\mathbb{R}$.

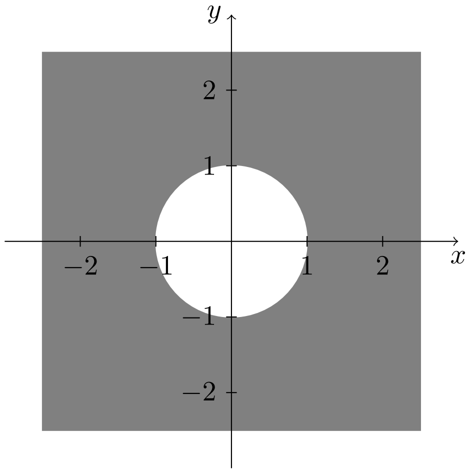

图 8.3: $u=\sqrt{x^2+y^2-1}$ 的定义域

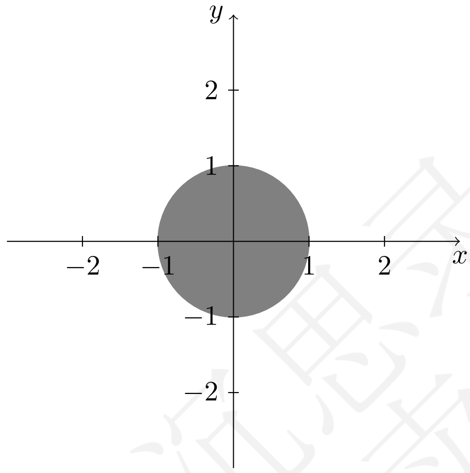

图 8.4: $u=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的定义域

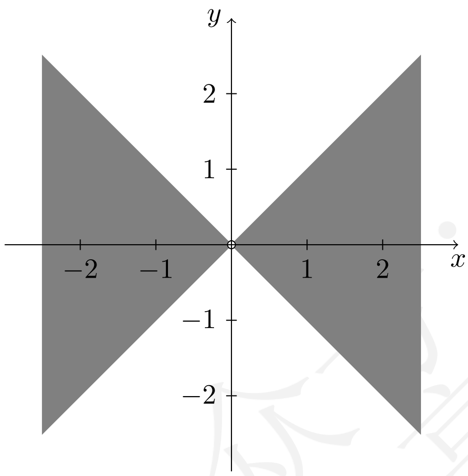

图 8.5: $u=\arcsin(y/x)$ 的定义域

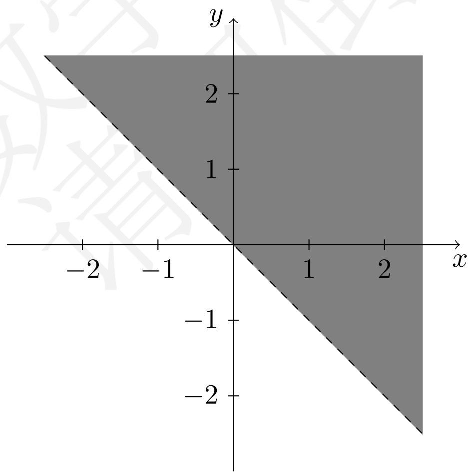

图 8.6: $\ln(x+y)$ 的定义域

(4) $\{(x,y,z)\colon |z|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\}$.

几何描述略，因为它们都是容易想象的. □

3.

证明　(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\mathrm{e}^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}=1$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2$.

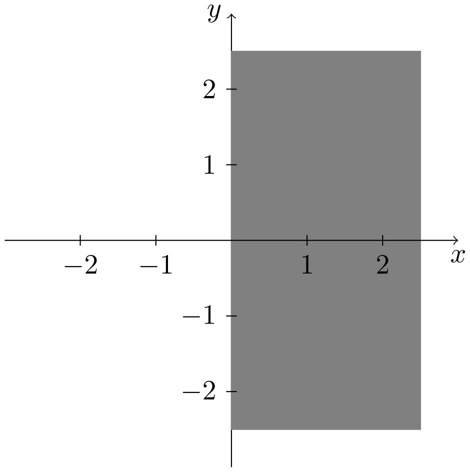

图 8.7: $u = f(x,y) = \sqrt{x}$ 的定义域

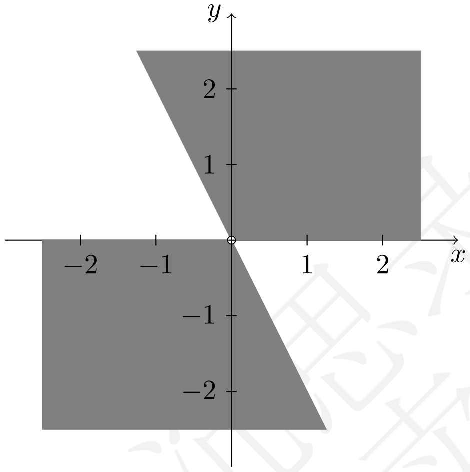

图 8.8: $u = \arccos x/(x+y)$ 的定义域

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{(x-y)^2+2xy}\right)^{x^2} = 0$.

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)} = 0$. □

4.

证明 利用定理 8.6.1 和数列极限的四则运算法则即得. □

5.

证明 (1) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \sin\dfrac{\pi x}{2x+y} = \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{\pi x}{2x+y} = \lim\limits_{y\to\infty} 1 = 1$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{x^y}{1+x^y} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{y\to0^+}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^y}{1+x^y} = \lim\limits_{y\to0^+} 1 = 1$. □

6.

证明 这是不难看出来的. □

注意

这是一个值得记忆的例子.

7.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ 时有

$$|f(x,y)-a|<\varepsilon,$$

令 $x\to x_0$ 就得到 $|h(y)-a|\leqslant\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{y\to y_0}h(y)=a$. □

8.

证明 在点 (x_0,y_0) 处的累次极限存在意味着对 y_0 旁的每一个 y，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 存在以及对 x_0 旁的每一个 x，极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$ 存在，于是由第7题知累次极限和极限相等. □

8.7 多变量的连续函数

1.

答 (1) $\{\mathbf{0}\}$.
(2) $\{\mathbf{0}\}$.
(3) $\{\mathbf{0}\}\times(\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\})$. □

2.

证明 连续性是显然的. 因为当 $0<\delta<1/2$ 时

$$|f(1-\delta,1-\delta)-f(1-2\delta,1-2\delta)|=\frac{2-3\delta}{4\delta(1-\delta)(2-\delta)}>\frac{2-3\delta}{16\delta(2-\delta)^2}>\frac{2-3\delta}{4\delta}>\frac{2-3/2}{8}=\frac{1}{16},$$

所以 f 不一致连续. □

3.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{p}\in\overline{A}$. 如果 $\boldsymbol{p}\in A$，那么 $\rho(\boldsymbol{p},A)=0$. 如果 $\boldsymbol{p}\in A'$，那么存在 $\{\boldsymbol{p}_n\}\subset A$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}$，于是

$$\rho(\boldsymbol{p},A)=\inf_{\boldsymbol{a}\in A}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}\|=0,$$

所以 $\rho(\boldsymbol{p},A)=0$.

设 $\rho(\boldsymbol{p},A)=0$. 如果 $\boldsymbol{p}\in A$，那么 $\boldsymbol{p}\in\overline{A}$. 如果 $\boldsymbol{p}\notin A$，那么存在 $\{\boldsymbol{p}_n\}\subset A$ 使得 $\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}\|<1/n$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}$，进而 $\boldsymbol{p}\in A'$.

因此 $\overline{A}=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n\colon\rho(\boldsymbol{p},A)=0\}$.

(2) 因为

$$\rho(\boldsymbol{p}, A) \leqslant \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}\| \leqslant \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|+\|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{a}\|,\ \boldsymbol{a} \in A,$$

所以对 $\boldsymbol{a}$ 再取下确界就得到 $\rho(\boldsymbol{p}, A) \leqslant \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|+\rho(\boldsymbol{q}, A)$. 对称地还有 $\rho(\boldsymbol{q}, A) \leqslant \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|+\rho(\boldsymbol{p}, A)$, 因此

$$|\rho(\boldsymbol{p}, A)-\rho(\boldsymbol{q}, A)| \leqslant \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|.$$ □

4.

证明 (1) 易见

$$\rho(A, B)=\inf_{\boldsymbol{a} \in A} \rho(\boldsymbol{a}, B),$$

所以存在 $\{\boldsymbol{a}_n\} \subset A$ 使得 $\rho(\boldsymbol{a}_n, B)<\rho(A, B)+1/n$. 于是取 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 的一个聚点 $\boldsymbol{a}$ 就有有 $\rho(\boldsymbol{a}, B)=\rho(A, B)$. 由 A 是紧致的知 $\boldsymbol{a} \in A$.

(2) 由第 (1) 题知已经存在 $\boldsymbol{a} \in A$ 使得

$$\rho(A, B)=\rho(\boldsymbol{a}, B)=\inf_{\boldsymbol{b} \in B}\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|.$$

于是存在 $\{\boldsymbol{b}_n\} \subset B$ 使得 $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}_n\|<\rho(\boldsymbol{a}, B)+1/n$. 于是取 $\{\boldsymbol{b}_n\}$ 的一个聚点 $\boldsymbol{b}$ 就有 $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|=\rho(\boldsymbol{a}, B)=\rho(A, B)$. 由 B 是紧致的知 $\boldsymbol{b} \in B$.

(3) 显然 $A \cap B \neq \varnothing$ 蕴含着 $\rho(A, B)=0$.

当 $\rho(A, B)=0$ 时, 存在 $\boldsymbol{a} \in A$ 使得 $\rho(\boldsymbol{a}, B)=\rho(A, B)=0$, 于是对任意的 $r>0$ 都有 $B_r(\boldsymbol{a}) \cap B \neq \varnothing$, 从而 $\boldsymbol{a} \in \overline{B}=B$. 因此 $\boldsymbol{a} \in A \cap B \neq \varnothing$. □

5.

答 比如取 $A=\mathbb{R} \times\{0\}$ 而 $B=\{(x, 1/x): x>0\}$. □

6.

证明 设 $A \subset B_R(\mathbf{0})$, 那么显然 $\{\boldsymbol{p}: \mathbb{R}^n: \rho(\boldsymbol{p}, A) \leqslant c\} \subset B_{R+2c}(\mathbf{0})$, 因此 $\{\boldsymbol{p}: \mathbb{R}^n: \rho(\boldsymbol{p}, A) \leqslant c\}$ 中的任一点列 $\{\boldsymbol{p}_k\}$ 都是有界的, 从而从其中可以取出一个收敛子列 $\{\boldsymbol{p}_{k_i}\}$ 且不妨设它收敛到 $\boldsymbol{p}_0$. 由 $\rho(\boldsymbol{p}, A)$ 的连续性知 $\rho(\boldsymbol{p}_0, A) \leqslant c$, 从而 $\boldsymbol{p}_0 \in\{\boldsymbol{p}: \mathbb{R}^n: \rho(\boldsymbol{p}, A) \leqslant c\}$, 进而 $\{\boldsymbol{p}: \mathbb{R}^n: \rho(\boldsymbol{p}, A) \leqslant c\}$ 是列紧的, 也是紧致的. □

7.

证明 与第 6 题类似地, $\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p}) \leqslant 0\}$ 和 $\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p}) \geqslant 0\}$ 都是闭集, 从而 $\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p})>0\}$ 和 $\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p})<0\}$ 都是开集. 又

$$\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p}) \neq 0\}=\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p})>0\} \cup\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p})<0\},$$

所以 $\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n: f(\boldsymbol{p}) \neq 0\}$ 是非连通集. □

1.

答 取

$$h(\boldsymbol{p})=\frac{\rho(\boldsymbol{p},B)}{\rho(\boldsymbol{p},A)+\rho(\boldsymbol{p},B)}$$

即可. □

2.

证明 设 h 仍然是第1题中的 h，那么取

$$G=\left\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n\colon \frac{1}{2}<h(\boldsymbol{p})\leqslant 1\right\},\ H=\left\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n\colon 0\leqslant h(\boldsymbol{p})<\frac{1}{2}\right\}$$

即可. □

8.8 连续映射

1.

证明 设 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(\overline{E})$. 如果 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(E)$, 那么当然 $\boldsymbol{y}\in\overline{\boldsymbol{f}(E)}$. 如果 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(E')$, 那么存在 $\boldsymbol{x}\in E'$ 使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 于是存在 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset E$ 使得 $\boldsymbol{x}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 由 $\boldsymbol{f}$ 的连续性知 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$, 因此 $\boldsymbol{y}\in\overline{\boldsymbol{f}(E)}$. 所以 $\boldsymbol{f}(\overline{E})\subset\overline{\boldsymbol{f}(E)}$.

因为 $\boldsymbol{f}(\overline{E})=\overline{\boldsymbol{f}(\overline{E})}$，所以当 $\boldsymbol{f}(\overline{E})=\boldsymbol{f}(E)$ 时等号成立. □

2.

证明 (1) 对于 $\mathrm{G}(\boldsymbol{f})$ 中的一个收敛点列 $\{(x_n,\boldsymbol{f}(x_n))\}$，设它的极限是 $(x,\boldsymbol{y})$. 由 E 是闭集知 $x\in E$，所以 $\boldsymbol{y}=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{f}(x_n)=\boldsymbol{f}(x)$，因此 $(x,\boldsymbol{y})\in\mathrm{G}(\boldsymbol{f})$，从而 $\mathrm{G}(\boldsymbol{f})$ 是闭集.

(2) 因为 $\boldsymbol{f}$ 连续，所以

$$\boldsymbol{g}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{m+1},\ x\mapsto(x,\boldsymbol{f}(x))$$

也连续，因此 $\mathrm{G}(\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}(E)$ 也是紧致集.

(3) 假设 $\boldsymbol{f}$ 在某个点 a 处不是连续的，那么存在 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $x_n\neq a$，但是 $f(x_n)\not\to f(a)$. 于是存在 $\varepsilon_0>0$ 和子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\|\boldsymbol{f}(x_{n_k})-\boldsymbol{f}(a)\|>\varepsilon_0$. 因为 $\mathrm{G}(\boldsymbol{f})$ 是紧致集，所以 $\{(x_{n_k},\boldsymbol{f}(x_{n_k}))\}$ 有一个收敛子列 $\{(x_{n_{k_i}},f(x_{n_{k_i}}))\}$，从而

$$\mathrm{G}(\boldsymbol{f})\ni\lim_{i\to\infty}(x_{n_{k_i}},\boldsymbol{f}(x_{n_{k_i}}))=(a,\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{f}(x_{n_{k_i}})),$$

因此 $\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{f}(x_{n_{k_i}})=f(a)$，这与 $\|\boldsymbol{f}(x_{n_k})-\boldsymbol{f}(a)\|>\varepsilon_0$ 矛盾! 因此 $\boldsymbol{f}$ 是连续的. □

1.

证明 假设 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 在某点 $\boldsymbol{y}_0$ 处不连续，那么存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\{\boldsymbol{y}_k\}\subset D$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{y}_0$ 且 $\boldsymbol{y}_k\neq\boldsymbol{y}_0$，但是 $\|\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_k)-\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0)\|\geqslant\varepsilon_0$．因为 E 是紧致的，所以 $\{\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_k)\}$ 有一个收敛子列 $\{\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_{k_i})\}$，其极限设为 $\boldsymbol{x}_0$．由 $\boldsymbol{f}$ 的连续性知

$$\boldsymbol{y}_0=\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{y}_{k_i}=\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_{k_i}))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),$$

又因为 $\boldsymbol{f}$ 是单射，所以

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{x}_0=\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}_{k_i}),$$

矛盾！因此 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 是连续的． □

2.

证明 用 S^1 表示单位圆周．假设存在一对一的连续映射 $f\colon[0,1]\to S^1$，那么 $f(0)\neq f(1)$．于是连续映射 $f|_{(0,1)}$ 把连通集 $(0,1)$ 映成非连通集 $S^1\setminus\{f(0),f(1)\}$，矛盾！因此不存在这样的连续映射． □

3.

证明 假设存在一对一的连续映射 $f\colon[0,1]\to[0,1]^2$，因为 $[0,1]$ 是紧致集，由第 1 题知 f^{-1} 是连续的，但是 f^{-1} 把连通集 $[0,1]^2\setminus\{f(1/2)\}$ 映成非连通集 $[0,1]\setminus\{1/2\}$，矛盾！因此不存在这样的连续映射． □

第九章　多变量函数的微分学

9.1　方向导数和偏导数

1.

答　(1) $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(1,1)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t/\sqrt{2},1+t/\sqrt{2})-f(1,1)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t/\sqrt{2})^2-1}{t}=\sqrt{2}$.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(0,1)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(3t/5,1-4t/5)-f(0,1)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(3t/5-1)^2-(1-4t/5)^2}{t}=2/5$. □

2.

答　因为

$$\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\frac{\sqrt{|\cos 2\theta|}}{\sqrt{t}},$$

所以 f 的方向导数只在 $\theta=\pi/4$ 和 $\theta=3\pi/4$ 的方向存在. □

3.

答　因为

$$\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\frac{t\sin t\cos t}{|t|},$$

所以 f 的方向导数只在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi/2$ 的方向存在. □

4.

答　任取平面 $x+y+z=0$ 上的一点 (x_0,y_0,z_0)，那么

$$\begin{aligned}&\frac{f(x_0+t\sin\theta\cos\varphi,y_0+t\sin\theta\sin\varphi,z_0+t\cos\theta)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}\\=&\frac{|t|(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta)}{t},\end{aligned}$$

因此在 $(\theta,\varphi)=(\pi/2,3\pi/4),(\pi/2,7\pi/4),(3\pi/4,0),(7\pi/4,0),(3\pi/4,\pi),(7\pi/4,\pi)$ 的方向 f 存在方向导数. □

5.

解 (1) 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1+\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1+\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2) 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{1+xy},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{1+xy},$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{2}{3},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\frac{1}{3}.$$

(3) 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^{x+y^2}+2xy\cos(x^2y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\mathrm{e}^{x+y^2}+x^2\cos(x^2y),$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\mathrm{e}^2+2\cos 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=2\mathrm{e}^2+\cos 1.$$

□

6.

答 (1) $z_x=y+1/y$，$z_y=x-x/y^2$.

(2) $z_x=2(x/y)\sec^2(x^2/y)$，$z_y=-(x/y)^2\sec^2(x^2/y)$.

(3) $z_x=yx^{y-1}$，$z_y=x^y\ln x$.

(4) $z_x=1/(x+y^2)$，$z_y=2y/(x+y^2)$.

(5) $z_x=-y/(x^2+y^2)$，$z_y=x/(x^2+y^2)$.

(6) $z_x=y\cos xy$，$z_y=x\cos xy$.

(7) $u_x=(3x^2+y^2+z^2)\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$，$u_y=2xy\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$，$u_z=2xz\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

(8) $u_x=yz\mathrm{e}^{xyz}$，$u_y=xz\mathrm{e}^{xyz}$，$u_z=xy\mathrm{e}^{xyz}$.

(9) $u_x=yzx^{yz-1}$，$u_y=x^{yz}z\ln x$，$u_z=x^{yz}y\ln x$.

(10) $u_x=1/(x+y^2+z^3)$，$u_y=2y/(x+y^2+z^3)$，$u_z=3z/(x+y^2+z^3)$.

(11) $z_{x_i}=x_i/(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

(12) $z_{x_i}=2x_i/\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}$.

□

1.

证明 要证 $a^{b^a} > b^{a^b}$，只要证

$$a\ln b + \ln\ln a > b\ln a + \ln\ln b.$$

令 $x = \ln a/\ln b$，$y = \ln b$，那么只要证

$$\mathrm{e}^{xy}y + \ln xy > \mathrm{e}^{y}xy + \ln y,$$

亦即 $\ln x > y(x\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{xy}) = y(\mathrm{e}^{\ln x+y} - \mathrm{e}^{xy})$. 事实上, 因为 $x > 1$, 所以 $\ln x > 0 > y(\mathrm{e}^{\ln x+y} - \mathrm{e}^{xy})$. □

2.

证明 设 M 是 $|\partial f/\partial x|$ 和 $|\partial f/\partial y|$ 的共同上界. 对任意的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon/(2M)$. 对任意每一对满足 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ 的 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$，设

$$g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2),$$

那么存在 $\xi \in [0, 1]$ 使得

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |g(1) - g(0)| = |g'(\xi)| = |(x_1 - x_2)f_x + (y_1 - y_2)f_y| \leqslant 2\delta M = \varepsilon.$$

因此 f 在 D 上一致连续. □

9.2 多变量函数的微分

1.

证明 因为

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta},$$

所以 f 在原点处各个方向的方向导数都存在. 容易看出 f 在原点不连续，所以不可微. □

2.

证明 因为极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在，所以 f 在原点处不可微. □

3.

证明 这是因为在 R^2 中的每一点 (x_0, y_0) 处有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-(x-x_0)f_x(x_0,y_0)-(y-y_0)f_y(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0. \qquad \square$$

4.

答 (1) $6\,\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y$.

(2) $(1/2+\mathrm{e}^3\sin 1)\,\mathrm{d}x + (1/2+\mathrm{e}^3\sin 1)\,\mathrm{d}y + (-1/2+\mathrm{e}^3\cos 1)\,\mathrm{d}z$.

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i\,\mathrm{d}x_i}{\sqrt{t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2}}$.

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i x_i^{i-1}\cos(x_1+x_2^2+\cdots+x_n^n)\,\mathrm{d}x_i$. $\square$

5.

答 (1) $\mathbf{J}f = (2xy^3, 3x^2y^2)$.

(2) $\mathbf{J}f = (2xy\sin yz, x^2yz\cos yz + x^2\sin yz, x^2y^2\cos yz)$.

(3) $\mathbf{J}f = (\cos(y-3z)+y/\sqrt{1-x^2y^2}, -x\sin(y-3z)+x/\sqrt{1-x^2y^2}, 2x\sin(y-3z))$.

(4) $\mathbf{J}f = (x_1/f, x_2/f, \ldots, x_n/f)$. $\square$

6.

证明 不难写出

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=0 \end{cases}$$

以及

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=0 \end{cases},$$

由此可见 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial y$ 在 $(0,0)$ 处都不连续. 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xf_x(0,0)-yf_y(0,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. $\square$

1.

证明 事实上取

$$g_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{\partial f(t,0)}{\partial x}\,\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\ g_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\displaystyle\int_0^y\frac{\partial f(x,t)}{\partial y}\,\mathrm{d}t, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

即可. □

2.

证明 不妨设 $\partial f/\partial y$ 在 (x_0,y_0) 处是连续的. 注意到当 $(h,k)\to(0,0)$ 时有

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)&=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)\\&=f_y(x_0+h,y_0+\theta k)k+f_x(x_0,y_0)h+o(h)\\&=(f_y(x_0,y_0)+o(1))k+f_x(x_0,y_0)h+o(h)\\&=f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+o(\sqrt{h^2+k^2}),\end{aligned}$$

因此 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微. □

9.3 映射的微分

1.

答 (1) 雅可比矩阵是 $\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 3 & 10\end{pmatrix}$, 微分是 $\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 3 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$.

(2) 雅可比矩阵是 $\begin{pmatrix}-18 & 25 & -12\\ 12 & 0 & -4\end{pmatrix}$, 微分是 $\begin{pmatrix}-18 & 25 & -12\\ 12 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{pmatrix}$.

(3) 雅可比矩阵是 $\begin{pmatrix}-\mathrm{e}\pi/2 & -\mathrm{e}\\ \mathrm{e} & 0\end{pmatrix}$, 微分是 $\begin{pmatrix}-\mathrm{e}\pi/2 & -\mathrm{e}\\ \mathrm{e} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$. □

2.

答 (1) $\mathbf{J}f=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{J}f=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(3) $\mathbf{J}f=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$. □

3.

证明　略. □

4.

证明　这是因为

$$0=\mathbf{J}\|\boldsymbol{f}(t)\|=\mathbf{J}\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{f}(t)\rangle=2\langle\mathbf{J}\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}\rangle.$$

从几何上来看，这是因为球面上函数的增量向量总是垂直径向. □

5.

证明　比如 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(\alpha(x),\beta(y),\gamma(z))$. □

6.

证明　(1) 这是因为 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\boldsymbol{f}(0\boldsymbol{x})=0\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$.
(2) 显然.
(3) 这是因为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)=x_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)+x_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+x_n\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n).$$ □

7.

证明　不难直接写出 $\mathbf{J}\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2),\dots,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_n))$. □

8.

证明　略. □

9.4　复合求导

1.

证明　这是因为 $y\partial u/\partial x=2xyf'(x^2+y^2)=x\partial u/\partial y$. □

2.

证明　这是因为 $x\partial u/\partial x=xyf'(xy)=y\partial u/\partial y$. □

3.

证明 这是因为 $x\partial u/\partial x = f'(\ln x + 1/y) = -y\partial u/\partial y$. □

4.

证明 事实上 $\psi'(y)\partial u/\partial x = \varphi'(x)\psi'(y)f'(\varphi(x)+\psi(y)) = \varphi'(x)\partial u/\partial y$. □

5.

答 (1) $u_x = f_1(x+y, xy) + yf_2(x+y, xy)$, $u_y = f_1(x+y, xy) + xf_2(x+y, xy)$.

(2) $u_x = f_1(x, xy, xyz) + yf_2(x, xy, xyz) + yzf_3(x, xy, xyz)$, $u_y = xf_2(x, xy, xyz) + xzf_3(x, xy, xyz)$, $u_z = xyf_3(x, xy, xyz)$.

(3) $u_x = y^{-1}f_1(x/y, y/z)$, $u_y = -xy^{-2}f_1(x/y, y/z) + z^{-1}f_2(x/y, y/z)$, $u_z = -yz^{-2}f_2(x/y, y/z)$. □

6.

答 因为

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x, x^2) = f_1(x, x^2) + 2xf_2(x, x^2) = x + 2xf_2(x, x^2),$$

所以 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2} = -\dfrac{1}{2}$. □

7.

证明 因为 $u = r^3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2\cos\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta),\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{r^3}{4}(\cos\theta + 3\cos 3\theta + \sin\theta - 3\sin 3\theta). \quad □$$

8.

证明 因为

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{\frac{w}{u}} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\sqrt{\frac{v}{u}},$$

所以对称地还有

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{w}{v}} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}\sqrt{\frac{u}{v}},\ \frac{\partial F}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{v}{w}} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{\frac{u}{w}}.$$

因此

$$u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v} + w\frac{\partial F}{\partial w} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}. \quad □$$

9.

答　(1) 因为

$$\mathbf{J}\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2xy&x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2s&-2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2s&-2t\\4s^3+6ts^2-2t^3&2s^3-6t^2s-4t^3\end{pmatrix},$$

所以在 $(2,1)$ 处的雅可比矩阵是

$$\begin{pmatrix}1&1\\4&-2\\54&0\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\mathbf{J}\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}\varphi'(x+y)&\varphi'(x+y)\\\varphi'(x-y)&-\varphi'(x-y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\mathrm{e}^t\\0&-\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\varphi'(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\\0&(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\varphi'(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}&=\begin{pmatrix}2x&1&1\\2&1&2z\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^2w^2&2uvw^2&2uv^2w\\0&w^2\cos v&2w\sin v\\2\mathrm{e}^vu&\mathrm{e}^vu^2&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2uv^4w^4+2\mathrm{e}^vu&4u^2v^3w^4+w^2\cos v+\mathrm{e}^vu^2&4u^2w^3v^4+2w\sin v\\4\mathrm{e}^{2v}u^3+2v^2w^2&2\mathrm{e}^{2v}u^4+4vw^2u+w^2\cos v&4uwv^2+2w\sin v\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$ □

10.

证明　设

$$\begin{pmatrix}\partial f/\partial\boldsymbol{e}_1\\\partial f/\partial\boldsymbol{e}_2\\\partial f/\partial\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\\partial f/\partial y\\\partial f/\partial z\end{pmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{T}$ 是一个正交矩阵，因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{e}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{e}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{e}_3}\right)^2&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{e}_1}&\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{e}_2}&\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{e}_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial f/\partial\boldsymbol{e}_1\\\partial f/\partial\boldsymbol{e}_2\\\partial f/\partial\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}&\dfrac{\partial f}{\partial y}&\dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\\partial f/\partial y\\\partial f/\partial z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}&\dfrac{\partial f}{\partial y}&\dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\\partial f/\partial y\\\partial f/\partial z\end{pmatrix}\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.\end{aligned}$$ □

1.

证明 充分性是显然的. 当 $a^{-1}\partial f/\partial x = b^{-1}\partial f/\partial y = c^{-1}\partial f/\partial z$ 时，设

$$u = ax + by + cz,\ v = y,\ w = z,$$

再记

$$h(u, v, w) = f(x, y, z) = f((u - bv - cw)/a, v, w),$$

那么

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{b}{a}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial h}{\partial w} = -\frac{c}{a}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

这正说明

$$f(x, y, z) = h(u, v, w) = g(u) = g(ax + by + cz).$$ □

2.

证明 当 f 是 q 次齐次函数时，在 $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^q f(x_1, \ldots, x_n)$ 的两端对 t 求导可得

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(t\boldsymbol{x}) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(t\boldsymbol{x}) = qt^{q-1}f(\boldsymbol{x}),$$

再取 $t = 1$ 就得到

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = qf(\boldsymbol{x}).$$

当

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = qf(\boldsymbol{x})$$

时，取 $\varphi(t) = t^{-q}f(tx_1, \ldots, tx_n)$，那么 $\varphi'(t) = 0$. 因此 $\varphi(t) = \varphi(1)$，这蕴含着 $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^q f(x_1, \ldots, x_n)$，即 f 是 q 次齐次函数. □

9.5 曲线的切线和曲线的切平面

1.

答 分别是 $(1, 0, 0) + t(1, 1, 0)$ 和 $(\mathrm{e}, 1, 1) + t(\mathrm{e}, 1, 2)$. □

2.

证明 事实上

$$\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right) \cdot \left(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, -\frac{4t}{(1+t^2)^2}, 0\right) = 0.$$

这是一个圆. □

3.

证明　事实上

$$\frac{\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}(t)\|\|\boldsymbol{r}'(t)\|}=\frac{(\mathrm{e}^t\cos t,\mathrm{e}^t\sin t)\cdot(\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t),\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t))}{\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{2}\mathrm{e}^t}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ □

4.

证明　根据柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{y(b)-y(a)}{x(b)-x(a)}=\frac{y'(\xi)}{x'(\xi)},$$

于是 ξ 就是所求的点. □

5.

证明　略. □

6.

证明　这是因为

$$0=(\|\boldsymbol{a}(t)\|^2)'=(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}(t))'=2\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{a}'(t).$$ □

7.

证明　中学知识，略. □

8.

答　(1) 不难算出

$$\boldsymbol{r}'(t)=(a\sinh t,a\cosh t,a),\ \boldsymbol{r}''(t)=(a\cosh t,a\sinh t,0),$$

所以曲率

$$k(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3}=\frac{1}{a(1+\cosh 2t)}.$$

(2) 不难算出

$$\boldsymbol{r}'(t)=(3a(1-t^2),6at,3a(1+t^2)),\ \boldsymbol{r}''(t)=(-6at,6a,6at),$$

所以曲率

$$k(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\|}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^3}=\frac{1}{3a(1+t^2)^2}.$$ □

9.

答 这个球面曲线是关于 xy 平面对称的，在 xy 平面上方其参数方程可表示为

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}(t+1/t)/2 \\ y = \sqrt{3}(t-1/t)/2 \\ z = \sqrt{9-3(t^2+1/t^2)/2} \end{cases},$$

通过琐碎的计算可得其曲率为

$$k = \frac{(1+t^2)\sqrt{3t^8-12t^6+34t^4-12t^2+3}}{(3-2t^2+3t^4)^{3/2}}.$$

点 $\boldsymbol{p}_0$ 对应的参数 $t=\sqrt{3}$，因此所求的曲率就是 $\sqrt{2}/3$. □

10.

答 (1) 法向量是 $(1,1,\sqrt{2})$，切平面方程是 $x+y+\sqrt{2}-4=0$.
(2) 法向量是 $(-1/2,1/2,-1)$，切平面方程是 $x-y+2z-\pi/2=0$.
(3) 法向量是 $(3,2,-1)$，切平面方程是 $3x+2y-z-3=0$.
(4) 法向量是 $(-1,-1,2)$，切平面方程是 $x+y-2z=0$. □

11.

解 事实上该椭圆上一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程是 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$，于是令

$$\begin{cases} x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21 \\ x_0=2y_0/4=3z_0/6 \end{cases}$$

可解得 $(x_0,y_0,z_0)=\pm(1,2,2)$，因此所求的切平面就是 $x+4y+6z=\pm21$. □

12.

证明 因为 $z_x=(1+x/y)\mathrm{e}^{x/y}$，$z_y=-x^2\mathrm{e}^{x/y}/y^2$，所以曲面上 $(x_0,y_0,x_0\mathrm{e}^{x_0/y_0})$ 处的切平面方程是

$$\left(1+\frac{x_0}{y_0}\right)\mathrm{e}^{x_0/y_0}(x-x_0)-\frac{x_0^2\mathrm{e}^{x_0/y_0}}{y_0^2}(y-y_0)-(z-\mathrm{e}^{x_0/y_0})=0,$$

它确实是经过原点的. □

13.

解　不难列出切点 (x_0,y_0,z_0) 满足

$$\begin{cases} x_0y_0z_0=\lambda \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1 \\ \dfrac{x_0}{a^2}\Big/\dfrac{-\lambda}{x_0^2y_0}=\dfrac{y_0}{b^2}\Big/\dfrac{-\lambda}{x_0y_0^2}=\dfrac{z_0}{c^2}\Big/(-1) \end{cases},$$

从而可得 $\lambda=\pm\sqrt{3}abc/9$. □

14.

答　设 (x_0,y_0,z_0) 两个曲面的一个交点, 两曲面的法向量分别是 $(x_0,y_0,0)$ 和 $(y_0/b,x_0/b,-1)$, 它们的夹角是

$$\arccos\frac{2x_0y_0/b}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2/b^2+y_0^2/b^2+1}}=\arccos\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}.$$ □

15.

