第五次习题课讲义

潘晨翔

2024 年 5 月 19 日

1　作业题

10.2.2 设有界集$B \subset \mathbb{R}^2$且B'是零面积集，求证$\overline{B}$也是零面积集。

解. 因为B'是零面积集，所以对任意的$\epsilon > 0$,存在有限个开矩形$I_1, I_2, \cdots, I_m$使得$B' \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$,并且$\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma(I_i) < \epsilon/2$.于是$\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$是一个有限集，否则由聚点定理知它与$B'$有交集，矛盾！于是可作有限个开矩形$I_{m+1}, I_{m+2}, \cdots, I_{m+k}$使得$\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i \subset \bigcup\limits_{i=m+1}^{m+k} I_i$,且$\sum\limits_{i=m+1}^{m+k} \sigma(I_i) < \epsilon/2$.因此$\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m+k} I_i$,并且$\sum\limits_{i=1}^{m+k} \sigma(I_i) < \epsilon$,所以$\overline{B}$是零面积集。 □

10.3.3 计算$\displaystyle\int_I f \mathrm{d}\sigma, I = [0,1]^2$.

(1) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \le x^2 \\ 0, & y > x^2 \end{cases}$; (2) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x^2 \le y \le 2x^2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$.

解.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \int_I f \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_0^{x^2} 1 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}. \\
&(2) \quad \int_I f \mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{x^2}^{2x^2} (x+y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_{x^2}^1 (x+y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&\qquad = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x^3 + \frac{3}{2}x^4) \mathrm{d}x + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (\frac{1}{2} + x - x^3 - \frac{x^4}{2}) \mathrm{d}x \\
&\qquad = \frac{21}{40} - \frac{\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}
$$

□

10.5.1计算下列积分：

(6) $\iint_D |\cos(x+y)|\, dxdy$, $D=[0,1]^2$;

(7) $\iint_D y^2 dxdy$, D由滚轮线

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\sin t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

与$y=0$围成;

解. (6) 记$E=\{(x,y)\in D|x+y\le \frac{\pi}{2}\}$ $\qquad F=\{(x,y)\in D|x+y>\frac{\pi}{2}\}$,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy &= \iint\limits_E \cos(x+y)dxdy - \iint\limits_F \cos(x+y)dxdy \\
&= \iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy - 2\iint\limits_F |\cos(x+y)|dxdy \\
&= \int_0^1 dy \int_0^1 \cos(x+y)dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}-1}^1 dx \int_{\frac{\pi}{x}-x}^1 cos(x+y)dy \\
&= \cos 2 + 2\cos 1 + 3 - \pi.
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D y^2 dxdy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dxdy \\
&= \int_0^{2\pi a} \frac{1}{3}(y(x))^3 dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(y(x(t)))^3 \frac{dx}{dt} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{3}(1-\cos t)^4 dt \\
&= \frac{35\pi a^4}{12}.
\end{aligned}$$

□

10.5.2改变下列累次积分的次序:

(7)$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy.$

解. (7) $\int_0^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x,y)dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\arccos y}^{\pi} f(x,y)dx.$

□

10.6.7设常数$a, b > 0$,

$$D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 ˇ x \ge y \ge 0\}.$$

计算二重积分

$$\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dxdy.$$

解. 令

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta, \end{cases}$$

换元的Jcaobi行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr,$$

对应的积分区域化为

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \arctan\frac{a}{b}\},$$

带入由换元公式得到

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dxdy &= \int_0^{\arctan\frac{a}{b}} d\theta \int_0^1 abr^2 dr \\ &= \frac{1}{3} ab \arctan\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

□

2 补充题

2022F T4设$\mathbb{R}^2$上的区域$D = \{(x,y) : |x| + |y| \le t, t \ge 0\}$.求极限$\lim\limits_{t\to\infty} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

解. 见书上对于概率积分的求法。 □

10.6Q.2设常数a,b不全为0.求证:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dt$$

解. 令

$$\begin{cases} s = \dfrac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ t = \dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

则$\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = 1$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy &= \iint\limits_{s^2+t^2\leqslant 1} f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dsdt \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dsdt \\ &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)dt\end{aligned}$$

□

2021E2 T5设二元函数$f(x,y)$在$D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$上有定义，并且$f(x,y)$对于任意$x\in[a,b]$,$f(x,y)$关于$y$在$[c,d]$上是单调递增函数;对于任意$y\in[c,d]$,$f(x,y)$关于$x$在$[a,b]$上是单调递增函数；证明$f(x,y)$在$D$上的间断点集是零测集。

解. 在x轴上将$[a,b]$n等分，在y轴上将$[c,d]$n等分，得到一个划分：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

将区域D分成n^2个小矩形，每个小矩形面积为$\dfrac{(b-a)(d-c)}{n^2} = \dfrac{\Delta}{n^2}$.

