Week 5

潘晨翔、王曹励文

2024 年 4 月 16 日

9.11.1 求下列函数的极值:

(2) $f(x,y) = x^2 - 3x^2y + y^3$;

(4) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

解. (2)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(1-3y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x^2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 6y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

解驻点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

得到三个点 $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 为驻点.

带入 Hessen 矩阵发现 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 处的 Hessen 阵都为不定阵，故不为极值点.

考虑 (0,0) 点处,$\forall \epsilon > 0, f(0,\epsilon) = \epsilon^3 > 0$, 但是 $f(0,-\epsilon) = -\epsilon^3 < 0$, 故 (0,0) 点处也不为极值点.

综上 f 没有极值点.

(4)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

解驻点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

得到两个点 $(0,0),(1,1)$ 为驻点.

带入 Hessen 矩阵发现 $(0,0)$ 处的 Hessen 阵为不定阵，故不为极值点. 而 $(1,1)$ 处的矩阵正定, 为极小值点. 极小值为 $f(1,1) = -1$. □

9.11.2 求函数 $f(x,y) = xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}(a>0,b>0)$ 的极值.

解.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2y}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{xy^2}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{3xy}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{x^3y}{a^4\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^3}},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{x^2y^2}{a^2b^2\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^3}},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{3xy}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{xy^3}{b^4\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^3}},$$

解驻点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

得到四个点 $(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b),(\frac{\sqrt{3}}{3}a,-\frac{\sqrt{3}}{3}b),(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b),(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,-\frac{\sqrt{3}}{3}b)$ 为驻点.

带入 Hessen 矩阵发现 $(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b),(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,-\frac{\sqrt{3}}{3}b)$ 处的 Hessen 阵

$$\begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{b}{a} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

为严格负定阵，故为极大值点.

$(\frac{\sqrt{3}}{3}a,-\frac{\sqrt{3}}{3}b),(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b)$ 处的 Hessen 阵

$$\begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{b}{a} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

为严格正定阵，故为极小值点.

故得到极大值点为 $\frac{\sqrt{3}ab}{9}$, 极小值点为 $-\frac{\sqrt{3}ab}{9}$. □

9.11.3 求函数

$$f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$$

在正方形 $[0,\pi/2]^2$ 上的极值.

解.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \sin(x-y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y + \sin(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x-y),$$

解驻点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

得到三个点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 为驻点.
带入 Hessen 矩阵发现 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 处的 Hessen 阵

$$Hf(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

为严格负定阵，故为极大值点. 则极大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. □

9.11.4 设 $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. 证明限制在每一条过原点的直线上，原点时 f 的极值点, 但是函数 f 在原点处不取极小值.

解. 若限制在直线 $y = kx$ $(k \neq 0)$ 上得到

$$g(x) = f(x, kx) = (x-k)(3x-k)x^2$$

对其求导有

$$g'(0) = 0 \qquad g''(0) = 2k^2 > 0$$

故 0 是 g 的极小值点.
若限制在 y 轴上，即 $x = 0$. 则 f 化为 y^2 也成立.
但在 $\mathbb{R}^2$ 上,$f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$,$f(0,0) = 0$, 在我们取 $y < 0$ 时,$f(x,y) > 0$, 但是取 $y = x^2$, 则有 $f(x, x^2) = -x^4 < 0$, 故原点不为 f 的极值点. □

9.11.5 设二元函数 F 在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可微. 已知曲线 $F(x,y) = 0$ 呈 “8” 字形. 问方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中至少有几组解?

解. 设两个圆分别为 Γ_1 和 Γ_2, 则由 Γ_1 为紧集. 则 F 在上面可以取到极值，由 $F|_{\partial\Gamma_1} = 0$, 则在内部必有一个极值点. 同理在 Γ_2 的内部也有一个极值点. 而极值点一定为驻点。
设 Γ_1 和 Γ_2 相交于 p 点处. 由于 $F|_{\partial\Gamma_1} = 0$，可以得到 F 沿 Γ_1 的两个方向的方向导数都为 0，又由于这两个方向线性无关. 则在 p 点处的两个偏导数也为 0，故 p 点也为驻点。
综上一共有三组解满足方程. □

9.12.1 求条件极值。

(3) $u=x-2y+2z, x^2+y^2+z^2=1$.

(4) $u=3x^2+3y^2+z^2, x+y+z=1$.