答　这个椭球面上的点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量是 $(x_0/a^2,y_0/b^2,z_0/c^2)$, 利用它与 x 轴和 z 轴的夹角相等的条件可以列出

$$\frac{x_0/a^2}{\sqrt{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4+z_0^2/c^4}}=\frac{z_0/c^2}{\sqrt{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4+z_0^2/c^4}},$$

因此所求点的全体就是曲线

$$\begin{cases} x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1 \\ x/a^2=z/b^2 \end{cases}.$$ □

16.

答　所求平面的法向量是

$$(1,-1,-1)\times\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right),$$

于是不难写出所求的切平面就是 $x+y=(1\pm\sqrt{2})/2$. □

17.

证明　这个曲面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量是 $(1/\sqrt{x_0},1/\sqrt{y_0},1/\sqrt{z_0})$, 于是这点处的切平面是

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{\sqrt{z_0}}=0,$$

由此看出结论确实成立. □

18.

证明 这个曲面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量是

$$(F_1(x_0-az_0,y_0-bz_0),F_2(x_0-az_0,y_0-bz_0),-aF_1(x_0-az_0,y_0-bz_0)-bF_2(x_0-az_0,y_0-bz_0)),$$

它垂直于向量 $(a,b,1)$，因此这个曲面上的切平面平行于直线 $x/a=y/b=z$. □

19.

证明 这个曲面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量是

$$\begin{aligned}\Bigg(\frac{1}{z_0-c}F_1\left(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\right),\frac{1}{z_0-c}F_2\left(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\right),-\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}F_1\left(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\right)\\-\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}F_2\left(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c}\right)\Bigg),\end{aligned}$$

它垂直于向量 (x_0-a,y_0-b,z_0-c)，因此所有的切平面都经过固定点 (a,b,c). □

20.

证明 这是因为这个曲面在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的法向量是

$$\begin{aligned}&(2x_0\Phi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-a,2y_0\Phi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-b,2z_0\Phi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-c)\\=&2\Phi'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)(x_0,y_0,z_0)-(a,b,c).\end{aligned}$$

□

21.

解 两曲面在 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量是 $(F_x(\boldsymbol{p}_0),F_y(\boldsymbol{p}_0),F_z(\boldsymbol{p}_0))$ 和 $(G_x(\boldsymbol{p}_0),G_y(\boldsymbol{p}_0),G_z(\boldsymbol{p}_0))$，所以交线在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的切线是

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y(\boldsymbol{p}_0) & F_z(\boldsymbol{p}_0)\\ G_y(\boldsymbol{p}_0) & G_z(\boldsymbol{p}_0)\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z(\boldsymbol{p}_0) & F_x(\boldsymbol{p}_0)\\ G_z(\boldsymbol{p}_0) & G_x(\boldsymbol{p}_0)\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x(\boldsymbol{p}_0) & F_y(\boldsymbol{p}_0)\\ G_x(\boldsymbol{p}_0) & G_y(\boldsymbol{p}_0)\end{vmatrix}}.$$

交线的切线的投影和交线的投影的切线是一样的，所以所求的切线方程就是

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y(\boldsymbol{p}_0) & F_z(\boldsymbol{p}_0)\\ G_y(\boldsymbol{p}_0) & G_z(\boldsymbol{p}_0)\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z(\boldsymbol{p}_0) & F_x(\boldsymbol{p}_0)\\ G_z(\boldsymbol{p}_0) & G_x(\boldsymbol{p}_0)\end{vmatrix}}.$$

□

22.

证明 (1) 因为

$$\boldsymbol{r}_u(u,v)=(a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, -c\sin u),\ \boldsymbol{r}_v(u,v)=(-a\sin u\sin v, b\sin u\cos v, 0),$$

所以

$$\begin{aligned}E&=(a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v)\cos^2 u+c^2\sin^2 u,\\F&=(b^2-a^2)\cos u\sin u\cos v\sin v,\\G&=\sin^2 u(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v).\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\boldsymbol{r}_u(u,v)=(a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u),\ \boldsymbol{r}_v(u,v)=(-a\cosh u\sin v, b\cosh u\cos v, 0),$$

所以

$$\begin{aligned}E&=(a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v)\sinh^2 u+c^2\cosh^2 u,\\F&=(b^2-a^2)\cosh u\sinh u\cos v\sin v,\\G&=\cosh^2 u(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v).\end{aligned}$$

(3) 因为

$$\boldsymbol{r}_u(u,v)=(1,0,u/a^2),\ \boldsymbol{r}_v(u,v)=(0,1,v/b^2),$$

所以

$$E=1+u^2/a^4,\ F=uv/(a^2b^2),\ G=1+v^2/b^4. \qquad \square$$

23.

证明 这是因为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2=(\boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v)^2=\boldsymbol{r}_u^2\,\mathrm{d}u^2+2\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\boldsymbol{r}_v^2\,\mathrm{d}v^2. \qquad \square$$

24.

答 $\displaystyle\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{v^2+a^2+1}\,\mathrm{d}v$. $\square$

9.6 隐函数定理

1.

答 (1) 因为

$$2x+2y+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=(y+x)/(y-x)$.

(2) 因为 $x+xy'-y'/y=0$，所以 $y'=y^2/(1-xy)$，进而在 $(0,1)$ 处 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$.

(3) 因为 $y'-\varepsilon y'\cos y=1$，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1/(1-\varepsilon\cos y)$.

(4) 令 $F(x,y)=x^y-y^x$，那么

$$F_x(x,y)=yx^{y-1}-y^x\ln y,\ F_y(x,y)=x^y\ln x-xy^{x-1},$$

所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-F_x/F_y=(y^x\ln y-yx^{y-1})/(x^y\ln x-xy^{x-1})$. □

2.

答 (1) 令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xyz$，那么

$$F_x(x,y,z)=-yz,\ F_y(x,y,z)=-xz,\ F_z(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xy,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{\mathrm{e}^z-xy}.$$

(2) 令 $F(x,y,z)=x/z-ln(z/y)$，那么

$$F_x(x,y,z)=1/z,\ F_y(x,y,z)=1/y,\ F_z(x,y,z)=-x/z^2-1/z,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

(3) 令 $F(x,y,z)=x+y+z-\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$，那么

$$F_x(x,y,z)=1+\mathrm{e}^{-(x+y+z)},\ F_y(x,y,z)=1+\mathrm{e}^{-(x+y+z)},\ F_z(x,y,z)=1+\mathrm{e}^{-(x+y+z)},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-1,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y}{F_z}=-1,$$

这说明这是一个平面.

(4) 令 $F(x,y,z)=z^2y-xz^3-1$，那么

$$F_x(x,y,z)=-z^3,\ F_y(x,y,z)=z^2,\ F_z(x,y,z)=2zy-3xz^2,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z^2}{2y-3xz},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{z}{2y-3xz}.$$

□

3.

证明 这是因为

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},\ \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}.$$

□

4.

答 不难直接写出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_3(x-y,y-z,z-x)-F_1(x-y,y-z,z-x)}{F_3(x-y,y-z,z-x)-F_2(x-y,y-z,z-x)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_1(x-y,y-z,z-x)-F_2(x-y,y-z,z-x)}{F_3(x-y,y-z,z-x)-F_2(x-y,y-z,z-x)}.$$

□

5.

答 不难直接写出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2xF_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)}{F_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2zF_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2yF_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)}{F_1(x+y+z,x^2+y^2+z^2)+2zF_2(x+y+z,x^2+y^2+z^2)}.$$

□

1.

证明 利用问题9.4的第2题，我们有

$$xf_x+yf_y+zf_z=qf,$$

于是

$$x\varphi_x+y\varphi_y=-\frac{xf_x}{f_z}-\frac{yf_y}{f_z}=z-\frac{qf(x,y,\varphi(x,y))}{f_z}=\varphi.$$

因此 $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数. □

2.

证明 对每个 $x_0\in(a,b)$，作一次函数 $g(y)=F(x_0,0)+my$. 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(F(x_0,y)-g(y))=\frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y}-m\geqslant 0,$$

而 $F(x_0,0)-g(0)=0$，所以当 $y>0$ 时 $F(x_0,y)\geqslant g(y)$，当 $y<0$ 时 $F(x_0,y)\leqslant g(y)$，进而

$$\lim_{y\to+\infty}F(x_0,y)=+\infty,\ \lim_{y\to-\infty}F(x_0,y)=-\infty.$$

由此可知存在唯一的 $y_0\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $F(x_0,y_0)=0$，这样就得到唯一的解 $y=f(x)$.

然后我们来说明 $f(x)$ 是连续的．对每个 $x_0 \in (a,b)$，记 $y_0 = f(x_0)$．因为 $\partial F/\partial y > 0$，所以对任意的 $\varepsilon > 0$ 都有 $F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ 和 $F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$．由于 $F(x,y)$ 是连续的，利用其保号性可知存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时也有 $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$ 和 $F(x, y_0 - \varepsilon) > 0$．因此存在唯一的 $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ 满足 $F(x,y) = 0$，即 $y = f(x)$．这样就证明了当 $|x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$．由 x_0 的任意性知 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续． □

9.7 隐映射定理

1.

答 $$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y/\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}z/\mathrm{d}x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z-x)/(y-z) \\ (x-y)/(y-z) \end{pmatrix}.$$ □

2.

答 $$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y/\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}z/\mathrm{d}x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 4y & 6z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x+6xz)/(6yz+2y) \\ x/(3z+1) \end{pmatrix}.$$ □

3.

答 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + \frac{2}{t},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 3 + \frac{3}{t^2}.$$ □

4.

答 (1)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = -\frac{1}{u^2+v^2} \begin{pmatrix} ux+vy & vx-uy \\ uy-vx & vy+ux \end{pmatrix}.$$

(2) 把方程组改写成

$$\begin{cases} x + y - u - v = 0 \\ x\sin v - y\sin u = 0 \end{cases},$$

于是可以写出

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sin v & -\sin u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -y\cos u & x\cos v \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sin u + \sin v} \begin{pmatrix} \sin u + y\cos v & \sin u - x\cos v \\ \sin v - y\cos v & \sin v + x\cos v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$ □

5.

答 在 $(x,y,u,v,w)=(\pi/2,0,1,1,0)$ 处

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2u & -\cos xy & 2w\\ 2u & 2v & 4w\\ v & u & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}vy\sin xy & vx\sin xy\\ -y\cos xy & -x\cos xy\\ -\cos x\cos y & \sin x\sin y\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\pi/2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \pi/12\\ 0 & \pi/6\\ 0 & -\pi/4\end{pmatrix}.$$ □

6.

解 首先 $\partial u/\partial x=\partial f/\partial x$ 是容易的．其次，因为

$$\begin{pmatrix}\partial z/\partial y\\ \partial t/\partial y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\partial g/\partial z & \partial g/\partial t\\ \partial h/\partial z & \partial h/\partial t\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\partial g/\partial y\\ 0\end{pmatrix}=\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{-1}\begin{pmatrix}-\partial h/\partial t\\ \partial h/\partial z\end{pmatrix},$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}\right).$$ □

9.8 逆映射定理

1.

答 (1) 因为

$$\det\mathbf{J}\boldsymbol{f}=\det\begin{pmatrix}2x & 0\\ -y/x^2 & 1/x\end{pmatrix}=2,$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 是开映射．

(2) 因为

$$\det\mathbf{J}\boldsymbol{f}=\det\begin{pmatrix}\mathrm{e}^x\cos y & -\mathrm{e}^x\sin y\\ \mathrm{e}^x\sin y & \mathrm{e}^x\cos y\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{2x}>0,$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 是开映射．

(3) 因为

$$\det\mathbf{J}\boldsymbol{f}=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2y^2 & 4xy\end{pmatrix}=2y(2x-y),$$

所以当 D 中不包含直线 $y=0$ 和 $y=2x$ 的部分时 $\boldsymbol{f}$ 是开映射． □

2.

答 (1) $\mathbf{J}\boldsymbol{f}^{-1}=\begin{pmatrix}1/(2x) & 0\\ y/(2x^2) & x\end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{J}\boldsymbol{f}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}\cos y & \mathrm{e}^{-x}\sin y\\ -\mathrm{e}^{-x}\sin y & \mathrm{e}^{-x}\cos y\end{pmatrix}$.

(3) $\mathbf{J}\boldsymbol{f}^{-1}=\begin{pmatrix}2x/(2x-y) & -1/(4xy-2y^2)\\ -y/(2x-y) & 1/(4xy-2y^2)\end{pmatrix}$. □

9.9 高阶偏导数

1.

答 (1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=1-\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}$.

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2\sec^2(x^2/y)(y+4x^2\tan(x^2/y))}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\dfrac{2x\sec^2(x^2/y)(y+2x^2\tan(x^2/y))}{y^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x^2\sec^2(x^2/y)(y+x^2\tan(x^2/y))}{y^4}$.

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-y^2z^2\sin xyz$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x^2z^2\sin xyz$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-x^2y^2\sin xyz$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=z\cos xyz-xyz^2\sin xyz$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=x\cos xyz-x^2yz\sin xyz$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=y\cos xyz-xy^2z\sin xyz$.

(6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=1$.

(7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2z^2\mathrm{e}^{xyz}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2z^2\mathrm{e}^{xyz}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2\mathrm{e}^{xyz}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=z(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=x(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=y(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}$.

(8) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=yz(yz-1)x^{yz-2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^{yz}z^2\ln^2 x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^{yz}y^2\ln^2 x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=x^{yz-1}z(1+yz\ln x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=x^{yz}(1+yz\ln x)\ln x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=x^{yz-1}y(1+yz\ln x)$.

(9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=-\dfrac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}$.

(10) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\dfrac{2(1+2x_i(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2)}{(1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2))^{3/2}},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{4x_ix_j(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{(1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2))^{3/2}}$. □

2.

证明 利用第1题的(4)即可. □

3.

证明 事实上

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r}&=-\frac{a\mathrm{e}^{a\theta}\sin(a\ln r)}{r},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}&=-\frac{a\mathrm{e}^{a\theta}(a\cos(a\ln r)-\sin(a\ln r))}{r^2},\\
\frac{\partial u}{\partial \theta}&=a^2\mathrm{e}^{a\theta}\cos(a\ln r).
\end{aligned}
$$
□

4.

答 (1) 略.
(2) $\Delta u=2f'(p)/p+f''(p)$. □

5.

证明 事实上

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2(\varphi''(p-at)+\psi''(p+at))}{p},\ \Delta u=\frac{\varphi''(p-at)+\psi''(p+at)}{p}.$$
□

6.

答 (1) $u=x\varphi(y)+\psi(y)$.
(2) $u=\varphi(y,z)+\psi(x,z)$.
(3) $u=\varphi(y,z)+\psi(x,z)+\phi(x,y)$. □

7.

解 令

$$\xi=x,\ \eta=y/x,$$

那么

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\eta}{\xi}\frac{\partial z}{\partial \eta},\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial \eta},
\end{aligned}
$$

所以

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \xi\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \xi\eta\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = \xi\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

因此

$$z = \xi\varphi(\eta) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \square$$

8.

解 因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},
\end{aligned}$$

所以

$$0 = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2a + 2b(\lambda_1+\lambda_2) + 2\lambda_1\lambda_2 c)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

因此

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x+\lambda_1 y) + \psi(x+\lambda_2 y). \qquad \square$$

1.

证明 令 $g(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$，那么 $g(y)$ 在 y_0 的附近可导，且

$$g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y).$$

利用微分中值定理可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{hk}(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0))\\
=&\frac{1}{hk}(g(y_0+k) - g(y_0)) = \frac{1}{h}g'(y_0+\theta k) = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\theta k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta k)\right).
\end{aligned}$$

根据 $\partial f/\partial y$ 的可微性可以写出

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta k)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+h\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\theta k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)+o(\sqrt{h^2+(\theta k)^2})\ (h\to 0,k\to 0),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta k)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\theta k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)+o(\theta k)\ (h\to 0,k\to 0),$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{hk}(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0))\\=&\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\frac{1}{h}(o(\sqrt{h^2+(\theta k)^2})+o(\theta k))=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\frac{k}{h}o(1)\ (h\to 0,k\to 0).\end{aligned}$$

同样的道理有

$$\frac{1}{hk}(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0))=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)+\frac{k}{h}o(1)\ (h\to 0,k\to 0).$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\frac{k}{h}o(1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)+\frac{k}{h}o(1)\ (h\to 0,k\to 0),$$

于是令 $h=k\to 0$ 就得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$ □

2.

证明 充分性是显然的.

当 u 满足

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

时，因为

$$\begin{aligned}\frac{u(x,y)}{u(x,0)}-\frac{u(0,y)}{u(0,0)}&=\frac{u_x(\theta x,y)u(\theta x,0)-u_x(\theta x,0)u(\theta x,y)}{u^2(\theta x,0)}x=\frac{u(\theta x,y)}{u(\theta x,0)}\left(\frac{u_x(\theta x,y)}{u(\theta x,y)}-\frac{u_x(\theta x,0)}{u(\theta x,0)}\right)x\\&=\frac{u(\theta x,y)}{u(\theta x,0)}\frac{u_{xy}(\theta x,\theta' y)u(\theta x,\theta' y)-u_x(\theta x,\theta' y)u_y(\theta x,\theta' y)}{u^2(\theta x,\theta' y)}xy=0,\end{aligned}$$

所以

$$u(x,y)=u(x,0)\frac{u(0,y)}{u(0,0)}=f(x)g(y).$$ □

9.10 中值定理和泰勒公式

1.

答 (1) $2x^2-xy-y^2-6x-3y+5=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

(2) $x^3+y^3+z^3-xyz=-3(x-1)(y-1)(z-1)-3(x-1)(y-1)-3(x-1)(z-1)+(x-1)^3+3(x-1)^2-3(y-1)(z-1)+(y-1)^3+3(y-1)^2+(z-1)^3+3(z-1)^2$. □

2.

答

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)=\begin{pmatrix}x+\Delta x & y+\Delta y & z+\Delta z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&D&F\\D&B&E\\F&E&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+\Delta x\\y+\Delta y\\z+\Delta z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&D&F\\D&B&E\\F&E&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&D&F\\D&B&E\\F&E&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\\\Delta z\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\Delta x&\Delta y&\Delta z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&D&F\\D&B&E\\F&E&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta x&\Delta y&\Delta z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&D&F\\D&B&E\\F&E&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\\\Delta z\end{pmatrix}$$

$$=f(x,y,z)+2(Ax+Dy+Fz)\Delta x+2(By+Dx+Ez)\Delta y+2(Cz+Fx+Fy)\Delta z+f(\Delta x,\Delta y,\Delta z).$$ □

3.

答 $x^y\approx 1+(x-1)+(x-1)(y-1)$. □

4.

证明 可以计算出

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos x}{\cos y}=-\frac{\sin x}{\cos y},\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\cos x\sin y}{\cos^2 y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\cos x}{\cos y}=-\frac{\cos x}{\cos y},\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\frac{\cos x}{\cos y}=-\frac{\sin x\sin y}{\cos^2 y},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\cos x(1+\sin^2 y)}{\cos^3 y},$$

于是利用带佩亚诺余项的泰勒公式可得

$$\frac{\cos x}{\cos y}=1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+o(x^2+y^2)\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$ □

1.

证明 根据中值定理可知存在 $\boldsymbol{\xi}$ 使得

$$f(x,y,z)-f(x+y+z,0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})(-y-z)+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{\xi})y+\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{\xi})z=0,$$

因此 $f(x,y,z)=f(x+y+z,0,0)>0$. □

2.

证明 当 f 是 D 上的凸函数时，对每个 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 和 $\lambda\in[0,1]$ 都有

$$f(\lambda\boldsymbol{y}+(1-\lambda)\boldsymbol{x})\leqslant\lambda f(\boldsymbol{y})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}),$$

或者

$$f(\boldsymbol{x}+\lambda(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))-f(\boldsymbol{x})\leqslant\lambda f(\boldsymbol{y})-\lambda f(\boldsymbol{x}).$$

因为 f 是可微的，所以

$$f(\boldsymbol{x}+\lambda(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))-f(\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{J}f(\boldsymbol{x})+o(\lambda\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|)\ (\lambda\to0),$$

进而

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{J}f(\boldsymbol{x})+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|o(1)\leqslant f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\ (\lambda\to0).$$

因此令 $\lambda\to0$ 就得到

$$f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{J}f(\boldsymbol{x}).$$

当对每个 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 都有 $f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{J}f(\boldsymbol{x})$ 时，对每个 $\lambda\in[0,1]$，取 $\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}$，那么也有

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\mathbf{J}f(\boldsymbol{z}),\ f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\mathbf{J}f(\boldsymbol{z}),$$

因此

$$\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})\geqslant\lambda(f(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\mathbf{J}f(\boldsymbol{z}))+(1-\lambda)(f(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\mathbf{J}f(\boldsymbol{z}))=f(\lambda\boldsymbol{y}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}),$$

所以 f 是 D 上的凸函数. □

3.

证明 当 $\mathbf{H}f(\boldsymbol{x})$ 正定时，由泰勒公式知存在 $\boldsymbol{\xi}$ 使得

$$f(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{J}f(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{H}f(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\geqslant f(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mathbf{J}f(\boldsymbol{x}),$$

所以 f 是 D 上的凸函数.

当 f 是 D 上的凸函数时，假设 $\mathbf{H}f(\boldsymbol{x})$ 不是正定的，那么存在 $\boldsymbol{x}\in D$ 和 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{h}\mathbf{H}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}<0$. 于是根据带佩亚诺余项的泰勒公式可得

$$f(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x})+\lambda\boldsymbol{h}\mathbf{J}f(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\lambda^2\boldsymbol{h}\mathbf{H}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}+o(\|\lambda\boldsymbol{h}\|^2)$$

$$= f(\boldsymbol{x}) + \lambda \boldsymbol{h}\mathbf{J}f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2(\boldsymbol{h}\mathbf{H}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} + \|\lambda \boldsymbol{h}\|^2 o(1)) < f(\boldsymbol{x}) + \lambda \boldsymbol{h}\mathbf{J}f(\boldsymbol{x}),$$

这与 f 是 D 上的凸函数矛盾！因此 $\mathbf{H}f(\boldsymbol{x})$ 是正定的. □

9.11 极值

1.

答 (1) 在 $(2,-2)$ 处取到极大值 8.
(2) 没有极值.
(3) 在 $(0,1)$ 处取极小值 0.
(4) 在 $(1,1)$ 处取极小值 -1. □

2.

答 在 $\pm(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3})$ 处取极大值 $ab/\sqrt{27}$，在 $\pm(a/\sqrt{3}, -b/\sqrt{3})$ 处取极小值 $-ab/\sqrt{27}$. □

3.

证明 令

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \sin(x-y) \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin(x-y) - \sin y \end{cases},$$

得到唯一的驻点 $(\pi/3, \pi/6)$. 在这个点处的黑塞矩阵是 $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$，它是负定的. 所以 $f(x,y)$ 在点 $(\pi/3, \pi/6)$ 取到极大值 $3\sqrt{3}/2$. □

4.

证明 函数 f 在直线 $y = kx$ $(k \neq 0)$ 上的限制为

$$g(x) = f(x, kx) = 3x^4 - 4kx^3 + k^2x^2.$$

于是

$$g'(x) = 12x^3 - 12kx^2 + 2k^2x, g''(x) = 36x^2 - 24kx + 2k^2,$$

从而 $g'(0) = 0$，$g''(0) > 0$. 因此 g 在原点确实有严格极小值. 把 f 限制在 x 轴或 y 轴上时，f 化简为 $3x^4$ 或 y^2，它们在原点也具有严格极小值.

图9.1中蓝色的部分就是点集 P，剩余的无色部分自然是点集 Q. 由此可见在原点的任何邻域中都有使 f 取正值和负值的点，所以原点不是 f 的极值点. □

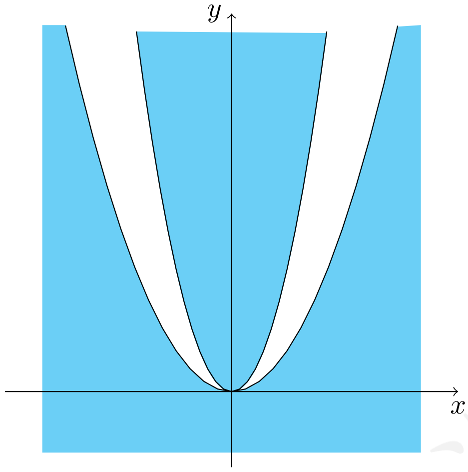

图 9.1: 点集 P

5.

答 通过想象可知至少有三组解. □

1.

证明 (1) 若不然，那么存在 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $f(x_0,y_0)<0$，这说明 f 在 $\overline{D}$ 上的最小值在 D 中取到，不妨仍设为 (x_0,y_0). 因为

$$0>f(x_0,y_0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0),$$

所以 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)$ 和 $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0)$ 中至少有一个是负的，不妨设是 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)$. 从而 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处取到极大值，这与 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取到极小值矛盾!

(2) 取足够小的正数 ε 使得函数 $g(x,y)=f(x,y)-\varepsilon(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$ 在 ∂D 上成立 $g(x,y)\geqslant 0$. 由于 $g(x,y)$ 也满足 $g=\partial^2 g/\partial x^2+\partial^2 g/\partial y^2$，所以

$$0\leqslant g(x,y)=f(x,y)+\varepsilon(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)<f(x,y).$$ □

2.

证明 如果 f 在 $\overline{D}$ 上的最大值是在 ∂D 上取到的，那么没什么好说的.

现在 f 在 $\overline{D}$ 上的最大值是在 D 中的一个点 (x_0,y_0) 处取到的，那么有

$$\begin{cases}0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=2ax_0+2by_0+d\\ 0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=2bx_0+2cy_0+e\end{cases},$$

从而可得

$$f(x_0,y_0)=ax_0^2+2bx_0y_0+cy_0^2+dx_0+ey_0=\frac{1}{2}(dx_0+ey_0).$$

因为 $0\geqslant f(x,0)=x(ax+d)$，所以 $d\leqslant 0$. 同样地因为 $0\geqslant f(0,y)=y(cy+e)$，所以 $e\leqslant 0$. 因此

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(dx_0+ey_0)\leqslant 0. \qquad \square$$

9.12 条件极值

1.

解 (1) 事实上 $u=xy=x(1-x)$，因此 u 在 $(1/2,1/2)$ 处取极大值 $1/4$.

(2) 因为 $u=\cos^2 x+\cos^2 y=\cos^2 x+\cos^2(x-\pi/4)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\pi/4)+1$，所以 u 在 $((1/8+k)\pi,(-1/8+k)\pi)$ 处取极大值 $1+\sqrt{2}/2$, 在 $((5/8+k)\pi,(-3/8+k)\pi)$ 处取极小值 $1-\sqrt{2}/2$.

(3) 这里具有明显的几何意义,不难求出 u 在 $(-1/3,2/3,3/5)$ 处取极小值 -3,在 $(1/3,-2/3,2/3)$ 处取极大值 3.

(4) 利用几何意义不难求出 u 在 $(1/5,1/5,3/5)$ 处取极小值 $3/5$. $\square$

2.

解 (1) 作函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(2x+2y+z+9)+\mu(2x-y-2z-18),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda+2\mu=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+2\lambda-\mu=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z+\lambda-2\mu=0\end{cases},$$

可得

$$x=-\lambda-\mu,\ y=\mu/2-\lambda,\ z=\mu-\lambda/2,$$

将其代入直线的方程可得 $\lambda=2$ 和 $\mu=-38/9$，进而 $(x,y,z)=(20/9,-37/9,-47/9)$. 结合客观事实可知这就是 F 的极小值点. 因此所求的距离是 $\sqrt{442}/3$.

(2) 作函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+3z+4),$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + 3\lambda = 0 \end{cases},$$

可得

$$x = -\lambda/2,\ y = -\lambda,\ z = -3\lambda/2,$$

将其代入平面的方程可得 $\lambda = 4/7$，进而 $(x, y, z) = (-2/7, -4/7, -6/7)$．结合客观事实可知这就是 F 的极小值点．因此所求的距离是 $4/\sqrt{14}$． □

3.

解 把 $z = -(x + 2y)$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$ 可得

$$\frac{5}{4}\left(x + \frac{2}{5}y\right)^2 + \frac{9}{5}y^2 = 1,$$

于是可令

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t = x + \frac{2}{5}y,\ \frac{\sqrt{5}}{3}\sin t = y,$$

从而得到这个椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}(3\cos t - \sin t) \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\sin t \\ z = -\dfrac{2\sqrt{5}}{15}(3\cos t + t\sin t) \end{cases}.$$

因此椭圆上的一点到原点的距离是

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{30}(24\sin 2t - 7\cos 2t + 55).$$

由此可见这个椭圆的长半轴是 $\sqrt{8/3}$，半短轴是 1． □

4.

解 考虑到 $x^2 + y^2 + xy = (x + y/2)^2 + 3y^2/4$，所以可令

$$a\cos t = x + \frac{y}{2},\ a\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

因此

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2a} = -\frac{a}{6}(\sqrt{3}\sin 2t + \cos 2t - 4),$$

由此可见这个曲线上的点到 Oxy 平面的最小距离是 $a/3$，最大距离是 a． □

5.

答 根据均值不等式，我们有

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2}},$$

或者 $xyz\leqslant abc/\sqrt{27}$，等号当 $(x,y,z)=(a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$ 时取得．因此这个体积最大的长方体的三条棱长分别是 $a/\sqrt{3}$，$b/\sqrt{3}$ 和 $c/\sqrt{3}$． □

6.

证明 我们来考虑 $a_1^p+\cdots+a_n^p$ 在约束条件 $a_1+\cdots+a_n=a$ 下的最小值．设

$$F(a_1,\ldots,a_n)=a_1^p+\cdots+a_n^p+\lambda(a_1+\cdots+a_n-a),$$

那么由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a_i}=pa_i^{p-1}+\lambda a_i,\ i=1,2\ldots,n\\ a_1+\cdots+a_n=a\end{cases}$$

可解得 $a_1=\cdots=a_n=a/n$．在这个点处的黑塞矩阵

$$\mathbf{H}F=p(p-1)\operatorname{diag}\{a_1^{p-2},\ldots,a_n^{p-2}\}$$

是正定的，所以 $a_1^p+\cdots+a_n^p$ 在 $(a_1,\ldots,a_n)=(a/n,\ldots,a/n)$ 处取严格极小值，也是最小值．因此

$$\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)\geqslant\frac{a}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n},$$

等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时取得． □

7.

证明 我们来考虑 $x_1^q+\cdots+x_n^q$ 在约束条件 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=c$ 下的最小值．设

$$F(x_1,\ldots,x_n)=x_1^q+\cdots+x_n^q+\lambda(a_1x_1+\cdots+a_nx_n-c),$$

那么由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a_i}=qx_i^{q-1}+\lambda a_i,\ i=1,2\ldots,n\\ a_1x_1+\cdots+a_nx_n=c\end{cases}$$

可解得 $x_i=(-\lambda a_i/q)^{1/(q-1)}$，从而

$$c=a_1x_1+\cdots+a_nx_n=\sum_{i=1}^n\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^{1/(q-1)}a_i^{1+1/(q-1)}=\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^{1/(q-1)}(a_1^p+\cdots+a_n^p),$$

进而

$$-\frac{\lambda}{q}=\left(\frac{c}{a_1^p+\cdots+a_n^p}\right)^{q-1},$$

所以 $x_i=a_i^{1/(q-1)}c/(a_1^p+\cdots+a_n^p)$. 在这个点处的黑塞矩阵

$$\mathbf{H}F=p(p-1)\operatorname{diag}\{a_1^{p-2},\ldots,a_n^{p-2}\}$$

是正定的，所以 $x_1^q+\cdots+x_n^q$ 在这个点处取严格极小值，也是最小值，因此

$$x_1^q+\cdots+x_n^q\geqslant\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{a_i^{1/(q-1)}c}{a_1^p+\cdots+a_n^p}\right)^q=\left(\frac{c}{a_1^p+\cdots+a_n^p}\right)^q\sum_{i=1}^{n}a_i^p=c^q(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{1-q},$$

亦即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1-1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q},$$

除去平凡的情形外，等号当且仅当 $x_1^q/a_1^p=\cdots=x_n^q/a_n^p$ 时取得. $\square$

第十章　多重积分

10.1　矩形区域上的积分

1.

证明　这是因为

$$\begin{aligned}\iint_I f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i)g(\eta_j)\Delta x_i\Delta y_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} g(\eta_j)\Delta y_i = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$ □

2.

解　根据第 1 题可以写出

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = (\mathrm{e}-1)^2.$$ □

3.

证明　这是因为

$$\iint_I \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\sin x\,\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}\cos y\,\mathrm{d}y + \int_{-a}^{a}\cos x\,\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}\sin y\,\mathrm{d}y = 0.$$

从几何上来看，这是由于被积函数和积分区域的对称性. □

4.

证明　当 f 在 I 上可积时，设 $\int_I f\,\mathrm{d}\sigma = J$. 那么对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切满足 $\|\pi\|<\delta$ 的分割都有

$$J-\frac{\varepsilon}{3} < \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{\xi}_i)\sigma(I_i) < J+\frac{\varepsilon}{3},\ \forall \boldsymbol{\xi}_i\in I_i.$$

进而有

$$J-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant \underline{S}(f,\pi)\leqslant \overline{S}(f,\pi)\leqslant J+\frac{\varepsilon}{3},$$

所以

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon,$$

着当然蕴含着 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)=0$.

当 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)=0$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 I 的一个分割 π 使得

$$\varepsilon>\sum_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)=\sum_{i=1}^{k}M_i\sigma(I_i)-\sum_{i=1}^{k}m_i\sigma(I_i)=\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi).$$

(3) 蕴含 (4) 是定理 10.1.6 的内容.

(4) 蕴含 (1) 是定理 10.1.7 的内容. □

5.

