Week2

潘晨翔、王曹励文

2024 年 3 月 20 日

8.4.1 P 是投影算子，证明若 $A\subset\mathbb{R}^2$ 是紧致集，则 $P(A)$ 是紧致集。

解.（紧致 $\Leftrightarrow$ 列紧） 任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset P(A)$, $\exists\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset A$. 由于 A 列紧，故有收敛子列 $\{(x_{n_i},y_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ 在 A 中收敛到 (x,y). 由于向量的收敛等价于按分量收敛，故 $\{x_{n_i}\}$ 也是 $\{x_n\}$ 的收敛子列，且 $\lim\limits_{i\Rightarrow\infty}x_{n_i}=x=P\big((x,y)\big)\in P(A)$. 故 $P(A)$ 列紧。

（紧致的定义） 要证明 $P(A)$ 的任意开覆盖存在有限子覆盖，设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $P(A)$ 的任意一个开覆盖.记 $\widetilde{G_\alpha}=\{(x,y):x\in G_\alpha,y\in\mathbb{R}\}$, 则 $\widetilde{G_\alpha}$ 是开集.$\Big(\forall(x,y)\in\widetilde{G_\alpha}$, 由于 G_α 是开集，故 $\exists r_0,s.t.(x-r_0,x+r_0)\subset G_\alpha,B_{r_0}\big((x,y)\big)\subset(x-r_0,x+r_0)\times(y-r_0,y+r_0)\subset G_\alpha\times\mathbb{R}=\widetilde{G_\alpha}.\Big)$

$\{\widetilde{G_\alpha}\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的开覆盖，故存在其有限子覆盖 $\{\widetilde{G_i}\}_{i=1}^m$.

$\forall x\in P(A),\exists(x,y)\in A,\exists 1\le i\le m,s.t.(x,y)\in\widetilde{G_i}$, 故 $x\in G_i$.$\{\widetilde{G_i}\}_{i=1}^m$ 是 $P(A)$ 的覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的有限子覆盖。故 $P(A)$ 紧致。 □

8.4.2 $A,B\subset\mathbb{R}$. 证明 $A\times B$ 紧致 $\Leftrightarrow A,B$ 紧致。

解. "$\Rightarrow$"：由 8.4.1 知。

"$\Leftarrow$"：利用列紧证明即可。 □

注. 很多同学写的是将 A，B 的有限子覆盖笛卡尔积起来认为是原开覆盖的有限子覆盖，这个是很明显的错误，因为原始的开覆盖有可能不全是矩体。所以紧性的定义中"有限"和"子"都是要满足的，不能忽视其中任何一个!!!

8.4.3 证明 $A\subset\mathbb{R}^n$ 紧致的定义与下述命题等价：若 $\mathfrak{F}=\{A_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集族且 $A\cap(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)=\emptyset$, 则 $\exists A_1,\cdots,A_k\in\mathfrak{F}$, 使 $A\cap(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i)=\emptyset$.

解. A 紧致等价于任意 A 的开覆盖 $\{G_\alpha\}$ 存在有限子覆盖 $G_1,\cdots,G_k,A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}G_i$.

"$\Rightarrow$"：任意满足 $A\cap(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)=\emptyset$ 的闭集族 $\{A_\alpha\}$, 有 $A\subset\big(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha\big)^c=\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha^c$. 故 $\{A_\alpha^c\}$ 是 A 的开覆盖。由 A 紧致，故存在有限子覆盖，$\exists A_1,\cdots,A_k,A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i^c=\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i\big)^c$, 即 $A\cap(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i)=\emptyset$.

"$\Leftarrow$"：设 $\{G_\alpha\}$ 是 A 的任一开覆盖，$A\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$, 则 $\emptyset=A\cap\big(\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha\big)^c=A\cap\big(\bigcap\limits_{\alpha}G_\alpha^c\big)$. 则 $\{G_\alpha^c\}$ 是满足明题条件的闭集族，故 $\exists G_1,\cdots,G_k,s.t.A\cap\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k}G_i^c\big)=\emptyset$, 即 $A\subset\big(\bigcap\limits_{i=1}^{k}G_i^c\big)^c=\bigcup\limits_{i=1}^{k}G_i$, 故 $\{G_\alpha\}$ 存在有限子覆盖，A 紧致。 □

8.4.4 证明 Frechet 紧等价于列紧。$A \subset \mathbb{R}^n$ 称为 Frechet 紧，若 A 的每一个无穷子集在 A 中有一个凝聚点。