解. (3) $F(x,y,z)=x-2y+2z-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=1-2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-2-2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2-2\lambda z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda}\\ y=-\dfrac{1}{\lambda}\\ z=\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$

代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得 $\dfrac{1}{4\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{9}{4\lambda^2}=1$, 得 $\lambda=\pm\dfrac{3}{2}$,$(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

$$\mathbf{H}u=\begin{pmatrix}-2\lambda & & \\ & -2\lambda & \\ & & -2\lambda\end{pmatrix}$$

$\lambda<0$ 时严格正定，$\lambda>0$ 时严格负定，故 $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 是极大值点，极大值为 3；$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 是极小值点，极小值为 -3.

(4) $F(x,y,z)=3x^2+3y^2+z^2-\lambda(x+y+z-1)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=6x-\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=6y-\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\lambda}{6}\\ y=\dfrac{\lambda}{6}\\ z=\dfrac{\lambda}{2}\end{cases}$$

代入 $x+y+z=1$ 得 $\dfrac{5}{6}\lambda=1$, 得 $\lambda=\dfrac{6}{5}$, $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$.

$$\mathbf{H}u=\begin{pmatrix}6 & & \\ & 6 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

严格正定，故 $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ 是极小值点，极小值为 $\dfrac{3}{5}$. □

9.12.2 计算

(1) 原点到 $\begin{cases}2x+2y+z+9=0\\ 2x-y-2z-18=0\end{cases}$ 的距离。

(2) 原点到 $x+2y+3z+4=0$ 的距离。

解. (1) $d^2=x^2+y^2+z^2, F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\lambda_1(2x+2y+z+9)-\lambda_2(2x-y-2z-18)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-2\lambda_1-2\lambda_2=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda_1+\lambda_2\\ y=\lambda_1-\dfrac{\lambda_2}{2}\\ z=\dfrac{\lambda_1}{2}-\lambda_2\end{cases}$$

代入 $\begin{cases} 2x+2y+z+9=0 \\ 2x-y-2z-18=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{9}{2}\lambda_1+9=0 \\ \frac{9}{2}\lambda_2-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2 \\ \lambda_2=4 \end{cases}$,

于是 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \\ z=-5 \end{cases}$. 由于 $\mathbf{H}f=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 恒为严格正定的，该点是 d^2 的极小值点，于是距离为 $d_{\min}=\sqrt{2^2+4^2+5^2}=3\sqrt{5}$.

(2) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+2y+3z+4)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-2\lambda=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-3\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{2} \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{3\lambda}{2} \end{cases}$$

代入 $x+2y+3z+4=0$ 得 $\lambda=-\dfrac{4}{7},(x,y,z)=-\dfrac{2}{7}(1,2,3),\mathbf{H}f$ 同上，恒为正定，故该点是极小值点，得到距离为

$$d_{\min}=\frac{2}{7}\sqrt{1+2^2+3^2}=\frac{2}{7}\sqrt{14}.$$

□

9.12.4 设 $a>0$, 求 $\begin{cases} x^2+y^2=2az \\ x^2+y^2+xy=a^2 \end{cases}$ 上的点到 Oxy 平面的最小距离和最大距离。

解. $F(x,y,z)=z^2-\lambda_1(x^2+y^2-2az)-\lambda_2(x^2+y^2+xy-a^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=-2\lambda_1x-2\lambda_2x-\lambda_2y=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-2\lambda_1y-2\lambda_2y-\lambda_2x=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z+2a\lambda_1=0 \end{cases}$$

前两个方程整理得

$$\begin{cases} 2(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_2y=0 \\ \lambda_2x+2(\lambda_1+\lambda_2)y=0 \end{cases}$$

由于 (x,y) 要满足 $x^2+y^2+xy=a^2>0$, 故 $(x,y)\neq(0,0)$, 因而上述方程组有非零解，即系数矩阵得行列式 $=0$.

$$4(\lambda_1+\lambda_2)^2-\lambda_2^2=0,$$

得

$$2\lambda_1+3\lambda_2=0 \text{ or } 2\lambda_1+\lambda_2=0.$$

若 $2\lambda_1+3\lambda_2=0$, 则 $x=y$,

$$\begin{cases} x^2+y^2=2az \\ 3x^2=a^2 \end{cases}$$

得 $z=\dfrac{a}{3}$ 为极小值。

若 $2\lambda_1+\lambda_2=0$, 则 $x=-y$,

$$\begin{cases}2x^2=2az\\ x^2=a^2\end{cases}$$

得 $z=a$ 为极大值。 □

9.12.6 设 $a_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n, p>1$, 证明:

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leq\Big(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