证明 设 $f(\boldsymbol{p})$ 是闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数，那么 $f(\boldsymbol{p})$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上一致连续，从而对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\in[a,b]\times[c,d]$ 且 $|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}|<\delta$ 时有

$$|f(\boldsymbol{s})-f(\boldsymbol{t})|<\frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}.$$

设 $\boldsymbol{\pi}$ 是满足 $\|\pi\|<\delta$ 的一个分割，那么存在 $\boldsymbol{s}_i\in I_i$ 和 $\boldsymbol{t}_i\in I_i$ 使得

$$f(\boldsymbol{s}_i)=M_i=\sup_{\boldsymbol{p}\in I_i}f(\boldsymbol{p}),\ f(\boldsymbol{t}_i)=m_i=\inf_{\boldsymbol{p}\in I_i}f(\boldsymbol{p}).$$

于是

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)=\sum_{i=1}^{k}(f(\boldsymbol{s}_i)-f(\boldsymbol{t}_i))\sigma(I_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}\sum_{i=1}^{k}\sigma(I_i)=\varepsilon,$$

因此 $f(\boldsymbol{p})$ 在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积. □

10.2 勒贝格定理

1.

证明 设 $\{\boldsymbol{p}_n\}$ 的极限是 $\boldsymbol{p}$，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，存在包含 $\boldsymbol{p}$ 且面积为 $\varepsilon/3$ 的矩形 $\boldsymbol{I}_0$ 和正整数 N 使得当 $n > N$ 时有 $\boldsymbol{p}_n \in I_0$. 对于 $n \leqslant N$，取一面积为 $\varepsilon/(2N)$ 的矩形 I_n 使得 $\boldsymbol{p}_n \in I_n$. 这样就有 $\{\boldsymbol{p}_n\} \subset \bigcup\limits_{i=0}^{N} I_i$，且 $\sum\limits_{i=0}^{N} \sigma(I_i) = 5\varepsilon/6 < \varepsilon$. 因此 $\{\boldsymbol{p}_n\}$ 是零面积集. □

2.

证明 因为 B' 是零面积集，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在有限个开矩形 $I_1, I_2, \ldots, I_m$ 使得 $B' \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma(I_i) < \varepsilon/2$. 于是 $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$ 是一个有限集，否则由聚点定理知它与 B' 有交集，矛盾! 于是可作有限个开矩形 $I_{m+1}, I_{m+2}, \ldots, I_{m+k}$ 使得 $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i \subset \bigcup\limits_{i=m+1}^{m+k} I_i$ 且 $\sum\limits_{i=m+1}^{m+k} \sigma(I_i) < \varepsilon/2$. 因此 $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} I_i$ 并且 $\sum\limits_{i=1}^{m+k} \sigma(I_i) < \varepsilon$，所以 $\overline{B}$ 是零面积集. □

3.

证明 因为 $[0,1]^2$ 中有理点全体的闭包就是 $[0,1]^2$，而 $[0,1]^2$ 不是零面积集，所以 $[0,1]^2$ 中有理点的全体不是零面积集.

因为 $[0,1]^2$ 中有理点全体是可数的，所以是零测集. □

4.

证明 因为 f 在 I 上可积，所以 f 在 I 上有界，当然在 J 上也有界. 显然 $D(f|_J) \subset D(f|_I)$，所以 $D(f|_J)$ 也是零测集，进而 f 在 J 上也可积. □

5.

证明 因为 f 在 I 上可积，所以至少有一个 $(x_0, y_0) \in I$ 是 f 的连续点，进而在 (x_0, y_0) 的某个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset T$ 上有 $f(x, y) > f(x_0, y_0)/2$，于是

$$\int_I f \,\mathrm{d}\sigma \geqslant \int_{(x_0-\delta, x_0+\delta)\times(y_0-\delta, y_0+\delta)} f(x, y) \,\mathrm{d}\sigma > 4\delta^2 \times \frac{f(x_0, y_0)}{2} > 0.$$ □

6.

答 可积. 因为 $f(x, y)$ 有界且显然其不连续点的全体是一个零测集. □

7.

答 可积. 先取定 $\boldsymbol{p} \in I$，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $n \leqslant N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ 时 $\boldsymbol{p}_n \notin B(\boldsymbol{p}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{p}\}$，所以对一切的 $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{p}\}$ 有 $|f(\boldsymbol{x})| < 1/N \leqslant \varepsilon$，这说明 $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = 0$。因此 f 在 I 上的每一个点的极限都是 0，从而 f 在可列集 B 外处处连续，进而在 I 上可积。 □

8.

证明 这是由于 $D(fg) \subset D(f) \cup D(g)$ 以及 $D(f/g) \subset D(f) \cup D(g)$. □

9.

证明 因为 $D(|f|) \subset D(f)$，所以 $|f|$ 在 I 上可积蕴含着 $|f|$ 在 I 上可积. 此外,

$$\left|\int_I f\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \int_I |f|\,\mathrm{d}\sigma \Longleftarrow -\int_I |f|\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_I f\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_I |f|\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\Longleftarrow -\int_I (|f| + f)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant 0 \leqslant \int_I (|f| - f)\,\mathrm{d}\sigma. \quad □$$

1.

证明 假设对每个闭矩形 $J \subset I$ 都存在 $\boldsymbol{\xi} \in J$ 使得 $f(\boldsymbol{\xi}) \leqslant 0$，那么

$$0 \geqslant \underline{\int}_I f\,\mathrm{d}\sigma = \int_I f\,\mathrm{d}\sigma > 0,$$

矛盾! 因此存在闭矩形 $J \subset I$ 使得 $f > 0$ 在 J 上成立. □

2.

证明 设 $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ 不是有理点. 对任意的 $\varepsilon > 0$，因为不大于 $2/\varepsilon$ 的整数只有有限个，所以使得 $1/m \geqslant \varepsilon/2$ 和 $1/q \geqslant \varepsilon/2$ 的有理数 $x = n/m$ 和 $y = p/q$ 也只有有限个. 进而存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 U 使得当 $(x,y) = (n/m, p/q) \in U \cap \mathbb{Q}$ 时有 $1/m < \varepsilon/2$ 和 $1/q < \varepsilon/2$. 进而对一切的 $(x,y) \in U$ 都有

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = f(x,y) = \begin{cases} 1/m + 1/p, & (x,y) = (n/m, p/q) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} < \varepsilon,$$

这说明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 因此 $f(x,y)$ 在 $[0,1]^2$ 上几乎处处连续，从而可积. □

10.3 矩形区域上二重积分的计算

1.

解 (1) $\displaystyle\iint_I \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{12}$.

(2) $\displaystyle\iint_I x\cos xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \int_0^1 x\cos xy\,\mathrm{d}y = 1$.

(3) $\displaystyle\iint_I \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\pi} \sin(x+y)\,\mathrm{d}y = 0$. □

2.

解 $\iint_I \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,d) - \frac{\partial}{\partial x} f(x,c)\right) \mathrm{d}x = f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c)$. □

3.

解 (1) $\int_I f\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{3}$.

(2) $\int_I f\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\min\{1,2x^2\}} (x+y)\,\mathrm{d}y = \frac{21}{40} - \frac{\sqrt{2}}{5}$. □

4.

证明 在原书21页的 (7) 式中取 $h(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[i-1,i)}(x)$ 而 $g(x) = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{[i-1,i)}(x)$ 即可. □

5.

证明 这是因为

$$0 \leqslant \iint\limits_{[a,b]^2} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{[a,b]^2} (f^2(x)g^2(y) - 2f(x)f(y)g(x)g(y) + f^2(y)g^2(x))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y - 2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y)g(y)\,\mathrm{d}y + \int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$ □

1.

证明 (1) 这是因为

$$f(x,p/q) = \begin{cases} 1/m + 1/p, & x = n/m \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

处处间断.

(2) 同理. □

2.

证明　当 y 是无理数时 $g(x,y)=0$，当 y 是有理数 p/m 时，仅当 $x=1/m,2/m,\ldots,(m-1)/m$ 这有限个数时 $g(x,y)\neq 0$. 因此对每个 $y\in[0,1]$ 都有 $\displaystyle\int_0^1 g(x,y)\,\mathrm{d}x=0$, 进而 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 g(x,y)\,\mathrm{d}x=0$. 同理有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 g(x,y)\,\mathrm{d}y=0=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 g(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

易见 g 在 $[0,1]^2$ 上处处间断，所以不可积. □

10.4　有界集合上的二重积分

1.

证明　事实上，B 有面积当且仅当 1 在 B 上可积，这当且仅当对任意满足 $I\supset B$ 的闭矩形 I，χ_B 在 I 上可积，而这当且仅当 $D(\chi_B)=\partial B$ 是零面积集. □

2.

证明　这是因为几乎处处有

$$\frac{1}{102}<\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}<\frac{1}{100}.$$ □

3.

证明　这是因为 ∂B 的面积是 $\displaystyle\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{\substack{I_j\cap B\neq\varnothing\\ I_j\not\subset B}}\sigma(I_j)$. □

10.5　有界集合上积分的计算

1.

解　(1) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\cos(x+y)\,\mathrm{d}y=-2$.

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2/4}^{1}xy^2\,\mathrm{d}x=\frac{32}{21}$.

(3) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-(1-|x|)}^{1-|x|}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(4) $\displaystyle\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}xy\,\mathrm{d}y=\frac{a^2}{2}$.

(5) 由奇偶性和对称性知这个积分是 0.

(6) $\displaystyle\iint_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant\pi\\(x,y)\in D}}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant\pi\\(x,y)\in D}}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3+\cos 2+2\cos 1-\pi$.

(7) $\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} y^3(x)\,\mathrm{d}x = a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\,\mathrm{d}t = \frac{35a^4\pi}{12}$.

(8) 根据图10.2可以直接写出 $\iint_D \lfloor x+y\rfloor\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{2}+2\times\frac{3}{2}+3\times\frac{1}{2}=6$. □

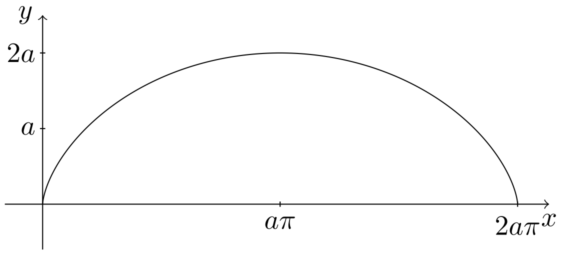

图 10.1: 旋轮线

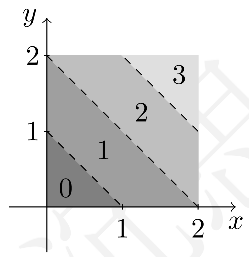

图 10.2: $\lfloor x+y\rfloor$ 在 D 上的取值情况

2.

答 (1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y dy = \int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(4) $\int_a^b\mathrm{d}x\int_x^a f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(5) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(6) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-|y|} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(7) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\cos x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_0^{\arccos y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$. □

3.

证明 这是因为

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x)\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{d}\left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

□

4.

证明　这是因为

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(y)\,\mathrm{d}x = \int_0^a (a-y)f(y)\,\mathrm{d}y. \qquad \square$$

5.

证明　容易看出等号两边两个积分的积分区域都是 $\{(x,y,z)\colon a \leqslant z \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$. $\square$

6.

证明　这是因为

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y \int_a^y f(x)f(y)f(x)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^a f(x)\left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^3. \qquad \square$$

7.

证明　这是因为

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y \int_a^y f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}z \int_z^a \mathrm{d}y \int_y^a f(z)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad \square$$

8.

证明　利用积分中值定理和函数的连续性马上看出这个极限就是 $f(0,0)$. $\square$

10.6　二重积分换元

1.

证明　(1) 作变量替换

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases},$$

那么其雅可比行列式为 -2，所以

$$\iint_D (x-y)^2 \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi} \sin u\,\mathrm{d}u \int_{-\pi}^{\pi} v\,\mathrm{d}v = 0.$$

(2) 作变量替换

$$\begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = xy \end{cases},$$

那么

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{vmatrix}=2(x^2+y^2),$$

因此

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{[1,2]^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}. \qquad \square$$

2.

证明 (1) 作变量替换

$$\begin{cases}u=a_1x+b_1y+c_1\\ v=a_2x+b_2y+c_2\end{cases},$$

那么

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

因此所求的面积为

$$\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{|a_1b_2-a_2b_1|}=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

(2) 作变量替换

$$\begin{cases}x=ar\cos^4\theta\\ y=ar\sin^4\theta\end{cases},$$

那么

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos^4\theta & -4ar\cos^3\theta\sin\theta\\ a\sin^4\theta & 4ar\cos\theta\sin^3\theta\end{vmatrix}=-4a^2r\cos^3\theta\sin^3\theta,$$

因此所求的面积为

$$\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}4a^2r\cos^3\theta\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{6}. \qquad \square$$

3.

证明 作变量替换

$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases},$$

那么

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{[-1,1]^2}f(u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

4.

证明　作变量替换

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases},$$

那么

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v,$$

所以

$$\iint\limits_D f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}v}{v}\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u = \ln 2\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

5.

解　(1) 利用极坐标变换，

$$\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,\mathrm{d} = -6\pi^2.$$

(2) 利用极坐标变换，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)R^3.$$

(3) 利用极坐标变换，

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x\leqslant 0,\,y\leqslant 0}} \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{16}.$$

(4) 利用极坐标变换，

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant x+y} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{8\sqrt{2}}{9}. \qquad \square$$

6.

解　利用球面的方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 不难写出球的体积是

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4R^3\pi}{3}. \qquad \square$$

7.

解 利用广义极坐标变换可得

$$\iint\limits_{D} \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\arctan(a/b)}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}ab\arctan\frac{a}{b}. \qquad \square$$

1.

证明 这是因为

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{t^t}{x}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t\int_t^1 \frac{t^t}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 t^t\ln t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^t-(1+\ln t)t^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^t-(t^t)')\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t. \qquad \square\end{aligned}$$

注意

除此之外，我们还有等式 $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$ 以及 $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^{-n}$. 这两个等式叫做“二年级的臆想”，与之对应的还有“一年级的臆想”，这是指“不等式”$(x+y)^n = x^n+y^n$.

2.

证明 作变量替换

$$\begin{cases} t=(ax+by)/\sqrt{a^2+b^2} \\ s=(ay-bx)/\sqrt{a^2+b^2} \end{cases},$$

那么 $\partial(t,s)/\partial(x,y)=1$，因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{t^2+s^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}t+c)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2}t+c)\,\mathrm{d}t\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}s \\ &= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}f(\sqrt{a^2+b^2}t+c)\,\mathrm{d}t. \qquad \square\end{aligned}$$

3.

证明 (1) 因为

$$F(t) = \iint\limits_{[0,t]^2} f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{[0,1]^2} t^2 f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以

$$F'(t) = \iint\limits_{[0,1]^2} 2tf(t^2uv) + 2t^3uvf'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{2}{t}\left(F(t) + \iint\limits_{[0,t]^2} xyf(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

(2) 因为

$$F(t) = \iint\limits_{[0,t]^2} f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^t \int_0^t f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

所以

$$F'(t) = \int_0^t f(xt)\,\mathrm{d}x + \int_0^t f(yt)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s. \qquad \square$$

4.

证明　作变量替换

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{r\cos\theta} \\ y = \mathrm{e}^{r\sin\theta} \end{cases},$$

那么

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\mathrm{e}^{r\cos\theta} & -r\sin\theta\mathrm{e}^{r\cos\theta} \\ \sin\theta\mathrm{e}^{r\cos\theta} & r\cos\theta\mathrm{e}^{r\cos\theta} \end{vmatrix} = r\mathrm{e}^{r(\cos\theta+\sin\theta)},$$

因此

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x + \ln^2 y)} = \iint\limits_{\mathrm{e}^{2r\cos\theta}+\mathrm{e}^{2r\sin\theta}\leqslant 1\leqslant \mathrm{e}^{r\cos\theta}+\mathrm{e}^{r\sin\theta}} \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{r} = \int_\pi^{3\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{r(\theta)/2}^{r(\theta)} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\pi}{2}\ln 2. \qquad \square$$

10.7　三重积分

1.

解　(1) 利用球坐标变换,

$$\iiint_V xyz\,\mathrm{d}\mu = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} r^5 \sin^3\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{48}.$$

(2) 把重积分化为累次积分可得

$$\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}\mu = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{8}.$$

(3) 把重积分化为累次积分可得

$$\iiint_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}x \int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z = \frac{1}{364}. \qquad \square$$

2.

解 (1) 通过想象，不难写出它的体积就是

$$\int_0^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{z^2\leqslant x^2+y^2/4\leqslant 2z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 2\pi(2z-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{8\pi}{3}.$$

(2) 不难直接写出它的体积就是

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}a^3(3\pi-4).$$ □

3.

答 利用积分中值定理和函数的连续性立刻看出这个极限就是 $f(0,0,0)$. □

4.

证明 (1) 利用球坐标变换，

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 4\pi.$$

(2) 利用球坐标变换，

$$\iiint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b r^4\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{15}(b^5-a^5).$$

(3) 使用广义球坐标变换，其雅可比行列式为 $abcr^2\sin\theta$，那么

$$\iiint\limits_D \left(1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right)^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{abc\pi^2}{4}.$$ □

5.

证明 (1) 作变换

$$\begin{cases} u = a_1x+b_1y+c_1z \\ v = a_2x+b_2y+c_2z \\ w = a_3x+b_3y+c_3z \end{cases},$$

那么

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 1 \Bigg/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

因此所求的体积为

$$\int_{-h_1}^{h_1} \mathrm{d}u \int_{-h_2}^{h_2} \mathrm{d}v \int_{-h_3}^{h_3} \mathrm{d}w \Bigg/ \mathrm{abs}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 8h_1h_2h_3 \Bigg/ \mathrm{abs}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) 可以直接写出这个体积就是 $\dfrac{2(b^3-a^3)\pi}{3}$.

(3) 通过球坐标变换，曲面的方程变为 $r^3 = a^3\cos\theta$，因此其围成体积为

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos^{1/3}\theta} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r = \frac{a^3\pi}{3}.$$

(4) 通过球坐标变换，曲面的方程变为 $r = \cos^{2n-1}\theta$，因此其围成的体积为

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos^{2n-1}\theta} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{3(3n-1)}.$$

(5) 通过广义球坐标变换，曲面的方程变为 $r = \sin\theta$，因此其围成的体积为

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} abcr^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r = \frac{abc\pi^2}{4}.$$ □

注意

这两个问题用到了第 18 章中关于含参积分求导的知识.

1.

证明 注意到

$$F(t) = \iiint\limits_{[0,1]^3} t^3 f(t^3uvw)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

所以

$$F'(t) = \iiint\limits_{[0,1]^3} (3t^2 f(t^3uvw) + 3t^5 f'(t^3uvw))\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{3}{t}\left(F(t) + \iiint\limits_{[0,t]^3} xyzf'(xyz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right).$$ □

2.

证明 注意到

$$F(t) = \iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^t \mathrm{d}x \int_0^t \mathrm{d}y \int_0^t f(xyz)\,\mathrm{d}z = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{x} \int_0^t \frac{g(txy)\,\mathrm{d}y}{y},$$

所以

$$F'(t)=\int_0^t \frac{g(t^2y)}{ty}\,\mathrm{d}y+\int_0^t \frac{g(t^2x)}{tx}\,\mathrm{d}x+\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t f(txy)\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\,\mathrm{d}u+\int_0^t \frac{g(t^2x)}{tx}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\,\mathrm{d}u. \qquad \square$$

10.8 n 重积分

1.

答 (1) $\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1^2+\cdots+x_n^2)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}x_1^2\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\cdots+\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}x_n^2\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\dfrac{n}{3}$.

(2) $\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1+\cdots+x_n)^2\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}(x_1^2+\cdots+x_n^2)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\sum\limits_{i\neq j}\underset{[0,1]^n}{\int\cdots\int}x_ix_j\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=$ $\dfrac{n}{3}+\dfrac{n^2-n}{4}=\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{n}{12}$. $\square$

2.

答

$$\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1\cdots x_{n-1}x_n\,\mathrm{d}x_n=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}x_1\cdots x_{n-2}x_{n-1}^3\,\mathrm{d}x_{n-1}$$
$$=\frac{1}{4!!}\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-3}}x_1\cdots x_{n-3}x_{n-2}^5\,\mathrm{d}x_{n-2}=\frac{1}{(2n-2)!!}\int_0^1 x_1^{2n-1}\,\mathrm{d}x_1=\frac{1}{(2n)!!}. \qquad \square$$

3.

证明 (1) 做变量替换 $u_i=x_i/a_i$，那么其雅可比行列式为 $a_1a_2\cdots a_n$，于是

$$\mu(V_n)=\underset{S_n(1)}{\int\cdots\int}a_1a_2\cdots a_n\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}.$$

(2) 显然 $\mu(V_n)=2^n\mu(S_n(a))=(2a)^n/n!$. $\square$

4.

证明 注意到

$$K_m(x,t)=\underset{[a,b]^m}{\int\cdots\int}K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_m,t)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_m,$$

$$K_n(t,y)=\underset{[a,b]^n}{\int\cdots\int}K(t,t_{m+2})K(t_{m+2},t_{m+3})\cdots K(t_{m+n+1},y)\,\mathrm{d}t_{m+2}\cdots\mathrm{d}t_{m+n+1}$$

以及积分与积分变量的选取无关即可. □

5.

解

$$\mu(V_n)=\underset{V_n}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{-a_n}^{a_n}\mathrm{d}x_n\int_{-a_{n-1}(1-|x_n|/a_n)}^{a_{n-1}(1-|x_n|/a_n)}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{-a_1(1-|x_n|/a_n)}^{a_1(1-|x_n|/a_n)}\mathrm{d}x_1$$

$$=2^{n-1}a_1\cdots a_{n-1}\int_{-a_n}^{a_n}\left(1-\frac{|x_n|}{a_n}\right)^{n-1}\mathrm{d}x_n=\frac{2^n a_1a_2\cdots a_n}{n}.$$ □

1.

证明 改变积分的次序可得

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\,\mathrm{d}x_n=\int_0^a\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^a f(x_n)\,\mathrm{d}x_1$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^a f(x_n)(a-x_2)\,\mathrm{d}x_2=\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^a\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_4}^a f(x_n)(a-x_3)^2\,\mathrm{d}x_3$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(x_n)(a-x_n)^{n-1}\,\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$ □

2.

证明 记 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，那么

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{n-1})F(x_{n-1})\,\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-3}}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{n-2})F^2(x_{n-2})\,\mathrm{d}x_{n-2}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(x_1)F^{n-1}(x_1)\,\mathrm{d}x_1=\frac{1}{n!}F^n(a)=\frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^n.$$ □

3.

证明 不难看出等号两边两个积分的积分区域都是

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\colon a\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant b\}.$$ □

10.9 重积分物理应用举例

1.

解 在圆盘上取一点 (x,y)，环绕着它取一块面积微元 $\mathrm{d}\sigma$，再在细棒上取一点 z，环绕着它取一段长度微元 $\mathrm{d}z$. 那么这两点间的引力大小为

$$\frac{\mu\rho\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2},$$

它在 z 轴上的分量为

$$\frac{\mu\rho z\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

因此引力在 z 轴上的分量为

$$\begin{aligned}&\mu\rho\int_a^{a+l}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{z\,\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=2\mu\rho\pi\int_a^{a+l}\mathrm{d}z\int_0^R\frac{r\,\mathrm{d}r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\\=&2\mu\rho\pi\int_a^{a+l}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\mathrm{d}z=2\nu\rho\pi\left(l+\sqrt{a^2+R^2}-\sqrt{(a+l)^2+R^2}\right).\end{aligned}$$

由对称性易知引力在 x 轴和 y 轴上的分量都是零. 因此圆盘对细棒的引力的大小是

$$2\mu\rho\pi\left(l+\sqrt{a^2+R^2}-\sqrt{(a+l)^2+R^2}\right),$$

方向由细棒指向圆盘. □

2.

证明 不妨设球锥的原点就是顶点，而球锥在顶点的上方，那么不难直接写出这个引力就是

$$\begin{aligned}&\int_0^{R\cot\alpha}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2\tan^2\alpha}\frac{\rho z\,\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\int_{R\cot\alpha}^{R(\cot\alpha+1)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-(z-R\cot\alpha)^2}\frac{\rho z\,\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\=&2\rho\pi\int_0^{R\cot\alpha}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right)\mathrm{d}z+2\rho\pi\int_{R\cot\alpha}^{R(\cot\alpha+1)}\left(1-\frac{z}{\sqrt{(1-\cot^2\alpha)R^2+2Rz\cot\alpha}}\right)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

□

第十一章　曲线积分

11.1　第一型曲线积分

答　(1) $\int_\Gamma (x^2+y^2)^n \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^{2n} a \,\mathrm{d}t = 2a^{2n+1}\pi$.

(2) $\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 y\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \sqrt{2}\,\mathrm{d}x = 1+\sqrt{2}$.

(3) $\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2} = \frac{1}{3}((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2})$.

(4) 利用例 2 的中间结果，

$$\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s = a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{2a^3\pi}{3}.$$

(5) $\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s = a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 2^3 \int_0^{2\pi} |\sin\frac{t}{2}|^5\,\mathrm{d}t = \frac{256a^3}{15}$.　□

11.2　第二型曲线积分

1.

答　(1) $\int_\Gamma \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \overset{x=a\cos t,\ y=a\sin t}{=} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$.

(2) $\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y \overset{x=a\cos t,\ y=b\sin t}{=} \int_0^{2\pi} (ab\cos 2t - (a^2+b^2)\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(3) $\int_\Gamma (x^2-2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2-2xy)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 (2y^5 - 4y^4 - 2y^3 + y^2)\,\mathrm{d}y = -\frac{14}{15}$.

(4) $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}$.

(5) $\int_\Gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y = \int_1^4 (9+y^2)\,\mathrm{d}y + \int_4^1 (1+y^2)\,\mathrm{d}y = 24$.　□

2.

答

$$\int_\Gamma \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{ax^2+2abxy+cy^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t}$$
$$= 2\int_0^{\pi} \frac{1+\cot^2 t}{a\cot^2 t + 2b\cot t + c} \overset{\cot t = u}{=} 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{au^2+2bu+c} = \frac{2\pi\,\mathrm{sgn}\, a}{\sqrt{ac-b^2}} \qquad \square$$

3.

答 (1) $\displaystyle\int_\Gamma xz^2\,\mathrm{d}x + yx^2\,\mathrm{d}y + zy^2\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (2t^5+t^7+3t^9) = \frac{91}{120}$.

(2) $\displaystyle\int_\Gamma (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z = a^2\int_0^{2\pi} \cos 2t(\sin 2t + 2)\,\mathrm{d}t = 0$. $\square$

4.

答 用 Γ_1 表示 Γ 在 xy 平面上的那部分，于是由对称性知

$$\int_\Gamma = 3\int_{\Gamma_1} = 3\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y = -3\int_0^{\pi/2} (\sin^3 t + \cos^3 t)\,\mathrm{d}t = -4. \qquad \square$$

5.

证明 使用第一型曲线积分与第二型曲线积分之间的联系和柯西–施瓦茨不等式，我们立刻得到

$$\left|\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}\right| = \left|\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_\Gamma |\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}|\,\mathrm{d}s = \int_\Gamma \|\boldsymbol{F}\|\,\mathrm{d}s. \qquad \square$$

11.3　格林公式

1.

答 (1) $\displaystyle\int_\Gamma xy^2\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{a^4\pi}{2}$.

(2) $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y = -2\iint\limits_{x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2ab\pi$.

(3) $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{0\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\max\{0,a\}}^{\min\{0,a\}} \mathrm{e}^x\sin 0\,\mathrm{d}x = 0$. $\square$

2.

答 (1) $\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}3a^2\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 6a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2\pi}{8}$.

(2) 令 $y = x\tan\theta$ 后双扭线的方程变为 $x^2 = a^2\cos^2\theta\cos 2\theta$，于是双扭线的面积为

$$\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int x(\tan\theta\,\mathrm{d}x + x\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta) - x\tan\theta\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2,$$

其中不带积分限的积分号的积分限不难脑补.

(3) 令 $y = tx$ 后不难得到 $x = 3at/(1+t^3)$ 和 $y = 3at^3/(1+t^3)$，因此笛卡儿叶形线的面积是

$$\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{3at}{1+t^3}\frac{3a(2t-t^4)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2}.$$ □

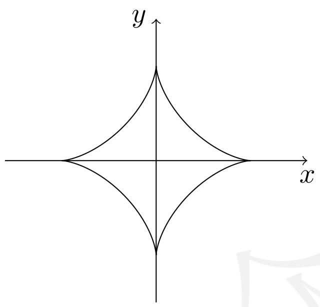

图 11.1: 星形线

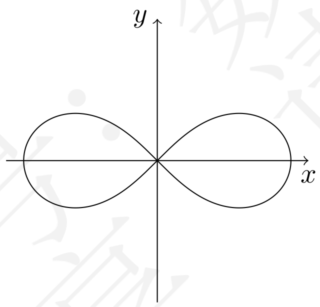

图 11.2: 双扭线

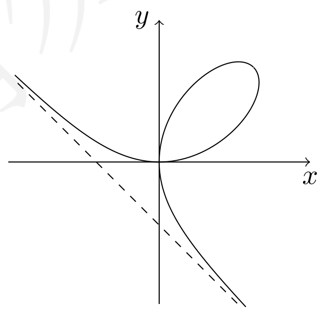

图 11.3: 笛卡儿叶形线

3.

证明 这是因为

$$A = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\begin{vmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \varphi'(t) & \psi'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t.$$ □

4.

证明 使用格林公式后这些都是显然的. □

5.

证明 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，那么利用第一型曲线积分表达的格林公式就立刻得到

$$\int_\Gamma \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma (a_1\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+a_2\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}))\,\mathrm{d}s=0.\qquad\square$$

6.

证明 由第一型曲线积分表达的格林公式马上得到这个积分就是 Γ 围成的面积的 2 倍. □

7.

答 (1) 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy-y^2)=2x-2y=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy-y^2),$$

所以积分与路径无关. 取直线 $y=x/2$ 进行计算，得到

$$\int_L (x^2+2xy-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{13}{3}.$$

(2) 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-(x-y)}{x^2+y^2},$$

所以积分与路径无关. 取上半圆周为路径进行计算，得到

$$\int_L \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\overset{x=\cos t,\ y=\sin t}{=\!=}-\int_\pi^0 \mathrm{d}t=\pi.\qquad\square$$

8.

证明 用 D 表示 Γ 的内部，再取 $C_\varepsilon=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2\}\subset D$，那么根据格林公式有

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}((x\sin y-y\cos y)\,\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\,\mathrm{d}y)\\&=\iint_{D\setminus C_\varepsilon} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}((x\sin y-y\cos y)\,\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\,\mathrm{d}y)\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\varepsilon\cos\theta}\cos(\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi.\qquad\square\end{aligned}$$

注意

最后一个积分的计算可以利用问题 18.1 的第 3 题，也可以将被积函数写成 $\Re\mathrm{e}^{\varepsilon(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}$，从而利用复变函数的方法.

1.

证明 使用格林公式得到

$$0=\iint\limits_{y_0\leqslant y\leqslant y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\,\mathrm{d}y,$$

于是由积分中值定理知存在上半圆内部的点 (ξ,η) 和 $\zeta\in(x_0-r,x_0+r)$ 使得

$$0=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\xi,\eta)-\frac{\partial P}{\partial y}(\xi,\eta)\right)\frac{r^2\pi}{2}+2rP(\zeta,y_0)=r\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\xi,\eta)-\frac{\partial P}{\partial y}(\xi,\eta)\right)\frac{r\pi}{2}+2P(\zeta,y_0)\right).$$

令 $r\to0^+$ 并利用 P 的连续性就得到 $P(x_0,y_0)=0$，进而还有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=0$. 由 x_0 和 y_0 的任意性知在 $\mathbb{R}^2$ 上有 $P=0$ 和 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$. □

2.

证明 由用第一型曲线积分表达的格林公式，立刻得到

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s&=\int_\Gamma\left(\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\right)\mathrm{d}s\\&=\iint_G(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_G\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

3.

证明 取 $C_\varepsilon=\{(x,y)\colon (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\varepsilon^2\}\subset G$，那么根据格林第二公式，有

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s&=\iint_{G\setminus C_\varepsilon}\begin{vmatrix}\Delta\ln r & \Delta u\\ \ln r & u\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial C_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s\\&=\int_{\partial C_\varepsilon}u\frac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s-\ln\varepsilon\iint_{C_\varepsilon}\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial C_\varepsilon}u\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

于是利用积分中值定理和 u 的连续性就得到

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s.$$

□

4.

证明 这是第3题的特殊情形. □

11.4 等周问题

1.

证明 这是因为 $L^2/(4\pi)$ 就是周长为 L 的封闭曲线围成的圆的面积. □

2.