解. “$\Rightarrow$”：设 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 为任意点列。则 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 作为 A 的子集，若 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为有限集合 (即只有有限个不同项)，显然有收敛子列。故只需考虑 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为无穷子集的情况，由于 AFrechet 紧，$\{\boldsymbol{x}_n\}$ 在 A 中有凝聚点 $\boldsymbol{x}$, 即存在子列收敛到 $\boldsymbol{x}$. 故 A 列紧。

“$\Leftarrow$”：任取 A 的无穷子集 E，将其看作 A 中点列。则由 A 列紧，E 中必有收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in A$, 且 $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}, \forall n$, 故 $\forall r > 0, \exists \boldsymbol{x}_N, s.t. \boldsymbol{x}_N \in E \cap B_r(\check{\boldsymbol{x}}) \neq \emptyset$, 故 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的凝聚点。A 是 Frechet 紧。 □

8.4.5 设 $F_1, \cdots, F_k, \cdots$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集族/非空紧致集族，满足 $F_k \supset F_{k+1}, k \geq 1$, 是否一定有 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.

解. 若是闭集，结论不一定成立，反例：在 $\mathbb{R}$ 中，$F_k = [k, +\infty)$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$.

若是紧致集，$\forall k \geq 1, \exists \boldsymbol{x}_k \in F_k$, 则 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F_1$ 是有界列，由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}$ 趋于 $\boldsymbol{x}$, 且 $\boldsymbol{x}_{k_i} \in \bigcap\limits_{l=1}^{k_i} F_l$, 使 $i \to \infty, \boldsymbol{x} \in \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} F_l \neq \emptyset$. □

8.5.2 $A \subset \mathbb{R}^n$. 若 A 既开又闭，求证 $A = \mathbb{R}^n$ 或 $A = \emptyset$.

解. 容易证明 $\mathbb{R}^n$ 和 $\emptyset$ 均满足条件。用反证法证明除此之外没有别的集合满足既开又闭。假设 A 既开又闭，且 $A \neq \mathbb{R}^n, A \neq \emptyset$. 则 $\mathbb{R}^n = A \cup A^c$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的剖分，且满足 $A \neq \emptyset, A^c \neq \emptyset, A$ 和 A^c 均为开集，而 $\mathbb{R}^n$ 是连通集，矛盾。 □

8.6.3 计算极限。

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$;

解.

$$\left|x^2y^2 \log\left(x^2+y^2\right)\right| \leq \left(x^2+y^2\right)^2 \left|\log\left(x^2+y^2\right)\right| \to 0, \text{ as } (x,y) \to (0,0).$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(\left|x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)\right|\right) = 1.$ □

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

解.

$$0 < \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)/2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} < 1,$$
$$0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0 \text{ as } x \to +\infty,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0,$ □

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$.

解.

$$0 < \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)} < (x+y)^2 e^{-(x+y)} \to 0,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)} = 0.$ □

8.6.5 (1) 求 $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处的两个累次极限。

解.

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0, \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0.$$

□

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right), \lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right).$

解.

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right)=0, \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right)=1.$$

□

(3) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to0^+}\frac{x^y}{1+x^y}, \lim\limits_{y\to0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}.$

解.

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to0^+}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{2}, \lim_{y\to0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}=1.$$

□

8.6.6 $f(x,y)=(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)$. 证明 2 个累次极限均不存在, 但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

解.

$$\lim_{y\to0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to0}x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

极限不存在，另一个累次极限同理，故 2 个累次极限均不存在。

$$0<\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le|x+y|\to0 \text{ as } (x,y)\to(0,0),$$

得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$ □

8.6.7 设

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=a$$

存在，又对 y_0 近旁得每一个 y, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 存在，证明 $\lim\limits_{y\to y_0}h(y)=a.$

解. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=a$ 存在，故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,||(x,y)-(x_0,y_0)||<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-a|<\varepsilon.$ 对不等式两边取上极限,

$$|h(y)-a|\le\overline{\lim_{x\to x_0}}|f(x,y)-a|\le\varepsilon$$

对 $||y-y_0||<\delta$ 成立，得 $\lim\limits_{y\to y_0}h(y)=a.$ □

8.6.8 $f(x,y)$ 在某点处得 2 个累次极限和极限都存在，则这 3 个值相等。

解. 由累次极限定义和 8.6.7 即可得到结论。 $\square$

8.7.2 设

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},(x,y)\in[0,1]^2\backslash\{(1,1)\},$$

求证:f 连续但不一致连续

解. 由 $1-xy$ 连续且其不为 0，则由极限的四则运算及得 $f(x,y)$ 连续。
取 $(x_n,y_n)=(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}),(x_n',y_n')=(1-\frac{1}{n},1)$,

$$|f(x_n,y_n)-f(x_n',y_n')|=\left|\frac{n-n^2}{2n-1}\right|\to+\infty \text{ as } n\to+\infty$$