若能证明$\sum\limits_{i,j=1}^{n} w_{ij}\dfrac{\Delta}{n^2}\to 0(n\to\infty)$,则$f(x,y)$在$D$上可积，则间断点为零测集。

注意到$f(x,y)$分别关于x,y递增，所以在每个小矩形上$w_{ij} = f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}\frac{\Delta}{n^2} = \frac{\Delta}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1}))$$

相加时，D内部的每个网点上的值会被消去，最后只会剩下边界网点上的值。故

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}\frac{\Delta}{n^2} &= \frac{\Delta}{n^2}[\sum_{i=1}^{n}(f(x_i,y_n)-f(x_0,y_i-1))+\sum_{j=1}^{n}(f(x_n,y_i)-f(x_{i-1},y_0))] \\ &\leqslant \frac{\Delta}{n^2}[f(x_n,y_n)-f(x_0,y_0)]2n \\ &= 2\frac{\Delta}{n}[f(x_n,y_n)-f(x_0,y_0)]\to 0\end{aligned}$$

故$f(x,y)$在D上可积。 □

设$f(x,y)$在$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\}$上有连续的一阶偏导数，边界上取值为零。证明:

$$|\iint\limits_D f(x,y)dxdy|\leqslant \frac{1}{3}\pi a^3 \max_{(x,y)\in D}\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}$$

解. 记$M=\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}$.对于$\forall(x,y)\in D$,由原点做直线，与圆周交于一点，记为$(x_0,y_0)$. 利用Taylor公式，则有

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(x_0,y_0)+f_x(P)(x-x_0)+f_y(P)(y-y_0) \\ &= f_x(P)(x-x_0)+f_y(P)(y-y_0) \\ &\leqslant \sqrt{f_x^2+f_y^2}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\ &\leqslant M(a-r)(r^2=x^2+y^2)\end{aligned}$$

所以

$$|\iint\limits_D fdxdy|\leqslant\iint\limits_D |f|dxdy\leqslant M\iint\limits_D (a-r)rdrd\theta=\frac{\pi}{3}a^3M$$

□

设$D=[0,1]\times[0,1]$,$f(x,y)$是D上的连续函数，证明：有无穷多个(ξ,η)使得

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)$$

解. 若$f(x,y)$为常值，显然成立，下设不为常值

1. 由积分中值定理说明(ξ,η)存在
2. 由于D是有界闭区域，故存在不等的最小值和最大值
3. 分别说明$f(\xi,\eta)$既不是最小值也不是最大值
4. 以上已经说明了：(ξ,η),最小值点(x_1,y_1)，最大值点(x_2,y_2)是三个不同点。下证：在D中可作无穷多条连接$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$的折线，考虑过$(x_1,y_1)(x_2,y_2)$连线的中垂线，中垂线上每点与两点连成无数条互不相交的折线，在每一条这样的折线上由介值性可得到一点$f(\xi_k,\eta_k)$使得$f(\xi_k,\eta_k)=f(\xi,\eta)$

故得证。 □

设$F(a,b,c)=\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz$,其中$V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.证明:球面$S:x^2+y^2+z^2=1$ 是$F(a,b,c)$的等值面，并求其值。

解. 令$\xi=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,并以此作标准正交系。化简后再用球坐标系换元即可。 □

例. $K=\iiint\limits_V \cos(ax+by+cz)dxdydz, V:x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$

一些计算题

(1) $I=\iint\limits_D \dfrac{1}{xy}dxdy, D=\{(x,y):2\leqslant \dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\leqslant 4\}$.(极坐标换元，注意$\theta$的取值范围，$\ln^2 2$)

(2) $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2|$.(分为两个区域分别极坐标换元，$\dfrac{9\pi}{16}$)

(3) $I=\iiint\limits_\Omega x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$,$\Omega$是$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=x^2+y^2$围成的区域.(柱坐标换元，$\dfrac{\pi}{42}$)

(4) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$所围的体积.(球坐标换元，$\dfrac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$)

除此以外，一元函数的积分要好好掌握!!!