证明 显然面积最大是四边形是凸的，否则翻折后可以得到一个面积更大的四边形. 由图11.4知面积最大的四边形的对角线相互垂直，且是菱形. 易见面积最大的菱形就是正方形. □

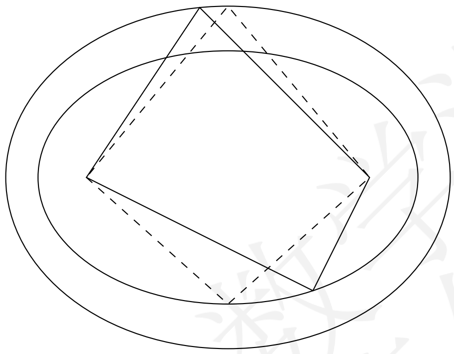

图 11.4: 把四边形的一个顶点在椭圆上移动，周长不变，但是面积变大

第十二章　曲面积分

12.1　曲面的面积

解　(1) 锥面的参数方程是

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = t \end{cases},\ -\pi \leqslant \theta < \pi,\ t \geqslant 0,$$

那么

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -t\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = t\cos\theta,\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial t} = \cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial t} = \sin\theta,\ \frac{\partial z}{\partial t} = 1,$$

从而 $E = t^2$，$F = 0$，$G = 2$．被圆柱面截下部分的参数满足 $x^2 + y^2 \leqslant 2x$，即 $t \leqslant 2\cos\theta$．因此所求的面积为

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{2}t\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\pi.$$

(2) 圆柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 的参数方程是

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = t \\ z = a\sin\theta \end{cases},\ -\pi \leqslant \theta < \pi,$$

那么

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -a\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = a\cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial t} = 1,\ \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

从而 $E = a^2$，$F = 0$，$G = 1$．圆柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 截下部分的参数满足 $x^2 + y^2 \leqslant a^2$，即 $|t| \leqslant |a\sin\theta|$．因此所求的面积为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-|a\sin\theta|}^{|a\sin\theta|} |a|\,\mathrm{d}t = 2a^2\int_{-\pi}^{\pi} |\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta = 8a^2.$$

(3) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 的参数方程是

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=t \end{cases}, \ -\pi\leqslant\theta<\pi,$$

那么

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-a\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=a\cos\theta,\ \frac{\partial z}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial x}{\partial t}=0,\ \frac{\partial y}{\partial t}=0,\ \frac{\partial z}{\partial t}=1,$$

从而 $E=a^2$，$F=0$，$G=1$．圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 介于 $x+z=0$ 和 $x-z=0$ 之间的部分的参数满足 $|x|\geqslant|z|$，即 $|t|\leqslant|a\cos\theta|$．因此所求的面积为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-|a\cos\theta|}^{|a\cos\theta|}|a|\,\mathrm{d}t=2a^2\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta=8a^2.$$

(4) 球面的参数方程是

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi \\ y=a\sin\theta\sin\varphi \\ z=a\cos\theta \end{cases}, \ -\pi\leqslant\varphi<\pi,\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2,$$

那么

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=a\cos\theta\cos\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=a\cos\theta\sin\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial\theta}=-a\sin\theta,$$
$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-a\sin\theta\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial\varphi}=a\sin\theta\cos\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$$

从而

$$E=a^2,\ F=0,\ G=a^2\sin^2\theta.$$

球面被椭圆柱面截下部分的参数满足 $x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant1$，即

$$-\arcsin\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+(a^2/b^2)\sin^2\varphi}}\leqslant\theta\leqslant\arcsin\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+(a^2/b^2)\sin^2\varphi}}=\theta_\varphi,$$

因此所求的面积为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\theta_0}^{\theta_0}a^2|\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\pi}(1-\cos\theta_\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=4a^2\int_0^{\pi}\left(1-\sqrt{\frac{a^2/b^2-1}{a^2/b^2+\cot^2\varphi}}\right)\mathrm{d}\varphi$$
$$=4a^2\left(\varphi+\arctan\frac{\sqrt{a^2/b^2-1}\cot\varphi}{\sqrt{a^2/b^2+\cot^2\varphi}}\right)\Bigg|_0^{\pi}=8a^2(\pi/2-\arctan\sqrt{a^2/b^2-1})=8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

(5) 不难直接写出所求的面积为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}r\,\mathrm{d}r=\frac{2a^2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(6) 不难直接写出所求的面积为

$$\iint\limits_{(x^2+y^2)^2\leqslant 2a^2xy}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{r^2\leqslant a^2\sin 2\theta}\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2\sin 2\theta}}\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}r\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{2a^2}{3}((1+\sin 2\theta)^{3/2}-1)\,\mathrm{d}\theta=\frac{2a^2}{3}\int_0^{\pi/2}((\sin\theta+\cos\theta)^3-1)\,\mathrm{d}\theta=\left(\frac{20}{9}-\frac{\pi}{3}\right)a^2.$$

(7) 因为

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,\ \frac{\partial z}{\partial\theta}=h,\ \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\ \frac{\partial z}{\partial r}=0,$$

所以 $E=r^2+h^2$，$F=0$，$G=1$，进而所求的面积为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}r=\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\frac{h+\sqrt{h^2+a^2}}{h}\right).$$ □

12.2 第一型曲面积分

答 (1) 把积分拆成四个平面上的积分，我们有

$$\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant 1\\ z=0}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x+y)^2}+\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant 1\\ z=0}}\frac{\sqrt{3}\mathrm{d}\sigma}{(1+x+y)^2}+\iint\limits_{\substack{y+z\leqslant 1\\ x=0}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+y)^2}+\iint\limits_{\substack{x+z\leqslant 1\\ y=0}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x)^2}$$

$$=(1+\sqrt{3})\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

$$=(1+\sqrt{3}\ln 2-1/2)+2(1-\ln 2).$$

(2) $\displaystyle\iint_\Sigma|xyz|\,\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x,y\geqslant 0}}xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}\sigma=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sin\theta\cos\theta r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=$

$\displaystyle\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{420}(1+4r)^{3/2}(1-6r+30r^2)\Big|_0^1=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$

(3) 利用练习题 12.1 第 (1) 题的中间结果，我们有

$$\iint_\Sigma(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}t^2(\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta)\sqrt{2}t\,\mathrm{d}t=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$$ □

1.

证明 取一个新的空间直角坐标系 $Ouvw$，使得 uv 平面就是平面 $ax+by+cz=0$，那么 Σ 的方程还是 $u^2+v^2+w^2=1$，而它的参数方程可以写成

$$\begin{cases} u=\sqrt{1-t^2}\cos\theta \\ v=\sqrt{1-t^2}\sin\theta \\ w=t \end{cases},\ -1\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

那么

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\sqrt{1-t^2}\sin\theta,\ \frac{\partial v}{\partial\theta}=\sqrt{1-t^2}\cos\theta,\ \frac{\partial w}{\partial\theta}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\cos\theta,\ \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\sin\theta,\ \frac{\partial w}{\partial t}=1,$$

从而 $EG-F^2=1$. 根据点到平面的距离公式知

$$w=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

所以

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_\Sigma f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}w)\,\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

2.

证明 取一个新的空间直角坐标系 $Ouvw$，使得 uv 平面就是平面 $x+y+z=0$，那么 $\Sigma(t)$ 就是圆

$$\begin{cases} u^2+v^2\leqslant 1-t^2/3 \\ w=t/\sqrt{3} \end{cases},$$

而 $F(x,y,z)|_{\Sigma(t)}=1-(u^2+v^2+t/\sqrt{3})$，因此

$$\iint_{\Sigma(t)}F(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-t^2/3}}r\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2. \qquad \square$$

3.

证明 使用球坐标变换和泊松公式立刻得到

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square
\end{aligned}
$$

12.3 第二型曲线积分

1.

解 (1) 曲面的单位法向量是 $-(x/a, y/a, z/a)$，所以

$$
\iint\limits_{\Sigma} x^4 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^4 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^4 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{a} \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} (x^5+y^5+z^5)\,\mathrm{d}\sigma = 0.
$$

(2) 曲面的单位法向量是 $(x/a, y/a, z/a)$，所以

$$
\iint\limits_{\Sigma} xz \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{a} \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} (x^2+y^2+x^2)z \,\mathrm{d}\sigma = 0.
$$

(3) 不难直接写出结果为

$$
(f(a)-f(0))bc + (g(b)-g(0))ca + (h(c)-h(0))ab.
$$

(4) 利用例 6 的中间结果，我们有

$$
\iint\limits_{\Sigma} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abc \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi abc.
$$

(5) 利用练习题 12.1 第 (1) 题的中间结果，我们有

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pm \int_0^h \mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} t(\sin\theta-1) & t(1-\cos\theta) & t(\cos\theta-\sin\theta) \\ -t\sin\theta & t\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} \mathrm{d}\theta \\
&= \pm\, 2 \int_0^h t^2 \,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} (\sin\theta - \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2.

证明 考虑到圆柱侧面上的单位法向量是 $\boldsymbol{n}=(x/R,y/R,0)$，而圆柱的上下底面的单位法向量是 $\boldsymbol{n}=(0,0,\pm1)$，因此所求的流量是

$$\iint \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{R}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2=R^2\\0\leqslant z\leqslant h}}(xy+yz)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{\substack{x^2+y^2=R^2\\z=h}}x\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2=R^2\\z=0}}x\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{R}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2=R^2\\0\leqslant z\leqslant h}}(xy+yz)\,\mathrm{d}\sigma=0.\ \square$$

3.

证明 在原书 104 的 (10) 式中分别取 $Q=R=0$ 和 $P=R=0$ 即可. $\square$

12.4 高斯公式和斯托克斯公式

1.

解 (1) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$

(2) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\substack{x+y+1\leqslant1\\x,y,z\geqslant0}}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{8}.$

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant z\leqslant1}3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant1\\z=1}}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}(1-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$

(4) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant1}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant1\\z=1}}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant1}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant1\\z=1}}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{4}\pi.$ $\square$

2.

证明 利用高斯公式立刻得到

$$\iint_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{|\boldsymbol{e}|}\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}\mu=0.\qquad\square$$

3.

证明 利用高斯公式立刻得到

$$\iint_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{p}}{p}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=2\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{p}. \qquad \square$$

4.

解 (1) $\displaystyle\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=-\iint\limits_{\substack{x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\substack{x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}}\sqrt{3}\mathrm{d}\sigma=-\sqrt{3}a^2\pi.$

(2) $\displaystyle\int_\Gamma(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z=\iint\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & z+x & x+y\end{vmatrix}=0.$

(3) $\displaystyle\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=-2\iint\limits_{\substack{x+y+z=a\\x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}}z\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\substack{x+y+z=a\\x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}}(x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma=-\frac{2}{\sqrt{3}}a\times\frac{2a^2\pi}{3}=-\frac{4\sqrt{3}a^3\pi}{9}.$ $\square$

5.

解 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，那么

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}&=\int_{\partial\Sigma}(a_2z-a_3y)\,\mathrm{d}x+(a_3x-a_1z)\,\mathrm{d}y+(a_1y-a_2x)\,\mathrm{d}z\\&=2\iint_\Sigma a_1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+a_2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+a_3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_\Sigma\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \qquad \square$$

6.

解 记

$$\Sigma=\{(x,y,z)\colon x+y=2\wedge x^2+y^2+z^2\leqslant 2(x+y)\}.$$

利用斯托克斯公式，

$$\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma=-\sqrt{2}\iint\limits_\Sigma\mathrm{d}\sigma,$$

事实上 Γ 是球面上的大圆，所以 Σ 的面积就是 2π，因此所求积分为 $-2\sqrt{2}\pi$. $\square$

7.

证明　记
$$\Sigma=\{(x,y,z)\colon z=xy\wedge x^2+y^2\leqslant 1\}.$$
利用斯托克斯公式，
$$\begin{aligned}\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z&=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma=-\iint\limits_\Sigma\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x+y-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\theta\int_0^1(r\cos\theta+r\sin\theta-1)r\,\mathrm{d}r\\&=-2\pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r=-\pi.\end{aligned}$$
□

8.

答　所求的功为
$$\begin{aligned}\int_\Gamma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}&=-2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+y^2\leqslant ax}}z\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}\left(x+y+\frac{xy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a/2}\left(\frac{a}{2}+\cos\theta\right)r\,\mathrm{d}r=-\frac{a^3\pi}{4}.\end{aligned}$$
□

9.

证明　根据牛顿第二定律，
$$\int_\Gamma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=m\int_\Gamma\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{p})\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}.$$
□

12.5　微分形式和外微分运算

1.

答　(1) $(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)\wedge(z\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x)=xz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}-yz\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$.
(2) $(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)\wedge(x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)=(x-z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. □

2.

答　(1) $\mathrm{d}\omega=(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$.
(2) $\mathrm{d}\omega=-x\,\mathrm{d}\wedge\mathrm{d}y$.

(3) $\mathrm{d}\omega = -(x+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$.

(4) $\mathrm{d}\omega = x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

(5) $\mathrm{d}\omega = -(x^2+yz\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

(6) $\mathrm{d}\omega = (y^2-2xz)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

(7) $\mathrm{d}\omega = (x+y+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$. □

3.

证明 这是因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \mathrm{d}\sum_{i=1}^n \frac{\partial\omega}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_j\right)\wedge\mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\omega}{\partial x_j^2}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_i + \sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}(\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i + \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j) = 0.\end{aligned}$$ □

1.

证明 一方面,

$$\begin{aligned}\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n &= \big(a_1^1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1+\cdots+a_n^1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n\big)\wedge\cdots\wedge\big(a_1^n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1+\cdots+a_n^n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n\big) \\ &= \sum_{1\leqslant j_1,\ldots,j_n\leqslant n} a_{j_1}^1(\boldsymbol{x})\cdots a_{j_n}^n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_n}.\end{aligned}$$

另一方面，当以上和式中某一项的 $j_1,\ldots,j_n$ 中有相同的时，该项为零，从而只需对 $1,\ldots,n$ 的所有排列 $j_1,\ldots,j_n$ 求和，即

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n = \sum_{j_1,\ldots,j_n} a_{j_1}^1(\boldsymbol{x})\cdots a_{j_n}^n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_n}.$$

由反对称性知

$$\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_n} = (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n,$$

其中 τ 表示逆序数. 从而依行列式的定义就得到

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n = \sum_{j_1,\ldots,j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{j_1}^1(\boldsymbol{x})\cdots a_{j_n}^n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n = \det\big(a_i^j(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n.$$ □

2.

证明 这是第 1 题的直接推论. □

第十三章　场的数学

13.1　数量场的梯度

1.

证明　$\nabla(f/g) = f\nabla(1/g) + (1/g)\nabla f = -f/g^2\nabla g + (1/g)\nabla f = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$. □

2.

答　设 $\boldsymbol{f} = (P, Q, R)$ 而 $u = u(\xi, \eta, \zeta)$，那么

$$\nabla(u \circ \boldsymbol{f}) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \circ \boldsymbol{f}\right)\nabla P + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \circ \boldsymbol{f}\right)\nabla Q + \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \circ \boldsymbol{f}\right)\nabla R. \qquad \square$$

3.

答　(1) $\nabla \ln p = \boldsymbol{p}/p^2$.
(2) $\nabla f(p) = f'(p)\boldsymbol{p}/p$.
(3) $\nabla f(p^2) = 2f'(p^2)\boldsymbol{p}$.
(4) $\nabla(f(p)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}) = f(p)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}f'(p)\boldsymbol{p}/p$. □

4.

答　变化率是 $\nabla f \cdot \nabla g$，当 $\nabla f \perp \nabla g$ 时变化率为零. □

5.

证明　使用高斯公式可得

$$\iint\limits_{\partial\Omega} u\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \boldsymbol{i}\iint\limits_{\partial\Omega} u\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \boldsymbol{j}\iint\limits_{\partial\Omega} u\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \boldsymbol{k}\iint\limits_{\partial\Omega} u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

于是利用积分中值定理和连续性就得到

$$\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}} \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint\limits_{\partial\Omega} u\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \nabla u(\boldsymbol{p}). \qquad \square$$

13.2 向量场的散度

1.

证明 不难算出确实有 $\Delta \ln p = 0$. □

2.

证明 $\Delta(fg) = \nabla\cdot\nabla(fg) = \nabla\cdot(f\nabla g + g\nabla f) = f\nabla\cdot\nabla g + g\nabla\cdot\nabla f + 2\nabla f\cdot\nabla g = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f\cdot\nabla g$. □

3.

证明 (1) 使用高斯公式可得

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega}\Delta u\,\mathrm{d}\mu.$$

(2) 使用高斯公式可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + v\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(3) 利用第 (2) 题有

$$\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v \\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\mu.$$

□

4.

证明 因为 $\Delta u = 0$，所以根据第 3 题这些都是显然的. □

1.

证明 作以 $\boldsymbol{p}_0$ 为球心、半径为 ε 的球体 $B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)$ 使得 $B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)\subset\Omega$，那么

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma = \left(\int_{\partial(\Omega\setminus B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon))} + \int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}\right)\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

根据高斯公式可得其中的

$$\begin{aligned}&\int_{\partial(\Omega\setminus B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon))}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial(\Omega\setminus B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon))}\left(\frac{u}{p^3}\boldsymbol{p}+\frac{1}{p}\nabla u\right)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma\\ =&\int_{\partial(\Omega\setminus B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon))}\left(\frac{1}{p}\nabla u-u\nabla\frac{1}{p}\right)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega\setminus B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}\nabla\cdot\left(\frac{1}{p}\nabla u-u\nabla\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}\mu\\ =&\int_{\Omega\setminus B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}\left(\frac{1}{p}\Delta u-u\Delta\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}\mu=0,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma\\ =&\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}u\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}u\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{\varepsilon}\int_{B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}\Delta u\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}u\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

于是由积分中值定理知存在 $\boldsymbol{\xi}\in B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)$ 使得

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma=4\pi u(\boldsymbol{\xi}).$$

进而令 $\varepsilon\to 0^+$ 并利用 u 的连续性就得到

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma=4\pi u(\boldsymbol{p}_0).$$ □

2.

证明 这是第 1 题的特殊情况. □

3.

证明 假设 u 在 Ω 的内部 $\boldsymbol{p}_0$ 处取到最大值，现在作以 $\boldsymbol{p}_0$ 为球心、半径为 ε 的开球体 $B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)$，那么对任意的 $\boldsymbol{p}\in\overline{B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}$ 都有 $u(\boldsymbol{p})\leqslant u(\boldsymbol{p}_0)$. 假设存在 $\boldsymbol{p}_1\in\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)$ 使得 $u(\boldsymbol{p}_1)<u(\boldsymbol{p}_0)$，那么由连续性知

$$u(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)}u\,\mathrm{d}\sigma<u(\boldsymbol{p}_0),$$

矛盾！因此对任意的 $\boldsymbol{p}\in\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)$ 都有 $u(\boldsymbol{p})=u(\boldsymbol{p}_0)$. 由于 ε 是任意的，所以对所有的 $\boldsymbol{p}\in\partial B(\boldsymbol{p}_0;\varepsilon)$ 都有 $u(\boldsymbol{p})=u(\boldsymbol{p}_0)$. 由此可见 $U=\{\boldsymbol{p}\in\Omega\colon u(\boldsymbol{p})=u(\boldsymbol{p}_0)\}$ 是 Ω 中的开集，又显然 U 是 Ω 中的闭集，所以 U 在 Ω 中既开又闭. 从而 $\Omega\setminus U$ 在 Ω 中也既开又闭. 由于 Ω 是连通的且 $\Omega=U\cup(\Omega\setminus U)$，所以 $\Omega\setminus U$ 只能是空集. 进而 u 在 Ω 上是常数，矛盾！因此 u 的最大值只能在 $\partial\Omega$ 上取到. 对于最小值的情形也同理. □

13.3　向量场的旋度

1.

证明　设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，那么

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})=\nabla\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}-\nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}&\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}&\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\end{vmatrix}-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2},\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2},\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)$$

$$=-\left(\nabla^2 P,\nabla^2 Q,\nabla^2 R\right)=-\nabla^2\boldsymbol{F}.$$

□

2.

证明　设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，那么根据高斯公式可得

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ P&Q&R\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}\mathrm{d}\mu,$$

于是利用积分中值定理和连续性就得到

$$\lim_{\Omega\to\boldsymbol{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\sigma=\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}).$$

□

3.

证明　因为

$$af=\operatorname{div}(f\operatorname{grad}f)=\nabla\cdot(f\nabla f)=f\nabla\cdot\nabla f+\nabla f\cdot\nabla f=f\Delta f+\|\nabla f\|^2=f\Delta f+bf,$$

所以

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\Delta f\,\mathrm{d}\mu=(a-b)\mu(\Omega).$$

□

13.4 有势场和势函数

1.

解 (1) 因为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，所以势函数是存在的，设为 $\varphi(x,y,z)$．那么

$$\varphi(x,y,z)-\varphi(1,1,1)=\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)}\left(1-\frac{1}{v}+\frac{v}{w}\right)\mathrm{d}u+\left(\frac{u}{w}+\frac{u}{v^2}\right)\mathrm{d}v-\frac{uv}{w^2}\mathrm{d}w$$

$$=\int_{(1,1,1)}^{(x,1,1)}\mathrm{d}u+\int_{(x,1,1)}^{(x,y,1)}\left(x+\frac{x}{v^2}\right)\mathrm{d}v-\int_{(x,y,1)}^{(x,y,z)}\frac{xy}{w^2}\mathrm{d}w=\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+x-1,$$

因此 $\varphi(x,y,z)=xy/z-x/y+x+C$．

(2) 因为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，所以势函数是存在的，设为 $\varphi(x,y,z)$．那么

$$\varphi(x,y,z)-\varphi(1,1,1)=\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)}\frac{(u+v)\,\mathrm{d}u+(u+v)\,\mathrm{d}v+w\,\mathrm{d}w}{u^2+v^2+w^2+2uv}$$

$$=\int_{(1,1,1)}^{(x,1,1)}\frac{u+1}{u^2+2u+2}\mathrm{d}u+\int_{(x,1,1)}^{(x,y,1)}\frac{x+v}{x^2+v^2+2xv+1}\mathrm{d}v+\int_{(x,y,1)}^{(x,y,z)}\frac{w}{x^2+y^2+w^2+2xy}\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2}\ln((x+y)^2+z^2)-\frac{1}{2}\ln 5,$$

因此 $\varphi(x,y,z)=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+C$． □

2.

答 (1) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\,\mathrm{d}x+y^2\,\mathrm{d}y-z^2\,\mathrm{d}z=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}z^3\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}=-\frac{65}{6}$．

(2) $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z=xyz\big|_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}=-6$．

(3) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=b-a$． □

3.

答 $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(x)\,\mathrm{d}x+g(y)\,\mathrm{d}y+h(z)\,\mathrm{d}z=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{y_1}^{y_2}g(y)\,\mathrm{d}y+\int_{z_1}^{z_2}h(z)\,\mathrm{d}z$． □

4.

证明 (1) 易见 $(f(x+y+z),f(x+y+z),f(x+y+z))$ 的势函数是 $\displaystyle\int_a^{x+y+z}f(u)\,\mathrm{d}u$，所以

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)=\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2}f(u)\,\mathrm{d}u.$$

(2) 易见 $f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x,y,z)$ 的势函数是 $\displaystyle\int_a^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} uf(u)\,\mathrm{d}u$，所以

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\,\mathrm{d}u.$$ □

5.

证明　易见弹性力 $\boldsymbol{F}=-k(x,y)$，那么所求的功为

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=-k\int_\Gamma x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y\overset{y=b\sqrt{1-x^2/a^2}}{=}-k\int_a^0\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$ □

6.

答　(1) $x^2+y^2=C$.
(2) $xy=C$.
(3) $x^2+y^2+4xy=C$.
(4) $2x^3-6xy+3\cos 2y=C$.
(5) $x\mathrm{e}^y-y^2=C$.
(6) $\sqrt{x^2+y^2}+y/x=C$.
(7) $\arctan(y/x)-(x^2+y^2)/2=C$. □

13.5　旋度场和向量势

1.

解　(1) 因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，所以 $\boldsymbol{F}$ 是一个旋度场．设其向量势为 $\boldsymbol{G}=(G_1,G_2,G_3)$，那么

$$\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}=z,\ \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}=x,\ \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=y.$$

令 $G_3=0$，那么 $\dfrac{\partial G_2}{\partial z}=-z$，$\dfrac{\partial G_1}{\partial z}=x$．于是可取

$$G_2=-\frac{1}{2}z^2+f(x,y),\ G_1=xz,$$

从而

$$y=\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x},$$

进而再取 $f=xy$ 就得到一个向量势 $\boldsymbol{G}=(xz,xy-z^2/2,0)$．因此一般的向量势可以写成

$$\boldsymbol{G}=(xz,xy-z^2/2,0)+\nabla\varphi,$$

其中 φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上任一连续可微函数.

(2) 因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，所以 $\boldsymbol{F}$ 是一个旋度场. 设其向量势为 $\boldsymbol{G}=(G_1,G_2,G_3)$，那么

$$\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}=xy,\ \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}=-y^2,\ \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=yz.$$

令 $G_3=0$，那么 $\dfrac{\partial G_2}{\partial z}=-xy$，$\dfrac{\partial G_1}{\partial z}=-y^2$. 于是可取

$$G_2=-xyz+f(x,y),\ G_1=-y^2z,$$

从而

$$yz=\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=-yz+\frac{\partial f}{\partial x}+2yz,$$

进而再取 $f=0$ 就得到一个向量势 $\boldsymbol{G}=(-y^2z,-xyz,0)$. 因此一般的向量势可以写成

$$\boldsymbol{G}=(-y^2z,-xyz,0)+\nabla\varphi,$$

其中 φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上任一连续可微函数.

(3) 因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，所以 $\boldsymbol{F}$ 是一个旋度场. 设其向量势为 $\boldsymbol{G}=(G_1,G_2,G_3)$，那么

$$\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}=z-y,\ \frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}=x-z,\ \frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=y-x.$$

令 $G_3=0$，那么 $\dfrac{\partial G_2}{\partial z}=y-z$，$\dfrac{\partial G_1}{\partial z}=x-z$. 于是可取

$$G_2=yz-\frac{1}{2}z^2+f(x,y),\ G_1=xz-\frac{1}{2}z^2,$$

从而

$$y-x=\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x},$$

进而再取 $f=xy-x^2/2$ 就得到一个向量势 $\boldsymbol{G}=(xz-z^2/2,xy+yz-x^2/2-z^2/2,0)$. 因此一般的向量势可以写成

$$\boldsymbol{G}=(xz-z^2/2,xy+yz-x^2/2-z^2/2,0)+\nabla\varphi,$$

其中 φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上任一连续可微函数. □

2.

证明 与定理 13.5.1 相比，这里少了 $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega)$ 的条件. 具体暂略. □

13.6 正交曲线坐标系中梯度、散度和旋度的表达式

证明 这是因为利用例 2 和原书 151 页 (8) 式有

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho r v_z)}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}.$$ □

第十四章　数项级数

14.1　无穷级数的基本性质

1.

答　只有 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ 是收敛的. □

2.

答　运用中学知识就可以解决，这里直接写出结果.

(1) 2/3；

(2) 1/2；

(3) 1/3；

(4) 11/18；

(5) 3. □

3.

证明　(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{(N+1)^2} = 1$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim_{N\to\infty} \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} + 1 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{2n+1}{n+1} - \ln \frac{2n-1}{n} \right) = \ln 2$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right)$. □

4.

证明 取

$$a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ -1/(n(n-1)), & n>1 \end{cases},$$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 便是所求的. □

5.

答 显然它们都可能是发散的.

取 $b_n=-a_n$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛的. 取 $b_n=a_n$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛的. 取 $b_n=a_n=1/n$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛的. 取 $b_n=1/a_n=n$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛的. □

6.

证明 不难看出它们的通项都不收敛到零. □

7.

证明 这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n+a_{n+1}) = -a_1+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N+1}a_n = -a_1+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

取 $a_n=(-1)^n$ 便知逆命题不成立.

如果 $a_n>0$，那么

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}(a_n+a_{n+1}) < \sum_{n=1}^{N}a_n < a_1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n+a_{n+1}),$$

由此可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛蕴含着 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

8.

证明 这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(n-(n-1))a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}na_n-\sum_{n=1}^{N}(n-1)a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}n(a_n-a_{n+1})+Na_N.$$ □

1.

证明　注意到

$$\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{pn+q}-\frac{1}{pn+q+rp}\right)$$

即可. □

2.

证明　这是因为当 $N>2m-1$ 时

$$\sum_{n=1,\ n\neq m}^{N}\frac{1}{m^2-n^2}=\frac{1}{2m}\sum_{n=1,\ n\neq m}^{N}\left(\frac{1}{n+m}-\frac{1}{n-m}\right)=-\frac{3}{4m^2}+\frac{1}{2m}\sum_{n=N-m+1}^{N+m}\frac{1}{n}.$$ □

3.

证明　事实上 $1+1/2+1/3+\cdots+1/10^6\approx 14.3927$. □

4.

证明　假设存在 n_0 使得 $a_{n_0}-a_{n_0+1}\leqslant 0$，那么当 $n>n_0$ 时有 $a_n-a_{n+1}<0$，从而 $a_{n+1}>a_n>a_{n_0}$，这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛矛盾！因此 $a_n-a_{n+1}>0$，即 $\{a_n\}$ 是严格递减的. 于是就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}>\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}&=(a_n-a_{n+1})\Bigg/\sum_{k=n}^{\infty}(a_k-a_{k+1})(a_k+a_{k+1})\\&>1\Bigg/\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to+\infty\ (n\to\infty).\end{aligned}$$ □

5.

证明　根据柯西–施瓦茨不等式有

$$(1+2+\cdots+n)^2\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1^2}{a_1^2}+\frac{2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n^2}\right),$$

或者

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{4(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{a_k^2}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\frac{k^2}{a_k^2}=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{a_k^2}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2},$$

进而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}.$$ □

14.2　正项级数的比较判别法

1.

答　不能，比如取 $b_n=0$ 而 $a_n=-1$. □

2.

答　(1) 收敛，因为 $1/(3n^2+5)<1/(3n^2)$.
(2) 收敛，因为 $1/(n2^n)\leqslant 1/2^n$.
(3) 收敛，因为 $(n^2/(3n^2+1))^n<1/3^n$.
(4) 收敛，因为当 $n\to\infty$ 时 $n^{-1}\sin(1/n)\sim 1/n^2$.
(5) 发散，因为当 $n\to\infty$ 时 $(n+1)/(n(n+2))\sim 1/n$.
(6) 发散，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}\bigg/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}}=1.$$

(7) 发散，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^{\ln\ln n}n}\bigg/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln n-\ln^2\ln n}=+\infty.$$

(8) 收敛，因为当 $n\to\infty$ 时

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1=n\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1=-\frac{1}{(2n-1)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(9) 收敛，因为当 $n\to\infty$ 时 $n^{1/(n^2+1)}-1\sim\ln n/(n^2+1)$.
(10) 收敛，因为当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{1/n-\ln(1+1/n)}{1/\sqrt{n}+\sqrt{\ln(1+1/n)}}\sim\frac{1}{2n^{3/2}}.$$ □

3.

证明　因为当 n 足够大时必有 $a_n<1$，从而也有 $a_n^2<a_n$.
取 $a_n=1/n$ 便知反之不然. □

4.

证明　这是因为 $|a_nb_n|\leqslant(a_n^2+b_n^2)/2$ 而 $(a_n+b_n)^2\leqslant a_n^2+2|a_nb_n|+b_n^2$. □

5.

证明 这是因为 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant (a_n + a_{n+1})/2$.
取 $a_n = 1/n + 1/n^2 + (-1)^n(1/n - 1/n^2)$ 便知其逆命题不成立.
当 $\{a_n\}$ 递减时由 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{a_{n-1}a_n}$ 知逆命题成立. □

6.

证明 这是因为 $1/\ln n! \geqslant 1/(n\ln n)$. □

7.

证明 这是因为这个级数与

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x} = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x\ln\ln x} = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln\ln x}{\ln\ln x}$$

同敛散. □

8.

证明 根据积分判别法，这个级数与

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x\ln^q\ln x} = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^p x\ln^q\ln x} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$$

同敛散. 因此当 $p > 1$ 时无论 q 取何值级数都收敛，当 $p = 1$ 时级数在 $q > 1$ 时收敛. □

9.

证明 这是因为 $n^{-(1+\delta)/2}\sqrt{a_n} \leqslant (n^{-1-\delta} + a_n)/2$. 当 $\delta = 0$ 时级数可能发散，比如取 $a_n = 1/(n\ln^2 n)$. □

10.

证明 (1) 事实上所给条件等价于 $a_n \leqslant 1/n^{1+\sigma}$.
(2) 事实上所给条件等价于 $a_n \geqslant 1/n$.
(3) 这是因为

$$\ln\left(1\bigg/\frac{1}{\ln^{\ln n} n}\right)\bigg/\ln n = \ln n \geqslant 2 \ (n > 10)$$

而

$$\ln\left(1\bigg/\frac{1}{3^{\ln n}}\right)\bigg/\ln n = \ln 3 > 1.$$ □

注意

这是级数收敛性的对数判别法.

11.

证明 如果 $\{a_n\}$ 有界设 $|a_n| \leqslant M$，那么 $a_n/(1+a_n) \geqslant a_n/(1+M)$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 发散. 如果 $\{a_n\}$ 无界，那么 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n/(1+a_n) = 1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 还是发散.

因为 $a_n/(1+n^2a_n) < 1/n^2$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛. □

12.

证明 这是因为通过杨不等式可得[1]

$$\frac{a_n^\alpha}{n^\beta} = \frac{a_n^\alpha}{\left(n^{\beta/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}} \leqslant \alpha a_n + (1-\alpha)\frac{1}{n^{\beta/(1-\alpha)}}.$$ □

1.

证明 这是因为

$$\lim_{n\to\infty} x^{1+1/2+\cdots+1/n} \bigg/ \frac{1}{n^{-\ln x}} = \lim_{n\to\infty} x^{1+1/2+\cdots+1/n-\ln n} = x^\gamma,$$

其中 γ 是欧拉常数. □

2.

证明 如果 $\{a_n\}$ 有界，设 $|a_n| \leqslant M$，那么 $a_n/(1+a_n^2) > a_n/(1+M^2)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$ 发散.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，那么当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{a_n}{1+a_n^2} = \frac{1}{a_n}\frac{1}{1+1/a_n^2} \sim \frac{1}{a_n},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 同敛散.

---

[1] 见原书上册 306 页.

在其他情况下，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ 可能收敛可能发散. 比如取

$$a_n=\begin{cases}n, & n=2^k\\ 0, & n\neq 2^k\end{cases}$$

时时收敛的，而取

$$a_n=\begin{cases}n, & n=2k\\ 0, & n=2k-1\end{cases}$$

时是发散的.

如果 $\{na_n\}$ 有界，设 $|na_n|\leqslant M$，那么 $a_n/(1+na_n)>a_n/(1+M)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 发散.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=+\infty$，那么当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{a_n}{1+na_n}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+1/(na_n)}\sim\frac{1}{n},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 发散.