解. 设 $a_1+\cdots+a_n=c, f(a_1,\cdots,a_n)=a_1^p+\cdots+a_n^p-\lambda(a_1+\cdots+a_n-c)$,

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}=pa_i^{p-1}-\lambda=0\Rightarrow a_i^{p-1}=\frac{\lambda}{p}\Rightarrow a_i=\Big(\frac{\lambda}{p}\Big)^{\frac{1}{p-1}},\forall i\Rightarrow c=n\Big(\frac{\lambda}{p}\Big)^{\frac{1}{p-1}}\Rightarrow a_i=\frac{c}{n},\forall i$$

若 $c=0$ 则不等式显然成立，否则 $c>0$,f 的 Hesse 阵严格正定，故有

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\frac{c}{n}\leq\Big(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

□

9.12.7 证明：设 $a_i\geq 0, x_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n), p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i\leq\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

解. 设 $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=c, f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^q+\cdots+x_n^q-\lambda\big(\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i-c\big)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=qx_i^{q-1}-\lambda a_i=0\Rightarrow x_i^{q-1}=\frac{\lambda a_i}{q},$$

代入 $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=c$ 得

$$\frac{\lambda}{q}=\left(\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}\right)^{q-1}$$

故

$$\sum_{i=1}^n x_i^q\geq\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\lambda a_i}{q}\Big)^{\frac{q}{q-1}}=\Big(\frac{\lambda}{q}\Big)^{\frac{q}{q-1}}\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{q}{q-1}}=Big(\frac{\lambda}{q}\Big)^{\frac{q}{q-1}}\sum_{i=1}^n a_i^p=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}\right)^q\sum_{i=1}^n a_i^p$$

整理后得

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i\leq\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

□

10.1.1 一元函数 f,g 在区间 $[0,1]$ 可积，求证 $f(x)g(y)$ 在 $I=[0,1]^2$ 上可积，且

$$\iint_I f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y$$

解. 记在区域 I 上的分割为 π,x 方向的分割为 π_x,y 方向的分割为 π_y.
f,g 可积，故 f,g 均有界且

$$\lim_{||\pi_x||\to 0}\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f)\triangle x_i=0,$$
$$\lim_{||\pi_y||\to 0}\sum_{j=1}^{m}\omega_j(g)\triangle y_j=0.$$

对任意的 x_1,x_2,y_1,y_2,

$$\begin{aligned}|f(x_1)g(y_1)-f(x_2)g(y_2)|&=|f(x_1)g(y_1)-f(x_1)g(y_2)+f(x_1)g(y_2)-f(x_2)g(y_2)|\\&\le|f(x_1)|\cdot|g(y_1)-g(y_2)|+|g(y_2)|\cdot|f(x_1)-f(x_2)|\end{aligned}$$

同时分割的每个小区域内取 sup 得 $\omega_{ij}(fg)\le M\big(\omega_i(f)+\omega_j(g)\big)$, 其中 M 为 $|f|$ 和 $|g|$ 的一个共同上界。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(fg)\sigma(I_{ij})&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(fg)\triangle x_i\triangle y_j\\&\le M\Big(\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f)\triangle x_i+\sum_{j=1}^{n}\omega_j(g)\triangle y_j\Big)\end{aligned}$$

$||\pi||\to 0$ 时，$||\pi_x||,||\pi_y||\to 0$, 故

$$\lim_{||\pi||\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(fg)\sigma(I_{ij})=0.$$

从而可积。证明了可积性之后再进行运算，也可以利用定义直接进行估计。 □

10.1.2 计算 $\iint_{[0,1]^2}e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解.

$$\iint_{[0,1]^2}e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\int_0^1 e^y\mathrm{d}y=(e-1)^2.$$

□

10.1.3 $a>0,I-[-a,a]^2$, 求证:$\iint_I\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

解. 做变换 $t=-x,s=-y$,

$$\begin{aligned}\iint_I\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\sin(-s-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=-\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\sin(s+t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\end{aligned}$$

故 $\iint_I\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$ □

10.1.5 证明：闭矩形上的连续函数可积。

解. 闭矩形上的连续函数必然有界且一致连续, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| < \delta$ 时, $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$. 故 $||\pi|| < \varepsilon$ 时, 有 $\omega_i < \varepsilon$, 故

$$\sum_i \omega_i \sigma(I_i) < \sigma(I)\varepsilon \Rightarrow \lim_{||\pi|| \to 0} \sum_i \omega_i \sigma(I_i) = 0 \Rightarrow \text{ 可积.}$$

□