故其不一致连续。 $\square$

8.7.3 设 $A\subset\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$. 定义

$$\rho(\boldsymbol{p},A)=\inf_{\boldsymbol{a}\in A}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}||,$$

称之为点 $\boldsymbol{p}$ 到集合 A 的距离，证明:

(1) 若 $A\neq\varnothing$, 则 $\bar{A}=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:\rho(\boldsymbol{p},A)=0\}$;

(2) 对任意的 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|\rho(\boldsymbol{p},A)-\rho(\boldsymbol{q},A)|\leq||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||.$$

这说明 $\rho(\boldsymbol{p},A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

解. (1) “$\subset$” :$\forall\boldsymbol{p}\in\bar{A}$,$\exists\{x_n\}\subset A$ 且 $x_n\to\boldsymbol{p}$, 则 $||x_n-\boldsymbol{p}||\to0$, 故 $\rho(\boldsymbol{p},A)=\inf_{\boldsymbol{a}\in A}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}||=0$.
“$\supset$” : 若 $\boldsymbol{p}\notin\bar{A}$, 因为 $\bar{A}$ 为闭集, 则 $\exists r>0$, 使得 $B_r(X)\cap\bar{A}=\varnothing$, 则 $||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}||\geq r,\forall\boldsymbol{a}\in A$, 则

$$\inf_{\boldsymbol{a}\in A}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}||\geq r, i.e.\rho(\boldsymbol{p},A)\neq0.$$

(2) 不妨设 $\rho(\boldsymbol{p},A)\leq\rho(\boldsymbol{q},A)$ 则只用证明 $\rho(\boldsymbol{p},A)\leq\rho(\boldsymbol{q},A)+||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||$. 由 $\rho(\boldsymbol{p},A)\leq||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}||\leq||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{q}||+||\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}||\quad\forall\boldsymbol{a}\in A$. 对右边取 inf，我们有 $\rho(\boldsymbol{p},A)\leq\rho(\boldsymbol{p},A)+||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||$. 故得证。 $\square$

8.7.4 设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$. 定义

$$\rho(A,B)=\inf\{||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||:\boldsymbol{p}\in A,\boldsymbol{q}\in B\}$$

称之为集合 A 和 B 之间的距离, 证明:

(1) 若 A 为紧致集，则存在一点 $\boldsymbol{a}\in A$, 使得 $\rho(\boldsymbol{a},B)=\rho(A,B)$;

(2) 若 A,B 为紧致集，则存在一点 $\boldsymbol{a}\in A$,$\boldsymbol{b}\in B$, 使得 $||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||=\rho(A,B)$;

(3) 设 A 为紧致集，B 为闭集，则 $\rho(A,B)=0$ 当且仅当 $A\cap B\neq\varnothing$.

解. (1) 由 $\rho(\boldsymbol{a})=\rho(\boldsymbol{a},B)$ 连续，且 A 为紧致集，则 ρ 可以在 A 上面达到最小值 $\boldsymbol{a}$. 且由范数的连续性，二重极限和累次极限相等。故我们有

$$\rho(\boldsymbol{a},B)=\min_{\boldsymbol{p}\in A}\rho(\boldsymbol{p},B)=\inf_{\boldsymbol{p}\in A}\inf_{\boldsymbol{q}\in B}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||=\inf_{\boldsymbol{p}\in A,\boldsymbol{q}\in B}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||=\rho(A,B).$$

(2) 由 (1)，则存在 $\boldsymbol{a} \in A$, 使得 $\rho(A,B) = \rho(\boldsymbol{a},B) = \inf_{\boldsymbol{b}\in B} ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||$. 固定 $\boldsymbol{a}$, 则 $\rho(\boldsymbol{b}) = \rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 关于 $\boldsymbol{b}$ 连续，B 为紧致集，故达到最小值 $\boldsymbol{b}$. 故我们有

$$\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{b}\in B} ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|| = \rho(\boldsymbol{a},B) = \rho(A,B)$$

(3) “$\Leftarrow$”：显然.
“$\Rightarrow$” 由 (1)，$\exists \boldsymbol{a} \in A$ 使得 $\rho(a,B) = \rho(A,B) = 0$, 则 $\exists \boldsymbol{b}_n \in B$ 使得 $||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}_n|| \to 0$。于是我们有 $\boldsymbol{b}_n \to \boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{a} \in B' \subset B \Rightarrow \boldsymbol{a} \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$. □