在其他情况下，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ 可能收敛可能发散. 比如取

$$a_n=\begin{cases}1, & n=2^k\\ 1/n^2, & n\neq 2^k\end{cases}$$

时时收敛的，而取

$$a_n=\begin{cases}1/n, & n=2k\\ 1, & n=2k-1\end{cases}$$

时是发散的. □

3.

证明 (1) 根据拉格朗日中值定理，存在介于 S_n 和 S_{n-1} 之间的 ξ_n 使得

$$\frac{1}{1-\alpha}(S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha})=\frac{S_n-S_{n-1}}{\xi_n^\alpha}=\frac{a_n}{\xi_n^\alpha}\geqslant\frac{a_n}{S_n^\alpha},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{S_n^\alpha}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\sum_{n=1}^{N}(S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha})=\frac{S_1^{\alpha-1}-S_N^{\alpha-1}}{\alpha-1}<\frac{S_1^{\alpha-1}}{\alpha-1},$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛.

(2) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\geqslant\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}\to 1\ (p\to+\infty),$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散. 而当 $\alpha\leqslant 1$ 时 $a_n/S_n^{\alpha}\geqslant a_n/S_n$，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散. □

4.

证明 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots)&=a_1+a_2+2a_4+4a_8+\cdots\\&\leqslant a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_7+\cdots\\&\leqslant a_1+2a_2+4a_4+\cdots,\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 同敛散.

(1) 这是因为 $2^n/(2^n)^{1+\alpha}=1/(2^{\alpha})^n$.

(2) 这是因为 $2^n/(2^n\ln 2^n)=1/(n\ln 2)$. □

注意

这是级数收敛性的罗巴切夫斯基判别法

5.

证明 用 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 表示这个级数. 事实上，对于 m 位数，十进制数码中不含 9 的共有 $8\times 9^{m-1}$ 个，其中首位数字是 k 的共有 9^{m-1} 个，它们都不小于 $k\times 10^{m-1}$. 因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k\times 10^{m-1}}\times 9^{m-1}=\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}=10\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k}<80.$$ □

14.3 正项级数的其它判别法

1.

证明 (1) 收敛，因为

$$\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}\bigg/\frac{n}{2^{n+1}}=\pi.$$

(2) 收敛，因为 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2/3^n}=1/3$.

(3) 收敛，因为 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5(\sqrt{3}+(-1)^n)/3^n}=(\sqrt{3}+1)/3$.

(4) 发散，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2/(1+1/n)^2=+\infty$.

(5) 发散，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1+1/n}/(n+1/n)^n=1$.

(6) 由达朗贝尔判别法知收敛.

(7) 由柯西判别法知收敛.

(8) 收敛，因为

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{\ln^n n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{(\ln^2 n)/n-\ln\ln n}=0.$$ □

2.

证明 (1) 收敛，因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}\bigg/\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n+1})}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n+1}}=+\infty.$$

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}\bigg/\frac{(n+1)!(n+1)^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n+1)}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{qn(n+1)^{p-1}+n((n+1)^p-n^p)}{n^p}=p+q,$$

所以级数当 $p+q>1$ 时收敛，当 $p+q\leqslant 1$ 时发散. □

3.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n=q$，如果 q 是 $-\infty$，那么不等式当然成立. 如果 q 是有限数，那么对任意的 $\varepsilon>0$，不妨限定 $\varepsilon<q/2$，存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $a_{n+1}/a_n>q-\varepsilon$，从而

$$a_n=a_N\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}>a_N(q-\varepsilon)^{n-N},$$

进而

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_N(q-\varepsilon)^{n-N}}=q-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\geqslant q=\varliminf\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. □

4.

证明 这是因为当 $l>1$ 时存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\frac{l+1}{2}>1,$$

而当 $l<1$ 时存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant\frac{l+1}{2}<1.$$

□

5.

证明 因为

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!n^p}\bigg/\frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{(n+1)!(n+1)^p}=\frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$
$$=\left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{p(p-1)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=1+\frac{1}{n}+\frac{0}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$

所以例6中的级数当 $p=q$ 时发散. □

1.

证明 因为

$$0<a_{n+1}\leqslant a_n(1-\beta a_n^{1-\alpha})\leqslant a_n,$$

所以由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 收敛，设其极限为 a. 于是有

$$0\leqslant a\leqslant a(1-\beta a^{1-\alpha})\leqslant a,$$

从而 $a=0$，进而由 $1-\beta a_n^{1-\alpha}>0$ 知 $\alpha\leqslant 1$. 现在取足够大的 N_0 使得当 $n>N_0$ 时成立 $\beta a_n^{1-\alpha}<1$，于是利用伯努利不等式可得

$$a_{n+1}^\alpha\leqslant a_n^\alpha(1-\beta a_n^{1-\alpha})^\alpha<a_n^\alpha(1-\alpha\beta a_n^{1-\alpha})=a_n^\alpha-\alpha\beta a_n,$$

从而由

$$\alpha\beta\sum_{n=N_0}^{\infty}a_n\leqslant\sum_{n=N_0}^{\infty}(a_n^\alpha-a_{n+1}^\alpha)=a_{N_0}^\alpha$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，又由 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n\leqslant\dfrac{a_N^\alpha}{\alpha\beta}$ 知当 $N\to\infty$ 时 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n=O(a_N^\alpha)$. □

2.

证明 如果 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = q < 1$，那么存在 $N > 0$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $a_{n+1}/a_n < (q+r)/2$，于是

$$a_n = a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_N \left(\frac{q+r}{2}\right)^{n-N},$$

进而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} a_N \left(\frac{q+r}{2}\right)^{n-N} \Bigg/ r^n = 0.$$

如果 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$，那么存在 $N > 0$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $\sqrt[n]{a_n} < (q+r)/2$，于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q+r}{2}\right)^{n} \Bigg/ r^n = 0.$$ □

3.

答 取

$$b_n = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}$$

即可. □

14.4 任意项级数

1.

证明 (1) 对无论多么大的 N，都有

$$\left|\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2n-1}\right| > \frac{N+1}{4N-1} > \frac{1}{4},$$

因此该级数发散.

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \lceil \log_2(1/\varepsilon) \rceil$，那么当 $m > N$ 时就有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} \frac{\sin n}{2^n}\right| \leqslant \sum_{n=m}^{m+p} \frac{1}{2^n} = \frac{2^{-m}(1-2^{-(p+1)})}{1-1/2} < \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon,$$

因此级数收敛.

(3) 对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$，那么当 $m > N$ 时就有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} \frac{\cos n!}{n(n+1)}\right| \leqslant \sum_{n=m}^{m+p} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p+1} < \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

因此级数收敛.

(4) 对任意的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\lceil(|a|+|b|)/\varepsilon\rceil$，那么当 $m>N$ 时就有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}\right|\leqslant\sum_{n=m}^{m+p}\frac{|a|+|b|}{n(n-1)}=\frac{|a|+|b|}{m-1}-\frac{|a|+|b|}{m+p}<\frac{|a|+|b|}{m-1}<\varepsilon,$$

因此级数收敛. □

2.

证明 用 S_n 表示莱布尼茨级数的部分和，那么 $\{S_{2n}\}$ 是递增的，$\{S_{2n-1}\}$ 是递减的，因此

$$|S_{n+p}-S_n|\leqslant|S_{n+1}-S_n|=a_{n+1}\to 0\ (n\to\infty),$$

于是由柯西收敛原理知莱布尼茨级数收敛. □

3.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $m>N$ 是对一切的 p 都有

$$|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+p}|<\varepsilon,\ |b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+p}|<\varepsilon,$$

于是由

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+p}\leqslant c_{m+1}+c_{m+2}+\cdots+c_{m+p}\leqslant b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+p}$$

知

$$|c_{m+1}+c_{m+2}+\cdots+c_{m+p}|\leqslant\max\{|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+p}|,|b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{m+p}|\}<\varepsilon.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 可能收敛也可能发散. □

4.

证明 在这个例子中，

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}\to\infty\ (n\to\infty).$$ □

5.

证明 (1) 由莱布尼茨判别法知收敛.

(2) 发散，因为通项不趋于零.

(3) 由莱布尼茨判别法知收敛.

(4) 由阿贝尔判别法知收敛. □

6.

答 对任意的 $x\in\mathbb{R}$，$\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ 都是有界的，所以由狄利克雷判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 收敛. 当 $x\neq 2k\pi$ 时 $\sum_{n=1}^{N}\cos nx$ 是有界的，所以由狄利克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 收敛. 而当当 $x=2k\pi$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. □

7.

答 不能. □

8.

证明 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}S_k\right)=0.$$ □

9.

证明 由于 $\{1/n^{\beta-\alpha}\}$ 递减且有界，所以根据阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ 收敛. □

10.

证明 用 S_n 表示这个级数的部分和，那么由莱布尼茨判别法知 $\{S_{np}\}$ 是收敛的. 于是

$$\begin{aligned}&a_1+\cdots+a_p-a_{p+1}-a_{p+2}-\cdots-a_{2p}+a_{2p+1}+\cdots+a_{3p}-\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}S_{p\lfloor n/p\rfloor}+(-1)^{\lfloor n/p\rfloor}\sum_{k=p\lfloor n/p\rfloor+1}^{n}a_n=\lim_{n\to\infty}S_{p\lfloor n/p\rfloor}\end{aligned}$$

是收敛的. □

11.

证明 (1) 因为

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

所以该级数收敛.

(2) 因为

$$\begin{aligned}\frac{1+1/2+\cdots+1/(n+1)}{n+1}\Big/\frac{1+1/2+\cdots+1/n}{n} < 1 &\Longleftarrow \frac{1+1/2+\cdots+1/(n+1)}{1+1/2+\cdots+1/n} < \frac{n+1}{n} \\ &\Longleftarrow \frac{1/(n+1)}{1+1/2+\cdots+1/n} < \frac{1}{n},\end{aligned}$$

所以 $\{(1+1/2+\cdots+1/n)/n\}$ 是递减的，且由 $1+1/2+\cdots+1/n \sim \ln n$ 知它还是趋于零的. 无论 x 为何值，$\sum\limits_{n=1}^{N}\sin nx$ 都是有界的，于是由狄利克雷判别法知该级数收敛. □

12.

证明 易见当 n 足够大时 $\{a_n\}$ 是递减的. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^{\lambda/4}-1}{1/n} = \frac{\lambda}{4} < \frac{\lambda}{2},$$

所以当 n 足够大时有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lambda/4} < 1+\frac{\lambda/2}{n}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1}-1) = \lambda$ 知当 n 足够大时有 $n(a_n/a_{n+1}-1) > \lambda/2$. 因此存在 $N>0$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1+\frac{\lambda/2}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\lambda/4} = \frac{(n+1)^{\lambda/4}}{n^{\lambda/4}},$$

进而

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}a_N < \frac{a_N N^{\lambda/4}}{n^{\lambda/4}} \to 0\ (n\to\infty).$$

因此由莱布尼茨判别法知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是收敛的. □

1.

证明 对每个正整数 k，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^{k+2}-1}{1/n} = k+2 < k+3,$$

所以当 n 足够大时有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+2}<1+\frac{k+3}{n}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty,$$

所以当 n 足够大时有 $n(a_n/a_{n+1}-1)>k+3$．因此存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{k+3}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+2}=\frac{(n+1)^{k+2}}{n^{k+2}},$$

进而当 $n\geqslant N$ 时

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}a_N<\frac{a_N N^{k+2}}{n^{k+2}},$$

由此可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k a_n$ 是收敛的． □

2.

证明　因为

$$n\left(\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\Big/\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}-1\right)=b-a,$$

所以当 $b-1>a$ 时该级数收敛．为了求出这个级数的和，记 $a_n=\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$．由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+n}{a+n}>\frac{a+1+n}{a+n}>1$$

知 $\{a_n\}$ 是递减的，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$．从

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{b-a}{a+n}$$

整理可以得到

$$a(a_n-a_{n+1})+n(a_n-a_{n+1})=(b-a)a_{n+1},$$

再对 n 求和得到

$$a(a_1-a_{n+1})+(a_1+\cdots+a_n-na_{n+1})=(b-a)(a_2+\cdots+a_{n+1}).$$

令 $n\to\infty$ 就得到

$$\frac{a^2}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=(b-a)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{a}{b}\right),$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{a}{b-a-1}$. 因此

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=1+\frac{a}{b-a-1}=\frac{b-a}{b-a-1}.$$

当 $b-1=a$ 时,

$$\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=\frac{a}{a+n}\sim\frac{a}{n}\ (n\to\infty),$$

所以级数发散. 当 $b-1<a$ 时由拉贝判别法知级数发散. □

3.

证明 当 $\{a_n\}$ 有界时, 设 $a_n \leqslant M$, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}\leqslant\frac{M-a_1}{a_1},$$

由单调有界原理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛时, 假设 $\{a_n\}$ 是无界的, 那么 $\{a_n\}$ 发散到 $+\infty$, 于是

$$\sum_{n=m}^{m+p}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant\sum_{n=m}^{m+p}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{m+p+1}}=1-\frac{a_m}{a_{m+p+1}}\to 1\ (p\to+\infty),$$

这蕴含着 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 发散, 矛盾! 因此 $\{a_n\}$ 有界. □

4.

证明 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}&>\frac{2k+1}{(k+1)^2-1}>\frac{2k+3}{(k+1)^2}\\&>\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+2)^2-1},\end{aligned}$$

所以由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sum\limits_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\dfrac{1}{n}$ 是收敛的. 又因为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor-1}(-1)^k\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{n}+(-1)^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}\sum_{n=\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2}^{N}\frac{1}{n},$$

而 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2}^{N}\dfrac{1}{n}=0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收敛． □

5.

证明 取 $a_n=\cos(2n\pi/3)/\sqrt[3]{n}$，那么由狄利克雷判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的．由于

$$\cos^3\left(\frac{2n\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 是发散的． □

6.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $\left|\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_kb_k\right|<\varepsilon$．注意到 $\{b_n/b_k\}$ 是关于 k 递增的，于是根据阿贝尔引理就有

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kb_n\right|=\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kb_k\frac{b_n}{b_k}\right|\leqslant\varepsilon\left(\frac{b_n}{b_{N+1}}+2\frac{b_n}{b_n}\right)\leqslant 3\varepsilon.$$

于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_n\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_kb_n\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{n}a_kb_n\right|\leqslant(a_1+\cdots+a_N)b_n+3\varepsilon,$$

进而 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_n\right|\leqslant 3\varepsilon$．由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)b_n=0$． □

7.

证明 分别用 a_nb_n 和 $1/b_n$ 代替第6题中的 a_n 和 b_n 即可． □

8.

证明 记 $c_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，那么

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}b_n&=\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)c_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n}{n}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{c_{n-1}}{n}\\&=c_1-\frac{c_N}{N+1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{c_n-c_{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{N}a_n-\frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{N+1}.\end{aligned}$$

根据第 7 题知

$$\lim_{N\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{N}\frac{N}{N+1}=0\times1=0,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. □

14.5 绝对收敛与条件收敛

1.

证明 (1) 绝对收敛.
(2) 绝对收敛.
(3) 条件收敛.
(4) 绝对收敛.
(5) 条件收敛.
(6) 条件收敛. □

2.

证明 (1) 当 $p>1$ 时绝对收敛. 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛. 当 $p\geqslant 0$ 时发散.
(2) 当 $p>1$ 时绝对收敛; 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛. 当 $p\geqslant 0$ 时发散.
(3) 由莱布尼茨判别法知原级数收敛. 由问题 4.2 的第 2 题知

$$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sim\frac{\mathrm{e}}{2n}\ (n\to\infty),$$

所以原级数条件收敛.
(4) 因为

$$\sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{(\ln n)/n}-1=\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

所以原级数条件收敛.
(5) 因为

$$a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}=a^{1/n}-1-\frac{b^{1/n}-1+c^{1/n}-1}{2}=\frac{1}{n}\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以原级数仅当 $a=\sqrt{bc}$ 时收敛, 且是绝对收敛. □

3.

证明 由于 $0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|$ 及 $0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 都收敛.

因为 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 都收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. □

4.

证明 (1) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不可能都收敛. 假设其中只有一个是 $+\infty$，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = +\infty,$$

矛盾！所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

其逆命题一般不成立，比如取 $a_n = (-2)^n$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不收敛.

(2) 因为 $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = S_N^+ - S_N^-$，所以

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N^+}{S_N^-} = \lim_{N\to\infty} \frac{S_N + S_N^-}{S_N^-} = 1 + \lim_{N\to\infty} \frac{S_N}{S_N^-} = 1.$$ □

5.

证明 记

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \right),$$

那么根据定理 7.3.2 可得

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} \geqslant \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} - A \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} - A \right|,$$

进而

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + A - \frac{1}{1-\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 表示重排后的级数，并记 $m_N = \lfloor N/(p+q) \rfloor$，那么

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{m_N(p+q)} a_n + \sum_{n=m_N(p+q)+1}^{N} a_n.$$

由于

$$\left|\sum_{n=m_N(p+q)+1}^{N} a_n\right| \leqslant \sum_{n=m_N(p+q)+1}^{N} |a_n| \leqslant \frac{p+q}{(m_N(p+q))^\alpha} = \frac{(p+q)^{1-\alpha}}{m_N^\alpha} \to 0 \ (N\to\infty),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{m_N(p+q)} a_n = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{(2k-1)^\alpha} - \sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{(2k)^\alpha}\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{(2k)^\alpha} - \sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{(2k)^\alpha}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha}\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha}\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{k^\alpha}\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{(2mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + O\left(\frac{1}{(2mp)^\alpha}\right) - \frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{(mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + O\left(\frac{1}{(mp)^\alpha}\right)\right)\right.\\ &\qquad \left. -\frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{(mq)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + O\left(\frac{1}{(mq)^\alpha}\right)\right)\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{(p^{1-\alpha} - q^{1-\alpha})m^{1-\alpha}}{2^\alpha(1-\alpha)} + \beta(1-2^{1-\alpha}) + O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)\right)\\ &= \begin{cases}\beta(1-2^{1-\alpha}), & p=q\\ +\infty, & p>q\ .\\ -\infty, & p<q\end{cases}\end{aligned}$$

□

1.

证明　(1) 当 $p>1$ 时，由 $|\ln(1+(-1)^n/n^p)| \leqslant 1/n^p$ 知原级数绝对收敛. 由于

$$\frac{(-1)^n}{n^p} - \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right) \sim \frac{1}{2n^{2p}} \ (n\to\infty),$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 总是收敛的，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 在 $1/2<p\leqslant 1$ 时收敛，在 $0<p\leqslant 1/2$ 时发散. 此外，易见 $1/2<p\leqslant 1$ 时原级数条件收敛.

(2) 当 $p\leqslant 0$ 时 $((2n-1)!!/(2n)!!)^p \geqslant 1$，所以原级数发散.

因为

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \sqrt{\frac{1\times 3}{2\times 2}\frac{3\times 5}{4\times 4}\cdots\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}\frac{2n-1}{(2n)^2}} < \sqrt{\frac{2n-1}{(2n)^2}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

所以由莱布尼茨判别法知当 $p>0$ 原级数收敛. 另一方面，我们有

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{3\times 3}{2\times 4}\frac{5\times 5}{4\times 6}\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\times 2n}\frac{1}{2n}} > \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

所以

$$\frac{1}{2^p n^{p/2}} < \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p < \frac{1}{(2n+1)^{p/2}},$$

由此可见原级数当 $p>2$ 时绝对收敛，当 $0<p\leqslant 2$ 时条件收敛.

(3) 用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 表示原级数. 当 $p>1$ 且 $q>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛，所以原级数收敛.

当 p 和 q 中只有一个大于 1 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 和这个中只有一个是发散的，所以原级数发散.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，易见原级数条件收敛.

当 $0<p\neq q\leqslant 1$ 时，因为

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right)=\sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right),$$

而 $\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}$ 是恒号的且

$$\left|\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right| = \frac{(2n)^{|q-p|}-1}{2^{\max\{p,q\}}}\frac{1}{n^{\max\{p,q\}}} \geqslant \frac{2^{|q-p|}-1}{2^{\max\{p,q\}}}\frac{1}{n^{\max\{p,q\}}},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，所以原级数发散.

因此原级数在 $p>1$ 且 $q>1$ 时绝对收敛，在 $0<p=q\leqslant 1$ 时条件收敛，在其他情况下发散. □

2.

证明 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不是绝对收敛的，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$. 于是存在 $k_1>1$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{k_1}|a_n|>1$. 一般地，存在 $k_i>k_{i-1}$ 使得

$$\sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i}|a_n|>i,\ i=1,2,\ldots;\ k_0=0.$$

现在当 $k_{i-1}<n\leqslant k_i$ 时取 $x_n=\operatorname{sgn} a_n/i$，那么 $\{x_n\}$ 是趋于零的，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛，进而可以对级数加括号写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} a_n x_n=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i}|a_n|>\sum_{i=1}^{\infty}1=+\infty,$$

矛盾！因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛的.

当条件修改后结论一般不成立，比如取 $a_n = (-1)^n$. □

3.

证明 用 S_n 表示新级数的部分和.

当 $p > q$ 时，因为

$$\begin{aligned}
&S_{m(p+q)}\\
=&\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{(k-1)(p+q)+1}+\cdots+\frac{1}{(k-1)(p+q)+p}-\frac{1}{kp+(k-1)q+1}-\cdots-\frac{1}{k(p+q)}\right)\\
>&\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k-1)(p+q)+p}>\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)p}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\to+\infty\ (m\to\infty),
\end{aligned}$$

而

$$|S_N - S_{(p+q)\lfloor N/(p+q)\rfloor}| < \frac{p+q}{(p+q)\lfloor N/(p+q)\rfloor+1} \to 0\ (N\to\infty),$$

所以 $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$，即原级数发散到 $+\infty$.

当 $p < q$ 时，因为

$$\begin{aligned}
&S_{m(p+q)+p} - S_p\\
=&\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{kp+(k-1)q+1}-\cdots-\frac{1}{k(p+q)}+\frac{1}{k(p+q)+1}+\cdots+\frac{1}{k(p+q)+p}\right)\\
<&-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k(p+q)}=-\frac{1}{p+q}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\to-\infty\ (m\to\infty),
\end{aligned}$$

而

$$|S_N - S_{(p+q)\lfloor (N-p)/(p+q)\rfloor+p}| < \frac{p+q}{(p+q)\lfloor (N-p)/(p+q)\rfloor+p+1} \to 0\ (N\to\infty),$$

所以 $\lim_{N\to\infty} S_N = -\infty$，即原级数发散到 $-\infty$.

当 $p = q$ 时，新的级数可以写成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lceil n/p\rceil-1}}{n}$，由狄利克雷判别法（或者利用练习题14.4的第10题）知该级数是收敛的. □

4.

证明 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛和 $\{b_n\}$ 收敛知可设 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < A$ 及 $|b_n| < A$. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时成立 $|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon/(2A)$ 和 $|b_n| < \varepsilon/(2A)$. 于是当

$n > 2N+1$ 时有

$$\begin{aligned}|a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1| &\leqslant |a_1b_n| + \cdots + |a_{\lfloor n/2\rfloor}b_{n+1-\lfloor n/2\rfloor}| + |a_{\lfloor n/2\rfloor+1}b_{n-\lfloor n/2\rfloor}| + \cdots + |a_nb_1| \\ &< A \times \frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2A} \times A = \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) = 0$. □

14.6 级数的乘法

1.

证明 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 与其自身的柯西乘积，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ 是绝对收敛的，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty}q^n\right)^2 = \frac{1}{(1-q)^2}.$$ □

2.

证明 这是定理 14.6.1 的直接推论. □

3.

证明 由达朗贝尔判别法可知这两个级数对所有实数 x 绝对收敛.
注意到例 1 中的级数满足 $E(x\mathrm{i}) = C(x) + \mathrm{i}S(x)$，所以

$$2S(x)C(x) = 2\frac{E(x\mathrm{i})+E(-\mathrm{i})}{2}\frac{E(x\mathrm{i})-E(x\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{E(2x\mathrm{i})-E(-2x\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = S(2x).$$ □

1.

证明 由莱布尼茨判别法知这两个级数都是收敛的. 记 $(-1)^{n-1}/n^{\alpha} = a_n$ 而 $(-1)^{n-1}/n^{\beta} = b_n$，再令 $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的柯西乘积.

当 $\alpha+\beta \leqslant 1$ 时，因为

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}(n+1-k)^{\beta}} \geqslant \frac{n}{n^{\alpha+\beta}} \geqslant 1,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散.

当 $\alpha+\beta>1$ 时，考虑到

$$|c_n|=\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}+\sum_{k=\lfloor n/2\rfloor+1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(n+1-k)^\beta}\leqslant\frac{1}{\lfloor n/2\rfloor^\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}+\frac{1}{\lfloor n/2\rfloor^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta},$$

而

$$\frac{1}{\lfloor n/2\rfloor^\beta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=\begin{cases}O(1/n^{\alpha+\beta-1}), & \alpha\neq 1\\ O(n^{-\beta}\ln n), & \alpha=1\end{cases},\quad \frac{1}{\lfloor n/2\rfloor^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}=\begin{cases}O(1/n^{\alpha+\beta-1}), & \beta\neq 1\\ O(n^{-\alpha}\ln n), & \beta=1\end{cases},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$. 另一方面，因为

$$c_{2n}=-\left(\sum_{k=1}^{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}\right)\frac{1}{k^\alpha(2n+1-k)^\beta}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(2n+1-k)^\beta}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\beta(2n+1-k)^\alpha},$$

$$c_{2n+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\right)\frac{1}{k^\alpha(2n+1-k)^\beta}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha(2n+2-k)^\beta}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k^\beta(2n+2-k)^\alpha},$$

所以

$$\begin{aligned}|c_{2n}+c_{2n+1}|=&\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^\beta}-\frac{1}{(2n+2-k)^\beta}\right)\right.\\&\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^\alpha}-\frac{1}{(2n+2-k)^\alpha}\right)-\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}\right|\\ \leqslant&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^\alpha}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^\beta}-\frac{1}{(2n+2-k)^\beta}\right)+\frac{1}{k^\beta}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^\alpha}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{1}{(2n+2-k)^\alpha}\right)\right)+\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}.\end{aligned}$$

通过求导易知对于正数 σ，函数 $1/x^\sigma-1/(x+1)^\sigma$ 当 $x>0$ 时是递减的，从而

$$|c_{2n}+c_{2n+1}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^\beta}-\frac{1}{(n+2)^\beta}\right)+\frac{1}{k^\beta}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right)\right)+\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}.$$

注意到

$$\frac{1}{(n+1)^\sigma}-\frac{1}{(n+2)^\sigma}=O\left(\frac{1}{n^{\sigma+1}}\right),$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^\beta}-\frac{1}{(n+2)^\beta}\right)=\begin{cases}O(1/n^{\alpha+\beta}), & \alpha\neq 1\\ O(n^{-\beta-1}\ln n), & \alpha=1\end{cases},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right)=\begin{cases}O(1/n^{\alpha+\beta}), & \beta\neq 1\\ O(n^{-\alpha-1}\ln n), & \beta=1\end{cases},$$

由此可见 $\left\{\sum_{n=1}^{2N+1}c_n\right\}$ 收敛. 结合 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛. □

2.

证明 这是因为这两个级数的柯西乘积的通项为

$$\begin{aligned}c_n =&1\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\cdots\\ &-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\left(2+\frac{1}{2^2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\\ &=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-2^{n-1}-\frac{1}{2^n}-\cdots-2-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n}.\end{aligned}$$ □

14.7 无穷乘积

1.

答 如果 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛，那么 $\prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$ 都收敛，但是 $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$ 一定发散，因为 $p_n+q_n\to 2$. □

2.

证明 (1) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n+1}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{2}{3}\frac{(N+1)^2-(N+1)+1}{N(N+1)}=\frac{2}{3}$.

(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\frac{n+2}{n+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{N+2}{3N}=\frac{1}{3}$.

(3) $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1-1/2}{1-1/2}\prod_{n=0}^{N}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=2\lim_{N\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{N+1}}\right)=2$. □

3.

证明 (1) 根据例 3，

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=1\Big/\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{\pi}.$$

(2) 这是因为

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\right)^2\frac{1}{2N+1}\frac{2N+2}{2N+1}=\frac{\pi}{4}.\quad\square$$

4.

证明 (1) 发散到 0，因为 $1/n\to 0\ (n\to\infty)$.

(2) 收敛，因为

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}.$$

(3) 收敛，因为

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\quad\square$$

5.

证明 (1) 收敛，因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(n+\sqrt{n^2+1})}.$$

(2) 收敛，因为

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p-1=\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p-1\sim-\frac{2}{p(n^2+1)}\ (n\to\infty).$$

(3) 因为

$$\ln\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}=\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\sim\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}<-\frac{1}{n}\ (n>\mathrm{e}x),$$

所以这个无穷乘积发散到 0. $\square$

6.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛蕴含着 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{a_n}{2}$ 收敛，而 $\cos a_n=1-2\sin^2(a_n/2)$，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos a_n$ 收敛. $\square$

7.

证明 由 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 发散知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 因为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 发散. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 条件收敛. 从而通过适当地重排，可使它收敛到

$\ln s$ 或者发散到 $\pm\infty$. 于是对应地，可以适当地改变 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 的因子的次序，使它收敛到正数 s，或者发散到 0 或 $+\infty$. □

1.

证明 在例 2 中取 $x=\pi/2$ 再取倒数即可. □

2.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k+1}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}/(k+1)}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(a_1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.\end{aligned}$$ □

3.

证明 因为

$$\sum_{n=1}^{2N}a_n=\sum_{n=1}^{N}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\sqrt{n}}\to+\infty\ (N\to\infty),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

因为 $a_{2n-1}^2+a_{2n}^2>1/n$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

考虑到

$$\begin{aligned}\prod_{n=2}^{2N}(1+a_n)&=(1+a_2)\prod_{n=2}^{N}(1+a_{2n-1})(1+a_{2n})=4\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=4\prod_{n=2}^{N}\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}=2\frac{N+1}{N}\to2\ (N\to\infty),\end{aligned}$$

所以还有

$$\prod_{n=2}^{2N+1}(1+a_n)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right)\prod_{n=2}^{2N}(1+a_n)\to2\ (N\to\infty),$$

因此 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛. □

4.

证明 因为

$$\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0$. 进一步，有

$$0=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

当然也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}=0$. □

5.

证明 记

$$b_n=\frac{(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\cdots(x_0^2-n^2)},$$

那么

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{x^2-(n+1)^2}{x_0^2-(n+1)^2},$$

所以当 n 足够大时 $\{b_n\}$ 是单调的. 又因为

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}\right)$$

是收敛的，所以 $\{b_n\}$ 是有界的. 于是根据阿贝尔判别法，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\cdots(x_0^2-n^2)b_n$$

收敛. □

6.

证明 因为

$$a_n=a_1\prod_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}=a_1\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}\left(1+\frac{k-1}{k}O(b_{k-1})\right)=\frac{a_1}{n}\Bigg/\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{k-1}{k}O(b_{k-1})\right),$$

又易见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛蕴含着 $\prod\limits_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{k-1}{k}O(b_{k-1})\right)$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

7.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=+\infty.$$

又

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1. \qquad \square$$

第十五章　函数列与函数项级数

15.1　问题的提出

解　(1) 当 $|x/(3x+1)|<1$ 时级数收敛，因此收敛点集就是 $(-\infty,-1/2)\cup(-1/4,+\infty)$.

(2) 当 $|\mathrm{e}^{-x}|<1$ 时级数收敛，因此收敛点集就是 $(0,+\infty)$.

(3) 因为 $(x(x+n)/n)^n=x^n(1+x/n)^n$，所以不难看出收敛点集就是 $(-1,1)$.

(4) 因为 $x^n/(1+x^{2n})\leqslant\min\{x^n,x^{-n}\}$，所以收敛点集就是 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(5) 因为 $(n+x)^n/n^{n+x}=(1+x/n)^n n^{-x}$，所以不难看出收敛点集就是 $(1,+\infty)$.

(6) 因为 $\min\{x^n,y^n\}/2\leqslant x^ny^n/(x^n+y^n)\leqslant\min\{x^n,y^n\}$，所以收敛点集就是

$$\{(x,y)\colon x>0\wedge y>0\wedge\neg(x\geqslant 1\wedge y\geqslant 1)\}.$$

(7) $(0,1)\times(-\infty,+\infty)\cup(1,+\infty)\times(2,+\infty)\cup\{1\}\times(1,+\infty)$.

(8) 因为

$$\sqrt[n]{n}-1=\mathrm{e}^{(\ln n)/n}-1=\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

所以收敛点集就是 $(1,+\infty)$. □

1.

证明　因为 $S(x)\geqslant\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\geqslant 0$，所以 $S(x)$ 有下确界，记为 α. 于是对每个正整数 n 都存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $\alpha\leqslant S(x_n)<\alpha+1/n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S(x_n)=\alpha$. 因为 $\{x_n\}$ 有界，所以有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，其极限设为 x_0. 由于

$$\sum_{i=1}^{n}u_i(x_{n_k})\leqslant S(x_{n_k})<\alpha+\frac{1}{n_k},$$

于是令 $k\to\infty$ 并利用连续性得到 $\sum_{i=1}^{n}u_i(x_0)\leqslant\alpha$. 再令 $n\to\infty$ 就得到 $S(x_0)\leqslant\alpha$. 又因为 $S(x_0)\geqslant\alpha$，所以 $S(x_0)=\alpha$，即 $S(x)$ 取到了最小值 α. □

2.

答 不一定. 比如取

$$f_n(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1-1/n\\ (1-n)(x-1), & 1-1/n<x\leqslant 1\end{cases},\ n\geqslant 1;\ f_0(x)=0,$$

再取 $u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$, 那么

$$S(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases},$$

它在 $[0,1]$ 上取不到最大值. □

3.

答 换成开区间不一定成立, 比如在 $(0,1)$ 上取 $u_n(x)=x^n$. 换成无穷区间更不一定成立, 比如取 $u_n(x)=(1/n-1/(n+1))x$. □

15.2 一致收敛

1.

答 (1) 易见其极限函数是

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x>0\end{cases}.$$

(a) 不一致收敛. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x>0}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x>0}\frac{1}{1+nx}=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

(b) 一致收敛. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x>\lambda}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x>\lambda}\frac{1}{1+nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n\lambda}=0.$$

(2) 易见其极限函数是

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1/2, & x=1,\\ 1, & x>1\end{cases}.$$

(a) 一致收敛．因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1-\lambda}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1-\lambda}\frac{x^n}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\lambda)^n}{1+(1-\lambda)^n}=0.$$

(b) 不一致收敛．因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{1-\lambda\leqslant x\leqslant 1+\lambda}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{1<x\leqslant 1+\lambda}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{1<x\leqslant 1+\lambda}\frac{1}{1+x^n}=1.$$

(c) 一致收敛．因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant 1+\lambda}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant 1+\lambda}\frac{1}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(1+\lambda)^n}=0.$$

(3) 易见其极限函数是 $f(x)=0$．

(a) 一致收敛．因为

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{-l<x<l}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{x\to\infty}\sup_{-l<x<l}\mathrm{e}^{-(x-n)^2}=0.$$

(b) 不一致收敛．因为

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{x\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\mathrm{e}^{-(x-n)^2}=1.\qquad\square$$

2.

答　(1) 一致收敛，因为 $\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}<\dfrac{1}{n^2}$.

(2) 一致收敛，因为

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{n|x|}{2\sqrt{n^5x^2}}=\frac{1}{2n^{3/2}}.$$

(3) 一致收敛，因为

$$\frac{n^2}{\sqrt{n!}}|x^n+x^{-n}|\leqslant\frac{2n^2 3^n}{\sqrt{n!}},$$

而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{2n^2 3^n}{\sqrt{n!}}}=0$．

(4) 一致收敛，因为

$$\left|\frac{\sin(n+1/2)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\leqslant\frac{1}{n^{4/3}}.$$

(5) 一致收敛．因为当 $x\in(-l,l)$ 时

$$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)=\frac{x}{n\ln^2 n}+o\left(\frac{x}{n\ln^2 n}\right)=\frac{x}{n\ln^2 n}+o\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right),$$

其中 $\dfrac{|x|}{n\ln^2 n} \leqslant \dfrac{l}{n\ln^2 n}$.

(6) 一致收敛. 因为 $\sum\limits_{n=2}^{N}(-1)^n$ 是有界的, 而 $\left\{\dfrac{1}{n+\sin x}\right\}$ 递减地一致收敛于零, 从而利用狄利克雷判别法即可.

(7) 不一致收敛. 因为 $2^n \sin \dfrac{1}{3^n x}$ 不一致地收敛于零. □

3.

证明 因为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 关于 x 当然是一致的, 而 $\{\mathrm{e}^{-nx}\}$ 对于每个 x 是单调的且一致有界, 从而根据阿贝尔判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. □

4.

证明 这是因为

$$|u_n(x)| \leqslant \max\{|u_n(a)|, |u_n(b)|\} \leqslant |u_n(a)| + |u_n(b)|. \qquad \square$$

5.

证明 绝对收敛性是显然的. 因为 $\sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n$ 是有界的, 而由

$$x^n(1-x) = n^n\left(\frac{x}{n}\right)^n(1-x) \leqslant n^n\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{1+n} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

知 $\{x^n(1-x)\}$ 一致地收敛于零,且对每个 x 是递减的,从而根据狄利克雷判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

由 $\sum\limits_{n=0}^{N} x^n(1-x) = 1 - x^{N+1}$ 易见 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. □

6.

证明 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$, 当 $n > N$ 时就有

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 存在一个收敛的优级数 $\{a_n\}$，那么当然有 $a_n \geqslant u_n(1/n) = 1/n$，于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，矛盾！因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 虽然一致收敛，但是没有收敛的优级数. □

7.

证明 假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得当 $m \geqslant N$ 时对任意的 $p > 1$ 和 $x \in [a,b)$ 都有 $\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p}u_n(x)\right| < \varepsilon$. 利用 $u_n(x)$ 的连续性就有

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}u_n(b)\right| = \lim_{x\to b^-}\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}u_n(x)\right| \leqslant \varepsilon,$$

这与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(b)$ 发散矛盾！因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛. □

8.

证明 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛时，由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛时，取 $x=0$ 就得到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛. □

9.

证明 由狄利克雷判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln x}$ 在 $(0,\pi]$ 上收敛. 因为当 $x=0$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，所以由第 7 题知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln x}$ 在 $(0,\pi]$ 上不一致收敛. □

10.

证明 题干中所述的 I_x 的全体 $\{I_x\colon x\in[a,b]\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，于是根据有限覆盖定理，从中可以取出一个有限子覆盖 $\{I_{x_i}\colon i=1,2,\ldots,m\}$. 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_i>0$ 使得当 $n>N_i$ 时对所有的 $t\in I_{x_i}$ 都有 $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$. 现在取 $N=\max\{N_1,N_2,\ldots,N_m\}$，那么当 $n>N$ 时对所有的 $t\in[a,b]$ 都有 $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$. 因此 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $[a,b]$. □

11.

证明 不难看出无论 α 取值如何，$\{f_n(x)\}$ 的极限函数都是 $f(x)=0$. 于是 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛当且仅当

$$0=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant 0}|f_n(x)|=\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{\alpha-1}n}{\mathrm{e}},$$

这当且仅当 $\alpha<1$. □

12.

证明 因为 f_1 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，所以有界，设 $|f_1|\leqslant M$. 于是

$$|f_2(x)|=\left|\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^x M\,\mathrm{d}t=M(x-a).$$

归纳地有

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\leqslant\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\to 0\ (n\to\infty).$$

因此 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. □

13.

证明 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha\mathrm{e}^{-nx^2}=x^{\alpha-1}(\alpha-2nx^2)\mathrm{e}^{-nx^2},$$

所以 $x^\alpha\mathrm{e}^{-nx^2}\leqslant\left(\dfrac{\alpha}{2\mathrm{e}}\right)^{\alpha/2}\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$. 由此可见当 $\alpha>2$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^\alpha\mathrm{e}^{-nx^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. □

1.

证明 因为

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

所以该级数的部分和为

$$S_n(x)=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

和函数为

$$S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\delta]}|S_n(x)-S(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,\delta]}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=1,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[\delta,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\delta)(1+2\delta)\cdots(1+n\delta)}=0,$$

因此该级数在 $[0,\delta]$ 上不一致收敛，在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛． □

2.

证明 设 $\{f_n\}$ 的极限函数是 f，那么存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时对一切的 $x\in I$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<1$．于是

$$|f(x)|<|f_N(x)|+1\leqslant M+1,$$

其中 M 是 f_N 的一个上界．因此 f 也是有界的．同理，$\{g_n\}$ 的极限函数 g 也是有界的．当 $n\geqslant N$ 时也有

$$|f_n(x)|\leqslant|f(x)|+1\leqslant M+2.$$

由此可见 $\{f_n\}$ 是一致有界的，用 M' 表示它们和 f,g 共同的界．

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时对一切的 $x\in I$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2M'},\ |g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2M'}.$$

于是

$$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|\leqslant|f_n(x)||g_n(x)-g(x)|+|g(x)||f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此 $\{f_ng_n\}$ 在 I 上一致收敛，且极限函数就是 fg． □

3.

证明 一般不成立．比如在区间 $(0,1)$ 上，取 $f_n(x)=1/x$，$g_n(x)=1/(n+1/x)$，那么 $\{f_n\}$ 当然是一致收敛的，由 $1/(n+1/x)<1/n$ 知 $\{g_n\}$ 也是一致收敛的．但是不难验证 $\{f_ng_n\}$ 不是一致收敛的． □

4.

证明 记

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

对任意的 $\varepsilon>0$，对区间 $[a,b]$ 作 m 等分，分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$，其中 $m=\lceil 1/\varepsilon\rceil$．因为 $\{S_n(x_i)\}$ 是收敛的，所以存在 $N_i>0$ 使得当 $n>N_i$ 时 $|S_n(x_i)-S(x_i)|<\varepsilon$．现在取

$N=\max\{N_0,N_1,\ldots,N_m\}$，那么当 $n>N$ 时，对每个 $x\in[a,b]$ 都存在 i 使得 $|x-x_i|<\varepsilon$，于是

$$|S_n(x)-S(x)|\leqslant|S_n(x)-S_n(x_i)|+|S_n(x_i)-S(x_i)|+|S(x_i)-S(x)|.$$

其中

$$|S_n(x)-S_n(x_i)|=|S_n'(\xi)||x-x_i|\leqslant M\varepsilon,$$

再令 $n\to\infty$ 得到 $|S(x)-S(x_i)|\leqslant M\varepsilon$. 因此 $|S_n(x)-S(x)|<(2M+1)\varepsilon$，所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

注意

这道题是说，收敛的函数列如果是等度连续的，那么一定是一致收敛的. 对于等度连续，换言之就是一致一致连续. 事实上，这道题是阿尔泽拉–阿斯科利定理的直接应用.

5.

证明 在 $x=0$ 的某个邻域 $[-\delta,\delta]$ 上，根据泰勒公式有

$$f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_x)x^2,\ 0<|\xi_x|<x.$$

因为 $f''(x)$ 是连续的，所以在 $[-\delta,\delta]$ 上有界，设 $f''(x)<M$. 现在取 $\delta'=\min\{\delta,(1-f'(0))/M\}$，那么

$$|f(x)|\leqslant\left(f'(0)+\frac{M\delta'}{2}\right)|x|\leqslant\frac{f'(0)+1}{2}|x|,\ |x|<\delta'.$$

因此

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{f'(0)+1}{2}|f_{n-1}(x)|\leqslant\left(\frac{f'(0)+1}{2}\right)^n\delta',\ |x|<\delta',$$

于是根据魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $x=0$ 的邻域 $[-\delta',\delta']$ 上一致收敛. □

6.

证明 由魏尔斯特拉斯优级数判别法知该级数在 $[0,1/2]$ 上一致收敛. 在 $[1/2,1]$ 上，考虑

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx=\frac{1}{1+x^n}\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}\cos nx.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{N}\cos nx$ 在 $[1/2,1]$ 上是一致有界的，而

$$\frac{x^{n+1}}{1+x+\cdots+x^n}\leqslant\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}\leqslant\frac{x^n}{n\sqrt[n]{x^{0+1+\cdots+(n-1)}}}=\frac{x^{(n+1)/2}}{n}\leqslant\frac{1}{n},$$

所以由狄利克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \cos nx$ 在 $[1/2,1]$ 上是一致收敛的. 又因为 $\{1/(1+x^n)\}$ 在 $[1/2,1]$ 上一致有界，且是单调的，所以由阿贝尔判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \cos nx$$

在 $[1/2,1]$ 上一致收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}} \cos nx$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. □

7.

证明 当 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ 时，令 $b_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{ka_k\}$，那么 $\{b_n\}$ 递减地收敛于零. 对每个 $x \in (0,\pi]$，选取正整数 N_x 使得

$$\frac{\pi}{N_x+1} < x \leqslant \frac{\pi}{N_x}.$$

把级数的余项分解成

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \sin nx = \sum_{n=m}^{m+N_x-1} a_n \sin nx + \sum_{n=m+N_x}^{\infty} a_n \sin nx,$$

那么其中的

$$\left|\sum_{n=m}^{m+N_x-1} a_n \sin nx\right| \leqslant x \sum_{n=m}^{m+N_x-1} na_n \leqslant xN_x b_m \leqslant \pi b_m.$$

记

$$D_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin nx = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)},$$

那么利用若尔当不等式可得

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{\pi}{x}.$$

于是由阿贝尔变换有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=m+N_x}^{\infty} a_n \sin nx\right| &= \left|\sum_{n=m+N_x}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) D_n(x) - a_{m+N_x} D_{m+N_x-1}(x)\right| \\ &\leqslant \frac{2\pi a_{m+N}}{x} \leqslant 2(N_x+1)a_{m+N_x} \leqslant 2b_m.\end{aligned}$$

这样我们就得到了对一切的 $x \in (0,\pi]$ 都有

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n \sin nx\right| \leqslant (2+\pi) b_m.$$

由周期性和奇偶性可知上式对 $x \in (-\infty,+\infty)$ 也成立，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛时，对每个正整数 N，取 $x=\pi/(2N)$，那么

$$\sum_{n=\lceil N/2\rceil}^{N} a_n \sin nx \geqslant a_N \sin\frac{\pi}{4}\sum_{n=\lceil N/2\rceil}^{N} 1 \geqslant \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} N a_N,$$

于是由一致收敛的柯西准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$. □

15.3 极限函数与和函数的性质

1.

解 (1) 因为

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x+\frac{1}{n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty}\left|x+\frac{1}{n}\right| = |x|,$$

所以当 $|x|<1$ 是级数是绝对收敛的．当 $x=\pm 1$ 时，因为 $(\pm 1+1/n)^n \not\to 0$，所以级数发散．因此 $f(x)$ 的存在域是 $(-1,1)$．对任意的 $\delta \in (0,1)$，当 $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$ 时且 $n \geqslant \lceil 2/\delta\rceil$ 时

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n \leqslant \left(|x|+\frac{\delta}{2}\right)^n \leqslant \left(1-\frac{\delta}{2}\right)^n,$$

于是由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛．因此函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛，进而 $f(x)$ 连续.

(2) 因为 $|x|/(x^2+n^2) \leqslant |x|/n^2$，所以由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛．因为 $\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n$ 是有界的，而 $(-1)^n n/(x^2+n^2)$ 递减地一致收敛于零，所以由狄利克雷判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{x^2+n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛．由此可见 $f(x)$ 的存在域是 $\mathbb{R}$．容易看出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是内闭一致收敛的，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上也内闭一致收敛，因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. □

2.

证明 由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cos nx}{n^4}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，所以 $f'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$. 同样地易见 $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin nx}{n^3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，因此 $f''(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$，且是连续的. □

3.

证明 对任意的 $\delta>0$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$ 是收敛的，关于 x 当然是一致的. 而 $\frac{1}{n^{x-1-\delta}}$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 上对每个 x 都是递减的，且一致有上界 1，于是由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，进而 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

对每个正整数 m，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^m(1/n)}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(1/n)}{n^{\delta/(2m)}}\right)^m\frac{1}{n^{1+\delta/2}}\frac{1}{n^{x-1-\delta}},$$

于是由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\frac{1}{n^x}$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 由此可见 $\zeta(x)$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 上有各阶连续导数. 由 δ 的任意性知 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有各阶连续导数. □

4.

解 不难直接算出 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$，因此 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. □

5.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}$ 是有界的，而 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[1/2,+\infty)$ 上一致收敛于零，且对于每个 x 都是递减的，所以由狄利克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 在 $[1/2,+\infty)$ 上一致收敛，从而

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$ □

6.

证明 (1) 根据柯西收敛准则，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $m>N$ 时对任意的正整数 p 都有

$$|u_{m+1}(x)+u_{m+2}(x)+\cdots+u_{m+p}(x)|<\varepsilon,\ x\in E.$$

于是

$$|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+p}|=\lim_{x\to x_0}|u_{m+1}(x)+u_{m+2}(x)+\cdots+u_{m+p}(x)|\leqslant\varepsilon.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 因为

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\leqslant\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)\right|+\sum_{n=1}^{N}|u_n(x)-a_n|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\right|,$$

所以对任意的 $\varepsilon>0$，只要取 N 使得

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ x\in E;\ \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

再取 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 使得当 $x\in U(x_0)$ 时 $|u_n(x)-a_n|<\varepsilon/(3N)$，就有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|<\varepsilon,\ x\in U(x_0).$$

因此

$$\lim_{E\ni x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$ □

注意

可以将此题与练习题15.2的第7题作比较.

7.

解 因为

$$\left|\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2^n},\ x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right),$$

所以由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}$ 在 $[1/2,+\infty)$ 上一致收敛. 因此

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{4},\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$ □

8.

证明 根据均值不等式，

$$\left|\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}\right| = \frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^{2n-1})} \leqslant \frac{x^n}{2n^2\sqrt[2n]{x^{0+1+\cdots+(2n-1)}}} = \frac{\sqrt{x}}{2n^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2n^2},\ x \in [0,2],$$

因此由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}$ 在 $[0,2]$ 上一致收敛，进而

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$ □

1.

证明 由条件，对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $c \in (a,b)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,c-\varepsilon]$ 和 $[c+\varepsilon,b]$ 上一致收敛，从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,c-\varepsilon]$ 和 $[c+\varepsilon,b]$ 上分别黎曼可积．于是存在 $[a,c-\varepsilon]$ 的一个分割 $\pi_1\colon a = x_0' < x_1' < \cdots < x_k' = c-\varepsilon$ 和 $[c+\varepsilon,b]$ 的一个分割 $\pi_2\colon c-\varepsilon = x_0'' < x_1'' < \cdots < x_m'' = b$ 使得 $\displaystyle\sum_{\pi_1}\omega_i'\Delta x_i' < \varepsilon$ 和 $\displaystyle\sum_{\pi_2}\omega_i''\Delta x_i'' < \varepsilon$，其中 ω_i 是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 对应的振幅．作 $[a,b]$ 的分割

$$\pi\colon a = x_0' < x_1' < \cdots < x_k' = c-\varepsilon < c-\varepsilon = x_0'' < x_1'' < \cdots < x_m'' = b,$$

那么

$$\sum_{\pi}\omega_i x_i \leqslant \sum_{\pi_1}\omega_i'\Delta x_i' + 2\varepsilon M + \sum_{\pi_2}\omega_i''\Delta x_i'' < 2(1+M)\varepsilon.$$

因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积．

取足够大的正整数 N 使得

$$\left|\left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b\right)\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b\right)u_n(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

那么

$$\left|\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon + \left|\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}u_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant (1+4M)\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

2.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛，所以根据练习题第 6 题知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛．因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在每个 $[a,b]$ 上一致收敛，所以对每个 $x>a$ 都有

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

再根据练习题第 6 题，就有

$$\int_a^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

3.

证明 因为 $u_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}=u_n'(x_0).$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ 上一致收敛，所以由练习题第 6 题知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$ □

4.

证明 由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-a_n|}{2^n}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛，从而和函数 $f(x)$ 连续．当 $x_0\in(0,1)\setminus\{a_n\}$ 时，每个 $|x-a_n|/2^n$ 在 $x=x_0$ 处是可微的．同样由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-a_n|-|x_0-a_n|}{2^n(x-x_0)}$ 在 x_0 的去心邻域上一致收敛．根据第 3 题知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微．当 $x_0=a_m$ 时，因为

$$f(x)=\frac{|x-a_m|}{2^m}+\sum_{n\neq m}\frac{|x-a_n|}{2^n},$$

其中 $\sum\limits_{n\neq m}\dfrac{|x-a_n|}{2^n}$ 在 $x=a_m$ 处可微而 $\dfrac{|x-a_m|}{2^m}$ 在 $x=a_m$ 处不可微，所以 $f(x)$ 在 $x=a_m$ 处不可微． □

5.

证明 (1) 由魏尔斯特拉斯优级数优级数判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+2^n}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，从而和函数 $f(x)$ 连续.

(2) 由练习题第 6 题知

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2^n}=0.$$

(3) 易见

$$\frac{1}{x+2^{n+1}}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{x+2^t}<\frac{1}{x+2^n},$$

其中

$$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{x+2^t}=\frac{t}{x}-\frac{\ln(x+2^t)}{x\ln 2}\Big|_{t=n}^{t=n+1}.$$

于是对 n 求和就得到

$$f(x)-\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}<f(x),$$

亦即

$$0<f(x)-\frac{\ln(1+x)}{x\ln 2}<\frac{1}{1+x}.$$ □

6.

证明 由魏尔斯特拉斯优级数优级数判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{2^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，所以

$$\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{2^n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n+1}x}{2^n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{2^n(2n+1)!!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^n}{(2n+1)!}.$$

另一方面，

$$\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{2^n}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin x}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-2\arctan\cos x|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}.$$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\pi$. □

7.

答 作函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x(1+x), & -1\leqslant x<0\\ \varphi(x-2), & x>1\\ \varphi(x+2), & x<-1\end{cases},$$

那么

$$\varphi(x)=\begin{cases}1-2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+2x, & -1\leqslant x<0\\ \varphi(x-2), & x>1\\ \varphi(x+2), & x<-1\end{cases}.$$

不难看出 $|\varphi(x)|\leqslant 1/4$，$|\varphi'(x)|\leqslant 1$. 此外，当 x 是整数时 $\varphi(x)=0$，当 x 是偶数时 $\varphi'(x)=1$. 再作函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n!x)}{(n!)^2}.$$

对于 $x\in\mathbb{Q}$，当 n 足够大时 $n!x$ 是整数，从而存在 N_x 使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n!x)}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{N_x}\frac{\varphi(n!x)}{(n!)^2}\in\mathbb{Q}.$$

由魏尔斯特拉斯优级判别法知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi'(n!x)}{n!}$ 是一致收敛的，从而 $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi'(n!x)}{n!}$. 对于 $x\in\mathbb{Q}$，当 n 足够大时 $n!x$ 是偶数，于是存在 N_x 使得

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{N_x+1}\frac{\varphi'(n!x)}{n!}+\sum_{n=N_x+1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}+\sum_{n=0}^{N_x+1}\frac{\varphi'(n!x)-1}{n!}\notin\mathbb{Q}.$$

由此可见 $f(x)$ 就是所求的一个函数. □

15.4 由幂级数确定的函数

1.

解 (1) 收敛半径为

$$1\Big/\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=1\Big/\varlimsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

当 $x=\pm 1/\mathrm{e}$ 时，级数的通项不趋于零，从而级数发散.

(2) 收敛半径为

$$1\Big/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$$

当 $x=\pm 1$ 时，级数的通项不趋于零，从而级数发散.

(3) 收敛半径为

$$1\Big/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^2}{n^2}}=\frac{1}{\max\{a,b\}}=\min\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}.$$

当 $x=-\min\{1/a,1/b\}$ 时由莱布尼茨判别法知级数收敛. 当 $x=\min\{1/a,1/b\}=1/a$ 时，级数发散，当 $x=\min\{1/a,1/b\}=1/b$ 时，级数收敛.

(4) 收敛半径为

$$1\Big/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}=1\Big/\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n/\mathrm{e}=0.$$

当 $x=0$ 时级数显然收敛. □

2.

解 (1) 易见级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}t^n$ 的收敛点集是 $[-1,1)$，因此级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛点集是 $(0,+\infty)$.

(2) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}t^n$ 的收敛点集是 $(-\mathrm{e},\mathrm{e})$，因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛点集是 $(-1,+\infty)$.

(3) 不难算出级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t^n\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的收敛点集是 $(-2,2)$，因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的收敛点集就是 $(-\infty,-1/2)\cup(1/2,+\infty)$. □

3.

证明 (1) 这是因为显然当 $x<\min\{R_1,R_2\}$ 时级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 是收敛的.

(2) 这是因为根据柯西–阿达马公式,

$$R=1\Big/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\geqslant 1\Big/\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\;\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\right)=R_1R_2.$$

(3) 比如在 (1) 中取

$$a_n=2^n+3^n,\ b_n=2^n-3^n.$$

在 (2) 中取

$$a_n=\mathrm{e}^{-2^n-3^n},\ b_n=\mathrm{e}^{-2^n+3^n}.$$

□

4.

答 (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t^2)^n\,\mathrm{d}t=-\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=-\arctan x$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\int_0^t s^{n-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\int_0^t\frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$. □

5.

证明 (1) 只需注意到恒等式

$$
\begin{aligned}
n^3x^n=&\left(\frac{1}{1-x}n^3+\frac{3x}{(x-1)^2}n^2-\frac{3\,(x^2+x)}{(x-1)^3}n+\frac{x^3+4x^2+x}{(x-1)^4}\right)x^n\\
&-\left(\frac{1}{1-x}(n+1)^3+\frac{3x}{(x-1)^2}(n+1)^2-\frac{3\,(x^2+x)}{(x-1)^3}(n+1)+\frac{x^3+4x^2+x}{(x-1)^4}\right)x^{n+1}
\end{aligned}
$$

即可.

(2) 根据例 8 和例 7，我们有

$$
\frac{1}{(1-x)^4}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n. \qquad \square
$$

6.

证明 这是定理 14.3.5 和柯西–阿达马公式的直接推论. □

7.

证明 因为 $a_n\geqslant 0$，所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 或者收敛，或者发散到 $+\infty$. 假设它发散到 $+\infty$，那么存在 N 使得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}a_n>4A$. 于是当 $1>x>1/\sqrt[N]{2}$ 时

$$
\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\geqslant\sum_{n=0}^{N}a_nx^n\geqslant\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n>2A,
$$

这与 $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$ 矛盾! 因此 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛. 由阿贝尔第二定理可得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$. □

8.

证明 设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B,$$

而它们的柯西乘积 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = C$．那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径至少是 1．于是当 $x \in (-1,1)$ 时

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

根据阿贝尔第二定理，就有

$$C = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{x\to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = AB. \qquad \square$$

1.

证明 记 $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 1,$$

所以幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ 的收敛半径是 1．因为 $S_n x^n \geqslant a_n x^n$，所以由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \geqslant 1$．又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散，所以 $R = 1$． $\square$

2.

解 根据莱布尼茨判别法知这个级数是收敛的．因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{3n-1}}{3n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} t^{3n-2}\,\mathrm{d}r = \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1},$$

所以根据阿贝尔第二定理就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1} = \frac{\sqrt{3}\pi - 3\ln 2}{9}. \qquad \square$$

3.

证明 根据莱布尼茨判别法知这个级数是收敛的．因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-t)^{4n}\,\mathrm{d}r = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(2\arctan \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} + \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right),$$

所以根据阿贝尔第二定理就有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(2\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)=\frac{\pi+2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}}.\qquad\square$$

4.

证明 容易看出这个级数确实收敛．因为

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\arcsin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

所以根据阿贝尔第二定理，

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\frac{\arcsin t}{t}\,\mathrm{d}t\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\pi/2}t\,\mathrm{d}\ln\sin t=-\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln 2.\ \square$$

5.

证明 (1) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛，那么根据阿贝尔第二定理就有 $\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$．如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=+\infty$，那么对任意的 $M>0$，存在 $N>0$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{N}a_nR^n>2M$．于是当 $R>x>R/\sqrt[N]{2}$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\geqslant\sum_{n=0}^{N}a_nx^n\geqslant\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_nR^n>M,$$

因此 $\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=+\infty=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$．

(2) 这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)=+\infty.\qquad\square$$

15.5 函数的幂级数展开式

1.

答 (1) $\mathrm{e}^{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$．

(2) $\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$．

(3) $\dfrac{x^{12}}{1-x}=x^{12}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+12}$.

(4) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}=\dfrac{1}{3(1-x)}-\dfrac{1}{3(1+2x)}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n$.

(5) $(1+x)\mathrm{e}^{-x}=(1+x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(1-n)}{n!}x^n$. □

2.

答 (1) $(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

(2) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}$.

(3) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}=\dfrac{1}{2(1-x)^2}-\dfrac{1}{4(1-x)}-\dfrac{1}{4(1+x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1-(-1)^n}{4}x^n$.

(4) $(1+x^2)\arctan x=(1+x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n-1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$. □

3.

答 (1) $\arcsin x=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$.

(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$.

(3) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}$. □

4.

答 在

$$\ln\frac{1+y}{1-y}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

中取 $y=(x-1)/(x+1)$ 就得到

$$\ln x=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}.$$ □

5.

答 在

$$\frac{y}{\sqrt{1-y}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}y^{n+1}$$

中取 $y=x/(1+x)$ 就得到

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}. \qquad \square$$

1.

证明 对每个 $m\in\mathbb{N}^{+}$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\frac{\sin 2^n x}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{mn}\sin(2^n x+m\pi/2)}{n!}$$

都是一致收敛的，所以 $f(x)$ 可以逐项求导，从而

$$f^{(m)}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{mn}\sin(m\pi/2)}{n!}=\mathrm{e}^{2^m}\sin\frac{m\pi}{2}=\begin{cases}0, & m=2k\\ (-1)^{k-1}\mathrm{e}^{2^{2k-1}}, & m=2k-1\end{cases},$$

进而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{2^{2n-1}}}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

由

$$\frac{\mathrm{e}^{2^{2n+1}}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\Bigg/\frac{\mathrm{e}^{2^{2n-1}}}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\frac{\mathrm{e}^{3\times 2^{2n-1}}}{2n(2n+1)}x^2\to+\infty\ (n\to\infty)$$

可见当 $x\neq 0$ 时这个泰勒级数的通项是不趋于零的，当然不收敛. $\square$

2.

证明 根据带积分型余项的泰勒公式，我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

利用变量替换 $t=ux$ 我们有

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ux)(1-u)^n\,\mathrm{d}u.$$

因为每个 $f^{(n)}(x)$ 都是非负的，所以每个 $f^{(n)}(x)$ 都是递增的，从而

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ur)(1-u)^n \,\mathrm{d}u = (x/r)^{n+1}R_n(r).$$

又因为

$$R_n(r) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}r^k + R_n(r) = f(r),$$

所以当 $0 \leqslant x < r$ 时

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant (x/r)^{n+1}R_n(r) \leqslant (x/r)^{n+1}f(r) \to 0 \ (n \to \infty),$$

因此 f 在 $[0,r]$ 上可以展成泰勒级数. □

3.

证明 当 $|x|<1$ 时

$$x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}(t-1/t)}{(t-1/t)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right).$$

由狄利克雷判别法知所求的级数是收敛的，因此根据阿贝尔第二定理就有

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$ □

4.

证明 因为

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{k^3} - \cdots,$$

所以

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} - \cdots,$$

进而

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^4} - \cdots = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{n},$$

或者

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n} - \left(\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \cdots\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \frac{1}{n} \to \gamma \ (n\to\infty).$$

又易见

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \cdots \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \to 0\ (n\to\infty),$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n} = \gamma. \qquad \square$$

15.6 用多项式一致逼近连续函数

1.

证明 (1) 因为当 $i>0$ 时 $B_i^n(0)=0$，所以 $B_n(f;n)=f(0)$．因为当 $i<n$ 时 $B_i^n(1)=0$，所以 $B_n(f;n)=f(1)$．

(2) 这是因为当 $x\in[0,1]$ 时 $B_i^n(x)\geqslant 0$．

(3) 这是因为

$$B_n'(f;x) = n\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right)B_i^{n-1}(x).$$

(4) 这是因为

$$B_n''(f;x) = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\left(f\left(\frac{i+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{i+1}{n}\right) + f\left(\frac{i}{n}\right)\right)B_i^{n-2}(x). \qquad \square$$

2.

证明 (1) 因为 f 连续，所以存在在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的多项式列 $\{f_n(x)\}$，于是函数列 $\{f(x)f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^2(x)$，从而

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此 $f(x)\equiv 0$．

(2) 根据第 (1) 题知 $x^N f(x)\equiv 0$，因此 $f(x)\equiv 0$． $\square$

3.

证明 因为

$$0 = \int_0^1 f(x)x^{kn}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int_0^1 x^{1/k}f(x^{1/k})x^{n-1}\,\mathrm{d}x,$$

所以 $x^{1/k}f(x^{1/k})\equiv 0$，进而 $f(x)\equiv 0$． $\square$

4.

证明 (1) 因为

$$0=\int_{-1}^{1}x^{2n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}x^{2n+1}f(-x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$0=\int_{-1}^{1}x^{2n+1}(f(x)-f(-x))\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x(f(x)-f(-x))x^{2n}\,\mathrm{d}x,$$

由第3题知 $x(f(x)-f(-x))\equiv 0$，因此 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 类似地，由

$$0=\int_{-1}^{1}x^{2n}(f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}(f(x)+f(-x))x^{2n}\,\mathrm{d}x$$

知 $f(x)+f(-x)\equiv 0$，即 $f(x)$ 是奇函数. □

5.

证明 设 $\{f_n(x)\}$ 是一个在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的多项式列，那么存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时对所有的 x 都有

$$|f_n(x)-f_N(x)|\leqslant 1,$$

这意味着 $f_n(x)$ 与 $f_N(x)$ 只相差一个常数. 于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f_N(x)+\lim_{n\to\infty}f_n(0)-f_N(0)=f_N(x)-f_N(0)+f(0),$$

由此可见 $f(x)$ 是多项式. □

6.

证明 作函数

$$g(x)=\begin{cases}f(1/x), & 0<x\leqslant 1\\ l, & x=0\end{cases},$$

那么 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 由魏尔斯特拉斯逼近定理知对任意的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$ 使得对一切的 $x\in[0,1]$ 都有 $|g(x)-P(x)|<\varepsilon$，于是对 $x\geqslant 1$ 就有

$$\varepsilon>|g(1/x)-P(1/x)|=|f(x)-P(1/x)|.$$ □

1.

证明 (1) 这是因为

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x>\int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(2) 由

$$\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1+x}^{1+x} f(u)Q_n(u-x)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{1} f(u)Q_n(u-x)\,\mathrm{d}u$$

便可以看出 $P_n(x)$ 是一个多项式. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续, 而当 $x \notin (0,1)$ 时 $f(x)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 进而对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon/2$. 这样

$$\begin{aligned}|P_n(x)-f(x)| &\leqslant \left(\int_{-1}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{1}\right)|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant 4M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. 于是当 n 足够大时对一切的 x 都有 $|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 即 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

(3) 设 $g(x)=f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))$, 那么 $g(0)=g(1)=0$, 从而存在多项式列 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛于 $g(x)$, 于是 $\{P_n(x)+x(f(1)-f(0))+f(0)\}$ 就是一个一致收敛于 $f(x)$ 的多项式列. □

2.

证明 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_i\colon i/n<\xi_i<(i+1)/n$ 使得

$$B_n'(f;x)=n\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{i+1}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right)B_i^{n-1}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}f'(\xi_i)B_i^{n-1}(x),$$

所以

$$|B_n'(f;x)-f'(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\left|f'(\xi_i)-f'\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|B_i^{n-1}(x)+\left|\sum_{i=0}^{n-1}f'\left(\frac{i}{n-1}\right)B_i^{n-1}(x)-f'(x)\right|.$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 因为 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以一致连续, 进而当 n 足够大时对每个 i 都有 $|f'(\xi_i)-f'(i/(n-1))|<\varepsilon$. 又伯恩斯坦多项式 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f'\left(\dfrac{i}{n-1}\right)B_i^{n-1}(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$, 所以当 n 足够大时

$$|B_n'(f;x)-f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此 $\{B_n'(f;x)\}$ 一致收敛于 $f'(x)$. □

3.

证明 对每个 n，由魏尔斯特拉斯逼近定理知存在多项式 $P_n(x)$ 使得对一切的 $x\in[a,b]$ 都有

$$\left|P_n(x)-\left(f(x)-\frac{3}{2^{n+2}}\right)\right|<\frac{1}{2^{n+2}},$$

或者

$$f(x)-\frac{1}{2^n}<P_n(x)<f(x)-\frac{1}{2^{n+1}},$$

因此 $P_{n-1}(x)<f(x)-1/2^n<P_n(x)$. 这样就得到了一列递增地一致收敛于 $f(x)$ 的多项式 $\{P_n(x)\}$. □

15.7 幂级数在组合学中的应用

1.

证明 因为

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}x^k,$$

所以

$$\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^m=(1-x)^{-n-1}=(1-x)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}\right)x^m,$$

因此

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{m+n}{n}.$$ □

注意

这个等式叫做朱世杰恒等式.

2.

证明 这是因为

$$(1-4x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-4x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n. \tag{15.1}$$ □

3.

证明 这是因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n}x^n=\frac{1}{1-4x}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\right)x^n.$$ □

4.

证明 在(15.1)式两端求导，有

$$2(1-4x)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}n\binom{2n}{n}x^{n-1},$$

或者

$$2x(1-4x)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}n\binom{2n}{n}x^{n}.$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}n2^{2n-1}x^n=\frac{2x}{(1-4x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n\binom{2n}{n}x^n\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\right)x^n,$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=n2^{2n-1}.$$

□

5.

证明 因为

$$k\binom{n}{k}\binom{m}{k}=m\binom{n}{k}\binom{m-1}{k-1}=m\binom{n}{k}\binom{m-1}{m-k},$$

而根据 $(1+x)^n(1+x)^{m-1}=(1+x)^{n+m-1}$ 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m-1}{m-k}=\binom{n+m-1}{m}=\binom{n+m-1}{n-1},$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\binom{m}{k}=m\binom{n+m-1}{n-1}.$$

□

6.

证明 (1) 中学知识，略.

(2) 中学知识，略.

(3) 注意到递推式可以写成

$$\frac{a_n}{2^n}-1=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}-1-\frac{1}{4}\left(\frac{a_{n-2}}{2^{n-2}}-1\right),$$

接下来是容易的. □

1.

证明 因为

$$(1-4x)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-2n}\binom{2n}{n}x^n,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n=(1-4x)^{-1/2}=(1-4x)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(4x)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2n-2k}}{1-2k}\binom{2k}{k}\right)x^n,$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1-2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}=\binom{2n}{n}.$$

□

2.

证明 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2k}^{\infty}\binom{n-k}{k}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k-1}{n}(-x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(1-x)^{k+1}}=\frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^k=\frac{1}{1-x-x^2},$$

于是此题归结为原书260页例3. □

3.

证明 与第2题类似地交换求和次序，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}\alpha^k x^n=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha x^2)^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha x^2)^k}{(1-x)^{k+1}}=\frac{1}{1-x-\alpha x^2}.$$

令

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2\alpha},\ r_2=\frac{-1-\sqrt{1+4\alpha}}{2\alpha},$$

那么

$$\frac{1}{1-x-\alpha x^2}=\frac{1}{\alpha(r_2-r_1)}\left(\frac{1}{x-r_1}-\frac{1}{x-r_2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha(r_2-r_1)}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right)\right)x^n,$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}\alpha^k=\frac{1}{\alpha(r_2-r_1)}\left(\frac{1}{r_2^{n+1}}-\frac{1}{r_1^{n+1}}\right).\tag{15.2}$$

□

4.

证明 在(15.2)式中分别取 α 为 2 和 -1 即可. □

5.

证明 因为

$$\frac{(1+x)^n}{1-x}=(1+x)^n\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{m}\right)x^m,$$

其中规定当 $m>n$ 时 $\binom{n}{m}=0$，所以

$$\frac{(1+x)^{2n}}{(1-x)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left(\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\cdots+\binom{m}{k}\right)\left(\binom{m}{k+1}+\binom{m}{k+2}+\cdots+\binom{m}{m}\right)\right)x^{m-1}.$$

又

$$\frac{(1+x)^{2n}}{(1-x)^2}=(1+x)^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m-1}\binom{2m}{l}(m-l)\right)x^{m-1},$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\right)\left(\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\cdots+\binom{n}{n}\right)=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}(n-l).$$

事实上

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}(n-l)&=n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}-\sum_{l=0}^{n-1}l\binom{2n}{l}=n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n}{l}-2n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n-1}{l-1}\\&=\frac{n}{2}\left(2^{2n}-\binom{2n}{n}\right)-n\left(2^{2n-1}-\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n}\right)=\frac{n}{2}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$ □

15.8 从两个著名的例子谈起

证明 任取 $(a,b,c)\in[0,1]^3$，把 a,b,c 用二进制小数表示为

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\ b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n},\ c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n}.$$

作数列 $\{\eta_n\}$，使得

$$\eta_{3n-2}=a_n,\ \eta_{3n-1}=b_n,\ \eta_{3n}=c_n.$$

取 $t_0=\sum_{n=1}^{\infty}2\eta_n/3^n$，那么仍有 $\varphi(3^kt_0)=\eta_{k+1}$. 由此可见

$$x(t_0)=a,\ y(t_0)=b,\ z(t_0)=c,$$

这意味着这条空间曲线经过 $[0,1]^3$ 中的每一点. □

第十六章　反常积分

16.1　非负函数无穷积分的收敛判别法

1.

答　(1) 发散，因为当 $x \to +\infty$ 时 $x/(1+x^2) \sim 1/x$.

(2) 收敛，因为当 $x \to +\infty$ 时 $(3x^3-2)/(x^5-x^3+1) \sim 3/x^2$.

(3) 收敛，因为当 $x \to +\infty$ 时 $1/(x\sqrt{x^2+1}) \sim 1/x^2$.

(4) 因为

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x} = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^p x} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

所以该无穷积分当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leqslant 1$ 时发散.

(5) 收敛，因为当 $x \to +\infty$ 时 $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x} = o(\mathrm{e}^{-x/2})$.

(6) 收敛，因为当 $x \to +\infty$ 是 $\ln^p x/(1+x^2) = o(x^{-3/2})$. □

2.

证明　利用柯西收敛准则和积分中值定理，我们有

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} f(\xi_x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$ □

3.

证明　因为被积函数是正的，所以只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^\alpha \cos^2 x}$$

收敛．事实上

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^\alpha\cos^2 x} \leqslant (n+1)\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^\alpha\cos^2 x} = 2(n+1)\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^\alpha\cos^2 x}$$

$$\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+n^\alpha\cos^2 x}=\frac{2(n+1)\pi}{n^{\alpha/2}}\int_0^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(n^{\alpha/2}\cot x)}{1+n^\alpha\cot^2 x}$$
$$=\frac{2(n+1)\pi}{n^{\alpha/2}}\int_{+\infty}^0\frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{(n+1)\pi^2}{n^{\alpha/2}}<\frac{2\pi^2}{n^{\alpha/2-1}}.\qquad\square$$

4.

证明 根据海涅归结原理，无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 I 的充要条件是对任意递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}\,(A_1=a)$ 成立

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_a^{A_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x)\,\mathrm{d}x.\qquad\square$$

16.2 无穷积分的狄利克雷和阿贝尔收敛判别法

1.

答 (1) 因为 $\int_0^A\cos x\,\mathrm{d}x$ 有界，$\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ 当 $x>1$ 时递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知该积分收敛.

(2) 因为 $\int_0^A\sin(a+2)x\,\mathrm{d}x$ 有界，$\dfrac{1}{1+x^\alpha}$ 递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知该积分收敛.

(3) 发散，因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

由狄利克雷判别法知其中的 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 发散.

(4) 因为 $\int_0^A(\lfloor t\rfloor-t+1/2)\,\mathrm{d}t$ 有界，而 $\dfrac{1}{t+x}$ 递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知该积分收敛.

(5) 发散，因为

$$\int_0^\infty\frac{\lfloor t\rfloor-t+a}{t+x}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{\lfloor t\rfloor-t+1/2}{t+x}\,\mathrm{d}t+\int_0^\infty\frac{a-1/2}{t+x}\,\mathrm{d}t.\qquad\square$$

2.

证明 (1) 由狄利克雷判别法知该积分收敛. 因为

$$\left|\frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x}\right|\geqslant\frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{1+x}=\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}-\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(1+x)},$$

由狄利克雷判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，但是 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 发散，所以原积分条件收敛.

(2) 因为

$$\left|\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{1}{x^{13/6}}\ (x\to+\infty),$$

所以原积分绝对收敛.

(3) 由狄利克雷判别法知该积分收敛. 因为

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}} - \frac{\cos 2x}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}},$$

由狄利克雷判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，但是 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 发散，所以原积分条件收敛.

(4) 由狄利克雷判别法知该积分收敛. 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x\ln x} = \frac{1}{2x\ln x} - \frac{\cos 2x}{2x\ln x},$$

由狄利克雷判别法知 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，但是 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ 发散，所以原积分条件收敛. □

3.

证明 这是因为

$$0 = \lim_{A\to+\infty}\int_{A/2}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \lim_{A\to+\infty}\int_{A/2}^{A} f(A)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}Af(A) \geqslant 0. \quad \square$$

4.

证明 因为

$$f(x)\sin^2 x = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x)\cos 2x,$$

而由狄利克雷判别法知 $\int_a^{+\infty} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 的收敛性相同. □

5.

证明 设 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，那么根据积分第一中值定理知存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= F(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}t = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \quad \square$$

6.

证明 当 $n-m>1$ 时，因为

$$\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right| \leqslant \left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right| = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)\ (x\to+\infty),$$

所以原积分绝对收敛.

当 $0<n-m\leqslant 1$ 时，因为 $\int_a^A \sin x\,\mathrm{d}x$ 有界，当 x 足够大时 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知原积分收敛. 由于

$$\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right| \geqslant \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)}\sin^2 x = \frac{|P_m(x)|}{2P_n(x)} - \frac{|P_m(x)|}{2P_n(x)}\cos 2x,$$

由狄利克雷判别法知 $\int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)}\cos 2x\,\mathrm{d}x$ 收敛，但是 $\int_a^{+\infty} \frac{|P_m(x)|}{P_n(x)}\,\mathrm{d}x$ 发散，所以原积分条件收敛.

当 $n-m\leqslant 0$ 时，存在 $m-n$ 次多项式 $P_{m-n}(x)$ 和次数不超过 $n-1$ 的多项式 $P_k(x)$ 使得

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_k(x)}{P_n(x)}.$$

因为 $\int_a^{+\infty} \frac{P_k(x)}{P_n(x)}\sin x\,\mathrm{d}x$ 收敛但是 $\int_a^{+\infty} P_{m-n}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ 发散，所以原积分发散. □

7.

证明 根据牛顿–莱布尼茨公式有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) + \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

这说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 根据练习题 16.1 的第 2 题知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

1.

证明 注意到

$$\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}.$$

由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的. 因为

$$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+1)} = \frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)},$$

由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}$ 发散，所以由比较判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\,\mathrm{d}x$ 发散．因此原积分也发散． □

2.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$ 使得当 $x\geqslant A$ 时 $a-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，于是由

$$t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x = t\left(\int_0^A+\int_A^{+\infty}\right)\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x = t\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{At}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f\left(\frac{x}{t}\right)\mathrm{d}x$$

知

$$a-\varepsilon\leqslant \varliminf_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant \varlimsup_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant a+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\displaystyle\lim_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x=a$． □

16.3 瑕积分的收敛判别法

1.

答 (1) 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x,$$

而 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x$ 当 $\alpha>-1$ 收敛，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x$ 当 $\beta-\alpha>1$ 时收敛，所以原积分当 $-1<\alpha<\beta-1$ 时收敛．

(2) 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

而 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 当 $\alpha<2$ 时收敛，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 当 $\alpha>1$ 时收敛，所以原积分当 $1<\alpha<2$ 时收敛．

(3) 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q},$$

所以易见当 $\min\{p,q\}<1<\max\{p,q\}$ 是原积分收敛．

(4) 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\bigg/\sqrt{x}=0,$$

所以原积分收敛.

(5) 因为

$$\lim_{x\to0^+}\left|\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right|\Big/\frac{1}{x^{3/4}}=\lim_{x\to0^+}x^{1/4}|\ln\sin x|=0,$$

所以原积分绝对收敛，从而收敛.

(6) 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}=\left(\int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1+\int_1^2+\int_2^{+\infty}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x},$$

其中的 $\displaystyle\int_{1/2}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 和 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 当 $q<1$ 时收敛, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$ 当 $p>1$ 时收敛, $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(-1)^q x^{2-p}\ln^q x}$ 当 $p<1$ 时收敛. 因此原积分发散.

(7) 因为

$$\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{1-1/\alpha}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int_0^1\frac{\sin x}{t^{1-1/\alpha}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{t^{1-1/\alpha}}\,\mathrm{d}x,$$

而由比较判别法知 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{t^{1-1/\alpha}}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{t^{1-1/\alpha}}\,\mathrm{d}x$ 收敛，因此原积分收敛. □

2.

答　(1) 因为

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\,\mathrm{d}x=\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}x^{(p+1)/q-1}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{q}\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)x^{(p+1)/q-1}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

而 $\displaystyle\int_0^1 x^{(p+1)/q-1}\sin x\,\mathrm{d}x$ 当 $(p+1)/q-1>-2$ 时收敛, $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{(p+1)/q-1}\sin x\,\mathrm{d}x$ 当 $(p+1)/q-1<0$ 时收敛，所以原积分当 $-1<(p+1)/q<1$ 时收敛.

由比较判别法知原积分当 $-1<(p+1)/q<0$ 时绝对收敛.

当 $0\leqslant(p+1)/q<1$ 时，因为

$$|x^{(p+1)/q-1}\sin x|\geqslant x^{(p+1)/q-1}\sin^2 x=\frac{1}{2}x^{(p+1)/q-1}-\frac{1}{2}x^{(p+1)/q-1}\cos 2x,$$

由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{(p+1)/q-1}\cos 2x\,\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{(p+1)/q-1}\,\mathrm{d}x$ 发散，从而原积分条件收敛.

(2) 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x,$$

而 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 当 $p>-2$ 时收敛,$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 当 $p<q$ 时收敛,所以原积分当 $-2<p<q$ 时收敛.

由比较判别法知原积分当 $-2<p<q-1$ 时收敛.

当 $p>-2$ 且 $q-1\leqslant p<q$ 时，因为

$$\left|\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right| \geqslant \frac{x^p\sin^2 x}{1+x^q} = \frac{x^p\sin x}{2(1+x^q)} - \frac{x^p\cos 2x}{2(1+x^q)},$$

由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^p\cos 2x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ 发散，从而原积分条件收敛. □

1.

证明 把积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

当 $\alpha\leqslant 0$ 时 I_1 是正常积分，而由

$$\begin{aligned}\int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi-1} \frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi-1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi-1} \frac{\sin x}{(2k\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-\sin 1}{(2k\pi)^\alpha} \geqslant (1-\sin 1)\end{aligned}$$

知 I_2 发散，从而原积分发散.

当 $0<\alpha<2$ 时，注意到

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{(1-1/x^2)\sin(x+1/x)\,\mathrm{d}x}{x^\alpha(1-1/x^2)},$$

因为

$$\int_1^A \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^A \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right) = \int_2^{A+1/A} \sin x\,\mathrm{d}x$$

是有界的，而 $1/(x^\alpha(1-1/x^2))$ 递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知 I_2 收敛. 由于

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x,$$

所以 I_1 也是收敛的. 因此原积分收敛.

当 $\alpha\geqslant 2$ 时，从

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$$

知原积分发散.

因此原积分仅当 $0<\alpha<2$ 时收敛. 此外，由

$$\left|\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\right| \geqslant \frac{\sin^2(x+1/x)}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2(x+1/x)}{2x^\alpha}$$

知原积分是条件收敛的. □

2.

证明 不妨设 $f(x)$ 是递增的，那么

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_0^{1-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

3.

答 不成立. □

4.

证明 这是因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} = \int_0^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$ □

5.

证明 考虑到

$$\int_B^A (f(x+\eta)-f(x))\,\mathrm{d}x = \eta(a-b) + \int_A^{A+\eta} (f(x)-a)\,\mathrm{d}x - \int_B^{B+\eta} (f(x)-b)\,\mathrm{d}x,$$

于是对任意的 $\varepsilon>0$，可以选取足够大的 A 和足够小的 B 使得在 $[A,A+\eta]$ 和 $[B,B+\eta]$ 上分别成立 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 和 $|f(x)-b|<\varepsilon$，于是

$$\left|\int_B^A (f(x+\eta)-f(x))\,\mathrm{d}x - \eta(a-b)\right| < 2\eta\varepsilon.$$

上式当 A 更大或 B 更小时当然也成立，因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\eta)-f(x))\,\mathrm{d}x=\eta(a-b).\qquad\square$$

6.

证明 (1) 使用积分第一中值定理，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{b\Delta}^{a\Delta}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(\Xi)\int_{b\Delta}^{a\Delta}\frac{\mathrm{d}x}{x}-f(\xi)\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=(f(\Xi)-f(\xi))\ln\frac{a}{b},\end{aligned}$$

其中 Ξ 介于 $a\Delta$ 和 $b\Delta$ 之间而 ξ 介于 $a\delta$ 和 $b\delta$ 之间，因此

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=(f(+\infty)-f(0))\ln\frac{a}{b}=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 这是因为

$$\lim_{\Delta\to+\infty}\int_{b\Delta}^{a\Delta}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

(3) 这是因为

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{b\delta}^{a\delta}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=0.\qquad\square$$

注意

这是傅汝兰尼[a]积分，应当作为结论熟记.

[a] Giuliano Frullani (Livorno, 23 febbraio 1795 –Firenze, 25 maggio 1834) è stato un matematico e ingegnere italiano.——《维基百科》

7.

答 不难直接写出 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}$ 和 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}$. $\square$

16.4 反常重积分

1.

证明 (1) 因为

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=4\iint_{\mathbb{R}_+^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^p)(1+y^q)}=4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^q},$$

所以仅当 $p>1$ 且 $q>1$ 时原积分收敛.

(2) 因为

$$\frac{1}{(2+x^2)^p}\leqslant\frac{1}{(1+x^2+y^2)}\leqslant\frac{1}{(1+x^2)^p},$$

所以原积分仅当 $p>1/2$ 时收敛.

(3) 作变量替换

$$\begin{cases}x=r^{2/\alpha}\cos^{2/\alpha}\theta\\ y=r^{2/\beta}\sin^{2/\beta}\theta\end{cases},$$

那么其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\frac{4r^{2/\alpha+2/\beta-1}\cos^{2/\alpha-1}\theta\sin^{2/\beta-1}\theta}{\alpha\beta},$$

于是

$$\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^\alpha+y^\beta)^m}=\frac{4}{\alpha\beta}\int_0^{\pi/2}\cos^{2/\alpha-1}\theta\sin^{2/\beta-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{1+2m-2/\alpha-2/\beta}}.$$

因此原积分仅当 $m>1/\alpha+1/\beta$ 时收敛.

(4) 取 $\Delta=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\geqslant 1\}\subset D$，那么原积分的敛散性与 $\displaystyle\iint_\Delta\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}$ 相同. 在 Δ 上有

$$\frac{1}{(1+y)^p}\leqslant\frac{1}{(x+y)^p}\leqslant\frac{1}{y^p},$$

因此原积分仅当 $p>1$ 时收敛.

(5) 使用极坐标变换得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\,\mathrm{d}r}{(1-r^2)^p}=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^p},$$

因此原积分仅当 $p<1$ 时收敛.

(6) 作变量替换

$$\begin{cases}x=r^{2/\alpha}\cos^{2/\alpha}\theta\\ y=r^{2/\beta}\sin^{2/\beta}\theta\end{cases},$$

那么其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\frac{4r^{2/\alpha+2/\beta-1}\cos^{2/\alpha-1}\theta\sin^{2/\beta-1}\theta}{\alpha\beta},$$

于是

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^\alpha-y^\beta)^p}=\frac{4}{\alpha\beta}\int_0^{\pi/2}\cos^{2/\alpha-1}\theta\sin^{2/\beta-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^{2/\alpha+2/\beta-1}\mathrm{d}r}{(1+r)^p(1-r)^p},$$

因此原积分仅当 $p<1$ 时收敛.

(7) 不难算出

$$\int_\varepsilon^1\mathrm{d}x\int_\delta^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y=\frac{\delta(\varepsilon-1)}{(\delta+1)(\delta+\varepsilon)}+\frac{1}{\varepsilon+1}-\frac{1}{2}.$$

如果先令 $\varepsilon\to0$ 再令 $\delta\to0$，那么上式变为 $-1/2$；如果先令 $\delta\to0$ 再令 $\varepsilon\to0$，那么上式变为 $1/2$. 因此原积分发散.

(8) 收敛???????????? □

2.

证明　(1) 由对称性知

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

利用菲涅尔积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\int_0^{+\infty}(\cos y^2+\sin y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(2) 这是因为

$$\iint_{D_R}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\sin r^2\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^{R^2}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}(1-\cos R^2).$$ □

3.

答　(1) $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^3}=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x+y)^3}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{2(1+y)^2}=\frac{1}{2}.$

(2) $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^y)}{\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y=2\ln2.$

(3) $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^p}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{p-1}=\frac{1}{p-1}.$

(4) $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{1/x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\frac{x^{q-p-1}}{p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p-q)(p-1)}.$

(5) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi$.

(6) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

(7) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\cos r^2\,\mathrm{d}r = \pi \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r}\cos r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} =$ $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(8) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$. □

第十七章　傅里叶分析

17.1　周期函数的傅里叶级数

1.

证明　这是因为

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \alpha_k,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \beta_k. \qquad \square$$

2.

证明　(1) 这是因为

$$\begin{aligned}
a_{2n-1} &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\cos(2n-1)(x+\pi)\,\mathrm{d}x = 0, \\
b_{2n-1} &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) f(x)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\sin(2n-1)(x+\pi)\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

(2) 这是因为

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\cos 2n(x+\pi)\,\mathrm{d}x = 0, \\
b_{2n} &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\sin 2n(x+\pi)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

3.

证明 这是因为

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n(x-h)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nh\cos nx + \sin nh\sin nx)\,\mathrm{d}x = a_n\cos nh + b_n\sin nh, \\ \tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n(x-h)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nh\sin nx - \sin nh\cos nx)\,\mathrm{d}x = b_n\cos nh - a_n\sin nh.\end{aligned}$$

□

4.

证明 由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于一个周期为 2π 的函数 $S(x)$. 通过逐项积分知 $S(x)$ 的傅里叶系数就是 a_n 和 b_n，因此 $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ 就是 $S(x)$ 的傅里叶级数. □

5.

解 利用黎曼–勒贝格引理,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 \ln x\cos^2\lambda x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 \ln x\cos 2\lambda x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}.$$

□

6.

证明 根据黎曼–勒贝格引理有

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty} nb_n,$$

所以 $b_n = o(1/n)$. 同样地也有 $a_n = o(1/n)$. □

1.

证明 (1) 这是因为

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-2)\pi/n}^{2k\pi/n} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-2)\pi/n}^{(2k-1)\pi/n}\left(f(x)\sin nx + f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin n\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-2)\pi/n}^{(2k-1)\pi/n}\left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin x\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

(2) 这是因为 $-f$ 在 $(0, 2\pi)$ 上递减. □

2.

证明　因为 f 黎曼可积，所以有界，设 $f(x) \leqslant M$. 根据积分第二中值定理，

$$\begin{aligned}|na_n| &= \left|\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right| = \frac{n}{\pi}\left|f(-\pi+0)\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx\,\mathrm{d}x + f(\pi-0)\int_{\xi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{|f(\pi-0) - f(-\pi+0)||\sin n\xi|}{\pi} \leqslant \frac{2M}{\pi},\end{aligned}$$

所以 $a_n = O(1/n)$. 同样地也有 $b_n = O(1/n)$. □

3.

证明　设自然数 p 使得 $[a, b] \subset [-2p\pi, 2p\pi]$. 作函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ 0, & x \in [-2p\pi, 2p\pi] \setminus [a, b] \end{cases},$$

那么

$$\int_{-2p\pi}^{2p\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-2p\pi}^{2p\pi} F(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x.$$

把 $[-2p\pi, 2p\pi]$ 等分成 $2pn$ 个小区间，区间的端点为

$$x_i = -2p\pi + \frac{2\pi i}{n},\ i = 0, 1, \ldots, 2pn.$$

根据积分第一中值定理，

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \mu_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_i}{n}\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{4\mu_i}{n},$$

其中

$$\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} F(x) \leqslant \mu_i \leqslant \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} F(x).$$

因为 F 是可积的，所以

$$\int_{-2p\pi}^{2p\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{2pn}\mu_i.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_{-2p\pi}^{2p\pi} F(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2pn}\int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2pn}\frac{4\mu_i}{n} = \frac{2}{\pi}\int_{-2p\pi}^{2p\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同样地也有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\cos nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

4.

证明 由绝对可积性知对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$ 使得

$$\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{+\infty}\right)|f(x)||\sin nx|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{+\infty}\right)|f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-A}^{A} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时成立

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

因此当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{-A}^{+A} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{-A}^{+A} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &+\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{+\infty}\right)|f(x)||\sin nx|\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{+\infty}\right)|f(x)|\,\mathrm{d}x < \left(2+\frac{2}{\pi}\right)\varepsilon,\end{aligned}$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同样地也有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|\cos nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

5.

证明 利用黎曼–勒贝格引理，

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a \frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^a\frac{f(x)-f(x)}{x}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ □

17.2 傅里叶级数的收敛定理

注意

我们应当牢记下面几个不定积分：

$$\int x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{\cos nx+nx\sin nx}{n^2}+C=\frac{1}{n^2}\begin{vmatrix}(x)' & (\cos nx)'\\ x & \cos nx\end{vmatrix}+C,$$

$$\int x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin nx-nx\cos nx}{n^2}+C=\frac{1}{n^2}\begin{vmatrix}(x)' & (\sin nx)'\\ x & \sin nx\end{vmatrix}+C,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos nx+n\sin nx)}{a^2+n^2}+C=\frac{1}{a^2+n^2}\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{ax})' & (\cos nx)'\\ \mathrm{e}^{ax} & \cos nx\end{vmatrix}+C,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C=\frac{1}{a^2+n^2}\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{ax})' & (\sin nx)'\\ \mathrm{e}^{ax} & \sin nx\end{vmatrix}+C.$$

1.

解 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $a_n=0$. 而

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n},$$

所以

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

由收敛定理知当 $0<x<\pi$ 时

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\operatorname{sgn}x=1,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

在上式中取 $x=\pi/2$ 得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$. □

2.

解 (1) 因为 $|x|$ 是偶函数，所以 $b_n=0$. 而 $a_0=\pi$，当 $n\geqslant 1$ 时

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\cos nx+nx\sin nx}{n^2}\right|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2},$$

所以

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx,\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

(2) 因为 $\sin ax$ 是奇函数，所以 $a_n = 0$. 而

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin ax\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x - \cos(a+n)x)\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n n\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)},$$

所以

$$\sin ax \sim \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin nx,\ -\pi < x < \pi.$$

(3) 因为 $x\sin x$ 是偶函数，所以 $b_n = 0$. 而 $a_0 = 2$，$a_1 = -1/2$，当 $n \geqslant$ 时

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(n+1)x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(n-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1},$$

所以

$$x\sin x \sim 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx,\ -\pi < x < \pi.$$ □

3.

解 在 $[0,1]$ 上

$$x - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

于是

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

而

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi},$$

所以

$$x - \lfloor x \rfloor \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n},\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$ □

4.

解 (1) 因为 x 是奇函数，所以 $a_n=0$. 而

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\left.\frac{l\sin(n\pi x/l)-n\pi x\cos(n\pi x/l)}{n^2\pi^2}\right|_{-l}^{l}=\frac{2l(-1)^{n-1}}{n\pi},$$

所以

$$x\sim\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l},\ -l<x<l.$$

(2) 利用第 2 题的 (1)，可得

$$|x|\sim\frac{l}{2}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l},\ -l<x<l,$$

因此

$$x+|x|\sim\frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{2l}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l},\ -l<x<l.$$ □

5.

证明 (1) 取 $x=\pi$ 后再用 x/π 代替 a 即可.
(2) 取 $x=0$ 后再用 x/π 代替 a 即可. □

6.

证明 我们来将 $|\cos x|$ 展成周期为 π 的傅里叶级数. 因为 $|\cos x|$ 是偶函数，所以 $b_n=0$. 不难算出 $a_0=4/\pi$，当 $n\geqslant 1$ 时

$$a_n=\frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos x|\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x)\,\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)},$$

所以

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

再用 $x+\pi/2$ 代替 x 就得到

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$ □

7.

证明 在 $(0,2\pi)$ 上把 e^{ax} 展成傅里叶级数. 因为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left.\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos nx+n\sin nx)}{n^2+a^2}\right|_0^{2\pi}=\frac{a(\mathrm{e}^{2a\pi}-1)}{\pi(n^2+a^2)},$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left.\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{n^2+a^2}\right|_0^{2\pi}=-\frac{n(\mathrm{e}^{2a\pi}-1)}{\pi(n^2+a^2)},$$

所以

$$\mathrm{e}^{ax}=\frac{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{n^2+a^2}\right).$$ □

注意

利用这个等式, 我们可以求出级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$ 的和.

1.

证明 (1) 把 $\ln(2\cos(x/2))$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展成傅里叶级数. 因为这是一个偶函数, 所以 $b_n=0$. 又

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\pi\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right)=2\ln 2-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=0,$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\sin nx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x+\sin(n-1/2)x}{2\sin(x/2)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx+\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx\right)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

所以

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos nx,\ -\pi<x<\pi.$$

(2) 在 (1) 中用 $x+\pi$ 代替 x 即得. □

注意

这是两个值得记忆的等式.

2.

证明 由魏尔斯特拉斯优级数判别法知

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2\lambda nx \rightrightarrows |\cos\lambda x|,\ x\in(-\infty,+\infty)\ (n\to\infty).$$

因为 f 黎曼可积，从而有界，进而也有

$$\frac{2}{\pi}f(x)+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}f(x)\cos 2\lambda nx \rightrightarrows f(x)|\cos\lambda x|,\ x\in(-\infty,+\infty)\ (n\to\infty),$$

所以可以逐项积分，即有

$$\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\int_a^b f(x)\cos 2\lambda nx\,\mathrm{d}x.$$

同样由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\int_a^b f(x)\cos 2\lambda nx\,\mathrm{d}x$ 关于 λ 是一致收敛的，从而可以逐项求极限．再使用黎曼–勒贝格引理就得到

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x&=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos 2\lambda nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

类似地也有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin\lambda x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

3.

证明 把积分写成

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=g(0+0)\int_0^h\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^h(g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,h)$ 使得当 $0<t\leqslant\delta$ 时成立

$$0\leqslant g(t)-g(0+0)<\varepsilon.$$

由于 $g(t)-g(0+0)$ 非负递增，所以由积分第二中值定理知存在 $\eta\in[0,\delta]$ 使得

$$\left|\int_0^\delta(g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|=\left|(g(\delta)-g(0+0))\int_\eta^\delta\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right|=\left|(g(\delta)-g(0+0))\int_{\lambda\eta}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|.$$

因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以存在 $M>0$ 使得 $\displaystyle\left|\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M$. 这样就有

$$\left|\int_0^\delta (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |g(\delta)-g(0+0)|\left(\left|\int_0^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^{\lambda\eta}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\right) < 2M\varepsilon.$$

另一方面，根据黎曼–勒贝格引理有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\delta^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=0,$$

所以

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\left|\int_0^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2M\varepsilon.$$

由 ε 的任意知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h (g(t)-g(0+0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=0,$$

因此

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=g(0+0)\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=g(0+0)\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda h}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}g(0+0). \ \square$$

17.3 傅里叶级数的切萨罗求和

1.

解 (1) 其部分和序列为 $1,1,0,1,1,0,\dots$，因此切萨罗和为 $2/3$.

(2) 其部分和 $S_n=\dfrac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$，部分和的算术平均数为 $\sigma_n=\dfrac{\sin^2(nx/2)}{2n\sin^2(x/2)}$，因此切萨罗和就是 0.

(3) 其部分和 $S_n=\dfrac{\cos(x/2)-\cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$，部分和的算术平均数是

$$\sigma_n=\frac{(n+1)\sin x-\sin(n+1)x}{4n\sin^2(x/2)},$$

因此切萨罗和就是 $\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2}$. □

2.

证明 把 $[0,\pi]$ 上的连续函数 f 偶延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数，再延拓成 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，仍用 f 表示. 那么 f 的傅里叶级数是余弦级数，其部分和的算数平均数也是余弦级数，由费耶尔定理知 f 的傅里叶级数的部分和的算数平均数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f，在 $[0,\pi]$ 上当然也一致收敛于 f. □

3.

证明 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sigma_n-2(n-1)\sigma_{n-1}+(n-2)\sigma_{n-2}}{n}=0. \qquad \square$$

4.

证明 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，那么 $g(x)=f(a+t(b-a)/\pi)$ 是闭区间 $[0,\pi]$ 上的连续函数. 再把 $g(x)$ 偶延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上连续函数，那么 $g(-\pi)=g(\pi)$. 根据魏尔斯特拉斯三角多项式逼近定理，对任意的 $\varepsilon>0$，存在三角多项式 $T(x)$ 使得对一切的 $x\in[-\pi,\pi]$ 都有 $|g(x)-T(x)|<\varepsilon/2$. 因为 $T(x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数是一致收敛于 $T(x)$ 的，所以存在多项式 $P(x)$ 使得对一切的 $x\in[-\pi,\pi]$ 都有 $|T(x)-P(x)|<\varepsilon/2$. 于是

$$|g(x)-P(x)|\leqslant|g(x)-T(x)|+|T(x)-P(x)|<\varepsilon,\ x\in[-\pi,\pi],$$

也有

$$\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)\right|<\varepsilon,\ x\in[a,b].$$

因此连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以用多项式一直逼近. $\square$

1.

证明 (1) 这是阿贝尔第二定理的直接推论.

(2) 这是因为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}$. $\square$

2.

证明 因为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 可以切萨罗求和，所以 $a_n=o(n)$，从而存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $|a_n|\leqslant n$，于是 $|a_nx^n|\leqslant n|x|^n$. 由比较判别法知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上绝对收敛. 记

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ S_n=\sum_{n=0}^{n}a_n,\ \sigma_{n+1}=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1},$$

那么由级数的乘法知道

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n,\ \frac{f(x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n,$$

所以

$$f(x)=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n,\ -1<x<1.$$

因为

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ -1<x<1,$$

所以

$$s=(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)sx^n,$$

进而

$$f(x)-s=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-s)x^n,\ -1<x<1.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=s$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时有 $|\sigma_n-s|<\varepsilon/2$．现在取

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\Big/\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)|\sigma_{n+1}-s|}\right\},$$

那么当 $1-\delta<x<1$ 时就有

$$\left|(1-x)^2\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)(\sigma_{n+1}-s)x^n\right|\leqslant\delta^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\sigma_{n+1}-s|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，当 $1-\delta<x<1$ 时还有

$$\left|(1-x)^2\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-s)x^n\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\left|(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right|=\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当 $1-\delta<x<1$ 时有

$$|f(x)-s|=\left|(1-x)^2\left(\sum_{n=0}^{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}\right)(n+1)(\sigma_{n+1}-s)x^n\right|<\varepsilon,$$

这意味着

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\lim_{x\to1^-}f(x)=s,$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=s\ (\mathrm{A})$． □

3.

证明　阿贝尔和可由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 算出. 因为 $(-1)^n(n+1)\neq o(n)$，所以不能进行切萨罗求和. □

4.

证明　记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\ln k,\ \sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k,$$

那么容易算出

$$S_{2n+1}=\ln\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\ S_{2n}=\ln\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

于是根据斯托尔兹公式和沃利斯公式可得

$$\begin{aligned}\sigma_{2n+1}&=\frac{1}{2n+1}\left(S_1+\sum_{k=1}^{n}(S_{2n+1}+S_{2n})\right)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}\right)\\&\to\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

易见 $|S_n|\leqslant\ln n$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\sigma_{2n+1}-S_{2n+1}}{2n}=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln n=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\pi}{2}$ (C). □

5.

证明　这是因为

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=AB.$$ □

17.4　平方均方逼近

1.

答　在练习题 17.2 的第 2 题中已经求出

$$|x|\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi,$$

于是由帕塞瓦尔等式可得

$$\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

进而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. □

2.

答　在 $(-\pi,\pi)$ 上，$f(x)$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi},\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi},\\
b_n&=0,\ n\geqslant 1,
\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的帕塞瓦尔等式为

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin^2 n\alpha}{n^2\pi^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

由此可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{1}{2}\alpha(\pi-\alpha),$$

进一步可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\alpha(\pi-\alpha).$$ □

3.

答　通过逐项积分可得

$$\begin{aligned}
x^2&=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1-\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,\\
x^3&=\pi^2x-12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2\pi^2n^2-12)}{n^3}\sin nx,\\
x^4&=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2\pi^2n^2-12)}{n^4}(1-\cos nx)=\frac{\pi^4}{5}-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\pi^2n^2-6)}{n^4}\cos nx,
\end{aligned}$$

再利用帕塞瓦尔等式可得

$$\frac{2\pi^6}{7}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^6\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi^2n^2-12)^2}{n^6}=144\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}-48\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+4\pi^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

$$\frac{2\pi^8}{9}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^8\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^8}{25}+64\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi^2n^2-6)^2}{n^8}=\frac{2\pi^8}{25}+2304\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}-768\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+64\pi^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}.$$ □

4.

证明 把 $f(x)$ 展成正弦级数，那么

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_1^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin n}{n^2},\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\ |x|\leqslant\pi.$$ □

5.

证明 (1) 在第4题中取 $x=1$ 可得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}$. 在原书第316页的 (5) 式中取 $x=1$ 可得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$.

(2) 使用帕塞瓦尔等式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(\pi-1)^2}{6}.$$ □

6.

证明 这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{12}.$$

对另一级数同理. □

7.

证明 设 $[a,b]$ 是一个不包含 2π 整数倍的区间，那么

$$\left|\sum_{n=2}^{N}\sin nx\right| = \left|\frac{\cos(3x/2)-\cos(N+1/2)x}{2\sin(x/2)}\right| \leqslant \csc\frac{x}{2} \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}\csc\frac{x}{2},$$

又 $\{1/\ln n\}$ 递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

假设 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 是 $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ 中某个函数 f 的傅里叶级数，那么根据帕塞瓦尔等式应有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n} = +\infty,$$

矛盾！因此它不是 $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ 中任意一个函数的傅里叶级数. □

1.

证明 设 $f(x+t)$ 的傅里叶级数为

$$f(x+t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt + \beta_n\sin nt),$$

那么根据推广的帕塞瓦尔等式有

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\\
&= \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nt\,\mathrm{d}t + b_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos n(t-x) + b_n\sin n(t-x))\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx) + b_n(\sin nt\cos nx - \cos nt\sin nx))\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx,
\end{aligned}$$

因此

$$A_0 = a_0^2,\ A_n = a_n^2 + b_n^2,\ B_n = 0.$$

此外，取 $x=0$ 就得到 f 的帕塞瓦尔等式为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$ □

2.

证明 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 2π 的连续周期函数，那么 $f(x)$ 有傅里叶展开

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

又

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),$$

所以根据帕塞瓦尔等式有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)=\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

等号成立当且仅当当 $n\geqslant 2$ 时 $a_n=b_n=0$，亦即 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$. □

注意

这是维尔丁格[a]不等式.

[a] Wilhelm Wirtinger (15 July 1865 –15 January 1945) was an Austrian mathematician, working in complex analysis, geometry, algebra, number theory, Lie groups and knot theory.

3.

证明 将 $f(x)$ 展成正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n}\sin 2n\pi x$，那么 $f'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}2n\pi b_n\cos 2n\pi x$，于是根据所以根据帕塞瓦尔等式有

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}^2\leqslant\frac{1}{2\times 4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi b_{2n})^2=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1(f'(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=\alpha\sin x$. □

4.

证明 当 $m\neq n$ 时，

$$\varphi_n(x)\varphi_m(x)=\operatorname{sgn}(\sin 2^n\pi x)\operatorname{sgn}(\sin 2^m\pi x)=\operatorname{sgn}(\sin 2^n\pi x\sin 2^m\pi x).$$

记

$$E_1 = \{x \in [0,1] \mid \sin 2^n \pi x \sin 2^m \pi x > 0\},\ E_2 = \{x \in [0,1] \mid \sin 2^n \pi x \sin 2^m \pi x < 0\},$$

由正弦函数的对称性知 $|E_1| = |E_2| = 1/2$，所以

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_1} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = 1 \times |E_1| - 1 \times |E_2| = 0.$$

从而拉德马赫[1]函数系是 $[0,1]$ 上的一个正交系. 又 $\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$，所以拉德马赫函数系也是规范的. □

17.5 傅里叶积分与傅里叶变换

1.

证明 (1) 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $a(u) = 0$. 又

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin ut\,\mathrm{d}t = \frac{2(1-\cos u)}{\pi u},$$

所以

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u}\sin ux\,\mathrm{d}u.$$

(2) 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $a(u) = 0$. 又

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin ut\,\mathrm{d}t = \frac{2\sin \pi u}{\pi(1-u^2)},$$

所以

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi u}{1-u^2}\sin ux\,\mathrm{d}u.$$

(3) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b(u) = 0$. 又

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\cos ut\,\mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi(u^2+a^2)},$$

所以

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{a}{u^2+a^2}\cos ux\,\mathrm{d}u.$$ □

2.

[1]Hans Adolph Rademacher (3 April 1892, Wandsbeck, now Hamburg-Wandsbek –7 February 1969, Haverford, Pennsylvania, USA) was a German-born American mathematician, known for work in mathematical analysis and number theory.

解 (1) 使用傅里叶正弦公式，有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin ux\,\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\sin ux\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\frac{x}{x^2+1}.$$

(2) 使用傅里叶余弦公式，有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos ux\,\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-|x|}.$$ □

3.

证明 我们来计算

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

的傅里叶积分．因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b(u)=0$．而

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ut\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t)\cos ut=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos u}{u^2},$$

所以

$$\left.\begin{array}{ll}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u^2}\cos ux\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t.$$ □

4.

答 其傅里叶反变换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u(\mathrm{e}^{(-\beta+\mathrm{i}x)u}-\mathrm{e}^{(-\beta-\mathrm{i}x)u})\,\mathrm{d}u=\frac{1}{(-\beta+\mathrm{i}x)^2}-\frac{1}{(-\beta-\mathrm{i}x)^2}=\frac{4\beta x\mathrm{i}}{(\beta^2+x^2)^2}.$$ □

第十八章　含参变量积分

18.1　含参变量的常义积分

1.

答　(1) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\lim_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x=1$.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos tx\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\lim_{t\to 0}x^2\cos tx\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$. □

2.

答　因为

$$F'(u)=\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x+2uf(u),$$

所以 $F''(u)=3f(u)+2uf'(u)$. □

3.

答　(1) $f'(x)=-\mathrm{e}^{(1+\cos x)^2}\sin x-\mathrm{e}^{(1+\sin x)^2}\cos x$.

(2) $\displaystyle f'(x)=-2x\int_x^{x^2}u^2\mathrm{e}^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u+2x\mathrm{e}^{-x^6}-\mathrm{e}^{-x^4}$.

(3) $\displaystyle f'(x)=\frac{\sin x(b+x)-\sin x(a+x)}{x}+\frac{\sin(b+x)}{b+x}-\frac{\sin(a+x)}{a+x}$.

(4) $\displaystyle f'(x)=\int_0^u\left(g_1'(x+u,x-u)-g_2'(x+u,x-u)\right)\mathrm{d}x+g(2u,0)$. □

4.

证明　这是因为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}(-a\varphi'(x-at)+a\varphi'(x+at)+\frac{1}{2}(\psi(x+at)+\psi(x-at)),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}(a^2\varphi''(x-at)+a^2\varphi''(x+at))+\frac{1}{2}(a\psi'(x+at)-a\psi'(x-at)),$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}(\varphi'(x-at)+a\varphi'(x+at)+\frac{1}{2a}(\psi(x+at)+\psi(x-at)),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}(\varphi''(x-at)+\varphi''(x+at))+\frac{1}{2a}(\psi'(x+at)-\psi'(x-at)).$$ □

5.

证明　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\int_0^a\frac{(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\int_0^a\frac{yf(t)\,\mathrm{d}t}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\int_0^a\frac{zf(t)\,\mathrm{d}t}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\int_0^a f(t)\left(\frac{1}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3(x-t)^2}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\mathrm{d}t,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\int_0^a f(t)\left(\frac{1}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3y^2}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\mathrm{d}t,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\int_0^a f(t)\left(\frac{1}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3z^2}{((x-t)^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\mathrm{d}t,$$

进而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$ □

6.

解　当 $u\in(a,b)$ 时，

$$\varphi(u)=\int_a^u f(x)(u-x)\,\mathrm{d}x+\int_u^b f(x)(x-u)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\varphi'(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x-\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \varphi''(u)=2f(u).$$

当 $u\notin(a,b)$ 时 $\varphi''(u)=0$. □

7.

解 令

$$\begin{cases} 0=\dfrac{\partial}{\partial a}\displaystyle\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\int_1^3 2(a+bx-x^2)\,\mathrm{d}x=4a+8b-\dfrac{52}{3} \\ 0=\dfrac{\partial}{\partial b}\displaystyle\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\int_1^3 2x(a+bx-x^2)\,\mathrm{d}x=8a+\dfrac{52}{3}b-40 \end{cases},$$

可以解得 $a=-11/3$ 和 $b=4$. □

1.

证明 因为

$$\mathrm{J}_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$
$$\mathrm{J}_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}&x^2\mathrm{J}_n''(x)+x\mathrm{J}_n'(x)+(x^2-n^2)\mathrm{J}_n(x)\\ =&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi ((x^2\cos^2\varphi-n^2)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)+x\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi))\,\mathrm{d}\varphi\\ =&-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}(n+x\cos\varphi)\sin(n\varphi-x\sin\varphi)=0.\end{aligned}$$ □

2.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{a^2t^2+b^2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\ =&\frac{2a}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}-\frac{2ab^2}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2+b^2}=\frac{\pi}{|a|+|b|},\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=\pi\ln(|a|+|b|)+C(b).$$

又因为当 $a=b$ 时原积分为 $\pi\ln|a|$，所以

$$\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

(2) 因为

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{4\,\mathrm{d}x}{2-a^2-a^2\cos 2x}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{4}{2-a^2-a^2(1-t^2)/(1+t^2)}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-a^2+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

所以

$$\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\pi\arcsin a+C.$$

又因为当 $a=0$ 时原积分为零，所以

$$\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\pi\arcsin a.$$

(3) 因为

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2t^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-\frac{a^2}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+a^2t^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+|a|},$$

所以

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}|a|\ln(1+|a|)+C.$$

又因为当 $a=0$ 时原积分为零，所以

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}|a|\ln(1+|a|).$$ □

3.

证明　因为

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(x+u\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\mathrm{e}^{u\cos x}\sin(u\sin x)=0,$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x\bigg|_{u=0}^{u=2\pi}=1.$$ □

18.2　含参变量反常积分的一致收敛

1.

答　(1) 一致收敛，因为

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{u\geqslant u_0}\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\,\mathrm{d}x\right|=\lim_{A\to+\infty}\sup_{u\geqslant u_0}\frac{\mathrm{e}^{-uA}|u\sin A-\cos A|}{u^2+1}\leqslant\lim_{A\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u_0A}}{\sqrt{u_0^2+1}}=0.$$

(2) 一致收敛，因为

$$\left|\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\right| \leqslant \frac{x^2}{1+x^4}.$$

(3) 一致收敛，因为

$$\frac{1}{1+(x+u)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

(4) 由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 是收敛的．又因为 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 是一致有界且单调的，所以由阿贝尔判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛．

(5) 不一致收敛，因为

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{+\infty}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{A\to+\infty}\sup_{u\geqslant 0}\int_{\sqrt{u}A}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \square$$

2.

证明 当 $0\notin[a,b]$ 时，因为

$$\left|\int_0^A \sin ux\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1-\cos uA}{u}\right| \leqslant \frac{2}{|u|} \leqslant \frac{2}{\min\{|a|,|b|\}},$$

而 $1/x$ 递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛．

当 $0\in[a,b]$ 时，因为

$$\lim_{A\to\infty}\sup_{u\in[a,b]}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{A\to\infty}\sup_{u\in[a,b]}\left|\int_{uA}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \frac{\pi}{2},$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛． □

3.

证明 因为 $\displaystyle\int_0^A \sin 3x\,\mathrm{d}x$ 有界的，关于 u 当然一致，而 $\dfrac{1}{x+u}$ 递减地一致趋于零，所以由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛．又 e^{-ux} 是一致有界且单调的，所以由阿贝尔判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛． □

4.

证明　因为 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)\,\mathrm{d}x$ 发散，所以存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意的 $A>a$ 都存在 $A''>A'>A$ 使得 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,\beta)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant 2\varepsilon_0$. 由 $f(x,u)$ 的连续性知在 β 的某个左邻域上有 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|\geqslant \varepsilon_0$，因此 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上不一致收敛. □

5.

证明　因为

$$\left|\int_0^A \cos ux\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\sin uA}{u}\right|\leqslant\frac{1}{|u|}\leqslant\frac{1}{\delta},$$

而当 $x>a$ 时 $\dfrac{x}{a^2+x^2}$ 递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\cos ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

因为 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=+\infty$, 所以对任意的 $A>0$ 都存在 $A''>A'>A$ 使得 $\int_{A'}^{A''}\dfrac{x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x>1$. 于是对于 $u=\dfrac{\pi}{3A''}$ 就有

$$\int_{A'}^{A''}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x>\int_{A'}^{A''}\frac{x\cos(\pi/3)}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

因此 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\cos ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

6.

证明　在原书的 346 页已经算出

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\sin xu}{\beta^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\beta x}\ (x>0,\ \beta>0),$$

所以

$$\int_A^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-au}-\int_0^A\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-au}-\int_0^{Au}\frac{x\sin x}{a^2u^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

根据积分第一中值定理，存在 $\xi_u\in[0,Au]$ 使得

$$\int_0^{Au}\frac{x\sin x}{a^2u^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\sin\xi_u\int_0^{Au}\frac{x}{a^2u^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin\xi_u\ln\frac{a^2+A^2}{a^2}.$$

于是

$$\sup_{u>0}\int_A^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant\lim_{u\to0}\int_A^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to0}\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-au}-\frac{1}{2}\sin\xi_u\ln\frac{a^2+A^2}{a^2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

1.

证明　因为 $\displaystyle\int_0^A\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $[\eta,+\infty)$ 上一致有界，而 $\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $x>1$ 时递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $[\eta,+\infty)$ 上一致收敛.

对任意的 $A>0$，取 $A'=\max\{A,1\}$，再取 $\alpha=\min\{1/(A'+1),\delta/2\}$ 就有

$$\int_{A'}^{A'+1}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\int_{A'}^{A'+1}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{A'}^{A'+1}\frac{1}{2}\times\frac{\sin 1}{1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 1}{2},$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $(0,\delta)$ 上不一致收敛. □

2.

证明　因为

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\alpha\int_{(A-1/\alpha)/\alpha}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

所以对任意的 $\varepsilon>0$，如果 $0<\alpha\leqslant\varepsilon/\sqrt{\pi}$，那么马上有

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

如果 $\varepsilon/\sqrt{\pi}<\alpha\leqslant 1$，那么当 A 足够大时（大于 $1/\alpha$）就有

$$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{A-\sqrt{\pi}/\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因此 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\,\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $(0,1]$ 上一致收敛.

设函数 $g(x)$ 使得 $g(x)\geqslant\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}$ 关于 α 一致地成立，那么当 $\alpha=1/x$ 时不等式也成立，从而 $g(x)\geqslant 1$．于是 $\displaystyle\int_1^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 不可能收敛．因此这里不能使用魏尔斯特拉斯判别法． □

3.

证明　当 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛时，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使得当 $A''>A'>A$ 时对一切的 $u\in[\alpha,\beta]$ 都有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

对任一递增趋于 $+\infty$ 且满足 $A_1 = a$ 的数列 $\{A_n\}$，存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时有 $A_{n+1} \geqslant A_n > A$. 于是对任意的 $p > 0$ 和一切的 $u \in [\alpha, \beta]$ 都有

$$\left|\int_{A_{n+1}}^{A_{n+p}} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^{p-1}\int_{A_{n+k}}^{A_{n+k+1}} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

因此函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

当任一递增趋于 $+\infty$ 且满足 $A_1 = a$ 的数列 $\{A_n\}$ 都能使 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛时，假设 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不一致收敛，那么存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对任意的 $A \geqslant a$ 都存在 $A' \geqslant A$ 和 $u' \in [\alpha,\beta]$ 使得

$$\left|\int_{A'}^{+\infty} f(x,u')\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

现在取 $A_1 = a$，那么存在 $u_1 \in [\alpha,\beta]$ 使得

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u_1)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

于是还存在 $A_2 \geqslant \max\{1, A_1\}$ 和 $u_2 \in [\alpha,\beta]$ 使得

$$\left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x,u_2)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

如此，一般地，存在 $A_n \geqslant \max\{n-1, A_{n-1}\}$ 和 $u_n \in [\alpha,\beta]$ 使得

$$\left|\int_{A_n}^{+\infty} f(x,u_n)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

这样我们得到一个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$，且

$$\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \left|\sum_{k=n}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x,u_n)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon_0,$$

这与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛矛盾！因此 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. □

18.3　含参变量反常积分的性质

1.

答 (1) 对任意的 $x \in [a,b] \subset (2,+\infty)$，因为

$$\frac{t}{2+t^x} \leqslant \frac{t}{2+t^a} \sim \frac{1}{t^{a-1}}\ (t \to +\infty),$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2+t^x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(2,+\infty)$ 上关于 x 内闭一致收敛，进而 $f(x)$ 连续.

(2) 把积分写成

$$\varphi(\alpha) = \left(\int_0^1 + \int_1^{\pi-1} + \int_{\pi-1}^{\pi}\right) \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\displaystyle\int_1^{\pi-1} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 是正常积分，从而关于 α 连续．对任意的 $\alpha \in [a,b] \subset (0,2)$，因为当 $0 < x < 1$ 时

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} \leqslant \frac{\sin x}{x^b(\pi-1)^a} \sim \frac{1}{x^{b-1}(\pi-1)^a}\ (x \to 0),$$

所以 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,2)$ 上关于 α 内闭一致收敛．而当 $\pi-1 < x < 1$ 时

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} \leqslant \frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)^b} \sim \frac{1}{(\pi-x)^{b-1}},$$

所以 $\displaystyle\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,2)$ 上也关于 α 内闭一致收敛．因此 $\varphi(\alpha)$ 连续.

(3) 因为 $\displaystyle\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x$ 是有界的，而 $1/x^\alpha$ 在 $\alpha \in [a,b] \subset (0,+\infty)$ 时递减地一致趋于零，所以由狄利克雷判别法知 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛．因此 $f(\alpha)$ 连续. □

2.

答 $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \ln^m x\,\mathrm{d}x^\alpha = -\frac{m}{\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}\ln^{m-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{m!}{(-\alpha)^m}\int_0^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = (-1)^m\frac{m!}{\alpha^{m+1}}$. □

3.

解 由魏尔斯特拉斯判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin cx\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上关于 y 一致收敛，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin cx\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\sin cx\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin cx\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \frac{c}{y^2+c^2}\,\mathrm{d}y = \arctan\frac{b}{c} - \arctan\frac{a}{c}.\end{aligned}$$

□

4.

证明　因为

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\right|=\frac{2|\alpha|}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\leqslant\frac{1}{x(\beta^2+x^2)},$$

所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 关于 α 一致收敛．而 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 是正常积分，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\beta^2+x^2}-\frac{1}{\alpha^2+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi\,\mathrm{sgn}\,a}{|\beta|(|\alpha|+|\beta|)},\end{aligned}$$

进而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)+C(\beta).$$

又因为当 $\alpha=0$ 时

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x^2}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x\overset{x=|\beta|\tan t}{=}\frac{2}{|\beta|}\int_0^{\pi/2}(\ln|\beta|+\ln\tan t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{|\beta|}\ln|\beta|,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|).$$

□

5.

答　(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(2x^2+x+2)}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-15/8}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2(x+1/4)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-15/8}}{2}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}(\mathrm{sgn}(\alpha+\beta)+\mathrm{sgn}(\alpha-\beta))$.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. □

6.

证明　因为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上关于 u 一致收敛．从而对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$ 使得对一切的 u 都有

$$\left|\left(\int_{-\infty}^{-A}+\int_A^{+\infty}\right)f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

现在取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4A} \Big/ \int_{-A}^{A} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

那么当 $|u_1 - u_2| < \delta$ 时就有

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)(\cos u_1 x - \cos u_2 x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |u_1 - u_2| \int_{-A}^{A} |xf(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant |u_1 - u_2| \int_{-A}^{A} |Af(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$|f(u_1) - f(u_2)| = \left|\left(\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty} + \int_{-A}^{A}\right) f(x)(\cos u_1 x - \cos u_2 x)\,\mathrm{d}x\right| < 2 \times \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此 $f(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. □

注意

原书的 341 页已经证明了这个命题（定理 17.5.1）.

1.

证明　因为

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\pi}} \int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t}\,\mathrm{d}t,$$

所以只要证明 $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0, \delta] \subset [0, 1)$ 上一致收敛. 而事实上

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t} \leqslant \frac{1}{\sin^{\delta} t} \sim \frac{1}{t^{\delta}}\ (t \to 0),\quad \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t} \leqslant \frac{1}{\sin^{\delta}(\pi - t)} \sim \frac{1}{(\pi - t)^{\delta}}\ (t \to \pi).$$ □

2.

证明　虽然 $\varphi(u) = 1$ 和 $\psi(u) = \mathrm{e}^{u^2}$ 都是连续函数，但是因为

$$\sup_{0<u\leqslant 1} \left|\int_{A}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x\right| = \sup_{0<u\leqslant 1} \int_{Au}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\sup_{u\geqslant 1} \left|\int_{A}^{+\infty} u\mathrm{e}^{u(u-x)}\,\mathrm{d}x\right| = \sup_{u\geqslant 1} \int_{Au}^{+\infty} \mathrm{e}^{u^2 - x}\,\mathrm{d}x = \sup_{u\geqslant 1} \mathrm{e}^{u^2 - Au} = +\infty,$$

所以这两个含参变量反常积分都不是一致收敛的. □

3.

证明 易见

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x$$

关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以当 $\alpha > 0$ 时有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x.$$

进一步地易见

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} \mathrm{d}x$$

关于 β 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以当 $\beta > 0$ 且 $\alpha > 0$ 时有

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}.$$

从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ln(\alpha+\beta) + C(\alpha).$$

又因为

$$0 = \int_0^{+\infty} \lim_{\beta \to 0^+} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x = \lim_{\beta \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ln \alpha + C(a),$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha},$$

进而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}((\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta) - \alpha \ln \alpha) + C(\beta).$$

易见原积分关于 α 和 β 也是一致收敛的，所以

$$0 = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \beta \ln \beta + C(\beta).$$

因此当 $\alpha, \beta > 0$ 时

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}((\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta) - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}.$$

最后利用奇偶性可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \arctan \beta x}{x^2} \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha\beta) \ln \dfrac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|}|\beta|^{|\beta|}}, & \alpha\beta \neq 0 \\ 0, & \alpha\beta = 0 \end{cases}. \qquad \square$$

4.

解 利用极坐标变换，积分变为

$$\frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{\sin(t\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t-\cos 2t}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2,$$

其中还用到了傅汝兰尼积分. □

5.

解 (1) 通过变量替换 $x=\sqrt{a}\mathrm{e}^{t}/2$ 和 $x=\sqrt{a}\mathrm{e}^{-t}/2$，积分变为

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+a^2/x^2)}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{-2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-a/x)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{a\sinh^2 t}\,\mathrm{d}(\sqrt{a}\mathrm{e}^{t}/2)+\frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2}\int_{+\infty}^{-\infty}\mathrm{e}^{a\sinh^2 t}\,\mathrm{d}(\sqrt{a}\mathrm{e}^{-t}/2)\\
&= \frac{\sqrt{a}\mathrm{e}^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cosh t\mathrm{e}^{a\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{a\sinh^2 t}\,\mathrm{d}\sqrt{a}\sinh t = \frac{\mathrm{e}^{-2a}\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

(2) 使用分部积分，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{b\sin bx-2ax\mathrm{e}^{-ax^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}b\,\mathrm{sgn}\,b-\sqrt{a\pi}.$$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$

(4) 使用傅汝兰尼积分，

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4\alpha x-\cos 4\beta x}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2\alpha x-\cos 2\beta x}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{3}{8}\ln\frac{\beta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

□

6.

证明 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A_1>a$ 使得当 $A''>A'>A_1$ 时有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u_0)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，所以存在 $A_2>a$ 使得当 $A''>A'>A_2$ 时对一切的 $u\in[\alpha,\beta]$ 都有

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}.$$

现在取 $A=\max\{A_1,A_2\}$，那么当 $A''>A'>A$ 时利用牛顿–莱布尼茨公式就有

$$\begin{aligned}\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u_0)\,\mathrm{d}x+\int_{u_0}^{u}\mathrm{d}s\int_{A'}^{A''}\frac{\partial}{\partial u}f(x,s)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u_0)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{u_0}^{u}\mathrm{d}s\int_{A'}^{A''}\frac{\partial}{\partial u}f(x,s)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}|u-u_0|\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛．因为 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，所以

$$\int_{u_0}^{u}\mathrm{d}s\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial u}f(x,s)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}s\int_{u_0}^{u}\frac{\partial}{\partial u}f(x,s)\,\mathrm{d}s=\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\,\mathrm{d}x,$$

由此即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\,\mathrm{d}x.$$ □

18.4 伽马函数和贝塔函数

1.

证明 (1) $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\overset{t=x^2}{=}2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

(2) $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\overset{t=ax}{=}a^s\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x.$ □

2.

证明 $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x\overset{x=\sin^2\theta}{=}2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$ □

3.

答 (1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}=\frac{\pi}{8}.$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{x^{-3/2}\,\mathrm{d}x}{1+x}=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin(\pi/3)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(3, \frac{7}{2}\right) = \frac{8}{693}\,.$ □

4.

证明 只要证明对满足 $1/\lambda + 1/\mu = 1$ 的正数 λ 和 μ 有

$$\ln \mathrm{B}\left(\frac{p_1}{\lambda} + \frac{p_2}{\mu}, q\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\ln \mathrm{B}(p_1, q) + \frac{1}{\mu}\ln \mathrm{B}(p_2, q),$$

或者

$$\mathrm{B}\left(\frac{p_1}{\lambda} + \frac{p_2}{\mu}, q\right) \leqslant \mathrm{B}^{1/\lambda}(p_1, q)\,\mathrm{B}^{1/\mu}(p_2, q).$$

事实上根据赫尔德不等式我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{p_1/\lambda + p_2/\mu}(1-x)^q \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{p_1/\lambda}(1-x)^{q/\lambda} x^{p_2/\mu}(1-x)^{q/\mu}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_0^1 x^{p_1}(1-x)^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/\lambda}\left(\int_0^1 x^{p_2}(1-x)^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/\mu}.\end{aligned}$$ □

5.

解 利用推论 18.4.1，

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{3/2}(1-x^5)^\alpha \,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{\alpha}}{5}\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\alpha}}{5}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \alpha+1\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{5}\frac{\sqrt{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{5}\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+1}}\frac{\sqrt{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)} \to \frac{\sqrt{\pi}}{5}\ (\alpha \to +\infty).\end{aligned}$$ □

6.

证明 这是因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^a\sqrt{2\pi(x-1)}((x-1)/\mathrm{e})^{x-1}}{\sqrt{2\pi(x+a-1)}((x+a-1)/\mathrm{e})^{x+a-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a-1}}\frac{x^a}{(x+a-1)^a}\frac{\mathrm{e}^a}{(1+a/(x-1))^{x-1}} = 1.\end{aligned}$$ □

7.

证明 利用变量替换 $t = (ax+b)/\sqrt{ac-b^2}$，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+2bx+c)^\alpha} = \frac{(ac-b^2)^{1/2-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha} = \frac{(ac-b^2)^{1/2-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\frac{\Gamma(\alpha-1/2)}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\pi}.$$ □

1.

证明 利用变量替换 $t = bx^p/a$，我们得到

$$f(a,p,q) = \frac{1}{pa^q}\left(\frac{a}{b}\right)^{(s+1)/q}\int_0^{+\infty}\frac{t^{(s+1)/p-1}}{(1+t)^q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{pa^q}\left(\frac{a}{b}\right)^{(s+1)/q}\frac{\Gamma(q-(s+1)/p)\Gamma((s+1)/q)}{\Gamma(q)},$$

进而可以看出定义域是 $0 < (s+1)/p < q$. □

2.

证明 $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{2\pi}$. □

3.

证明 $\displaystyle\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\pi x\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\pi}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\pi}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\ln(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}\cos x = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{2}+1\right)$. □

4.

证明 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} \overset{\cos x=1-2t}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma^2(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. □

5.

证明 这是因为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1} &= \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 x^{m+k}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{B}(m+1,n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1!)}.\end{aligned}$$ □

6.

证明 因为

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\\ g'(x) &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\iint_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}u \overset{u=xt}{=} 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

所以 $f'(x)+g'(x)=0$，进而

$$f(x)+g(x)=f(0)+g(0)=\frac{\pi}{4}.$$

又因为

$$0\leqslant g(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x^2},$$

所以

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

进而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

7.

证明 利用余元公式得到

$$\frac{\pi}{\sin\pi x}=\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x(1-x^2)(1-x^2/2^2)\cdots(1-x^2/n^2)}\frac{n}{n+1-x}$$
$$=1\Bigg/x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

因此当 $0<x<1$ 时有

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

记 $\varphi(x)=\pi x\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$，那么显然有 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 以及 $\varphi(-x)=-\varphi(x)$. 又

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)&=\lim_{N\to\infty}\pi(x+1)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{(x+1)^2}{n^2}\right)=\pi\lim_{N\to\infty}\frac{x+1}{(N!)^2}\prod_{n=1}^{N}(n+1+x)(n-1-x)\\&=\pi\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(N!)^2}\prod_{n=1}^{N+1}(n+x)\prod_{n=0}^{N-1}(n-x)=-\pi x\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(N!)^2}\frac{N+1+x}{N-1}\prod_{n=1}^{N}(n^2-x^2)\\&=-\pi x\lim_{N\to\infty}\frac{N+1+x}{N-1}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=-\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=-\varphi(x),\end{aligned}$$

所以对一切的实数 x 都有

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

亦即

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$ □