第三次习题课讲义

潘晨翔

2024 年 4 月 14 日

1 隐函数定理、隐映射定理、逆映射定理

1.1 隐函数定理、隐映射定理

定理 (二元情形)**.** *设开集 $D \subset \mathbb{R}^2$, 函数 $F : D \to \mathbb{R}$ 满足条件:*

(a) $F \in C^1(D)$;

(b) 点 $(x_0, y_0) \in D$ 使得 $F(x_0, y_0) = 0$;

(c) $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

那么存在一个包含 (x_0, y_0) 的开矩体 $I \times J \subset D$, 使得:

(1) 对每一个 $x \in I$, 方程 $F(x, y) = 0$ 在 J 中有唯一解 $f(x)$;

(2) $y_0 = f(x_0)$;

(3) $f \in C^1(I)$;

(4) 当 $x \in I$ 时，有

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)},$$

其中 $y = f(x)$.

注. *(1)* 如何理解“隐函数”中的“隐”？只知道函数 f 存在，但是大多数情况无法得到 f 比较好的解析表达。

(2) 如何方便地记忆结论 (4)? 函数 $y = f(x)$ 存在，故有恒等式

$$F(x, f(x)) \equiv 0,$$

对两边求导，便有

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x) \equiv 0$$

即得。

定理 (多元情形推广)**.** *设开集 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 函数 $F : D \to \mathbb{R}$, 满足条件:*

(a) $F \in C^1(D)$;

(b) $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$, 且 $(\boldsymbol{x}_0, y_0) \in D$;

(c) $\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

那么存在 $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$ 的一个邻域 $G \times J$, 其中 G 是 $\boldsymbol{x}_0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个邻域，J 是 $\mathbb{R}$ 中含 y_0 的一个开区间，使得:

1. *对每一个 $\boldsymbol{x} \in G$，方程*

$$F(\boldsymbol{x}, y) = 0$$

在 J 中有唯一解，记为 $f(\boldsymbol{x})$;

2. *$y_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$;*

3. *$f \in C^1(G)$;*

4. *当 $\boldsymbol{x} \in G$ 时，*

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, y)}(i = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 $y = f(\boldsymbol{x})$.

例 1. 书上习题是最基本的，一定不能算错。*(见作业答案 5)*

例 2. 证明：由方程 $y = x\phi(x) + \psi(x)$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足：

$$(\frac{\partial z}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(2022 年 A2 小测 1 T4，解答见群文件。)

例 3. 设

(1) $F(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续，F 是三次齐次函数，即 $\forall t \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$F(tx,ty,tz) = t^3 F(x,y,z);$$

(2) F 有连续偏导数，且

$$F_z(x,y,z) \neq 0$$

(3) $z = f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的隐函数，且 f 可微。

求证：$z = f(x,y)$ 是一次齐次函数。

解. 1. 因 $z = f(x,y)$ 是 $F(x,y,z)$ 所确定的隐函数，故有

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

2. 由条件 2，和导函数的介值性，有 $F_z^{'}$ 不变号，因此在 $\mathbb{R}^2$ 上隐函数 $z = f(x,y)$ 存在且唯一。

3. 我们有

$$\begin{aligned} &F(tx,ty,tf(x,y)) = t^3 F(x,y,f(x,y)) = 0 \\ &F(tx,ty,f(tx,ty)) = 0 \end{aligned}$$

故

$$F(tx,ty,tf(x,y)) - F(tx,ty,f(tx,ty)) = 0$$

对上式左边应用 Lagrange 定理:

$$F_z(tx,ty,\xi)[tf(x,y) - f(tx,ty)] = 0$$

再由条件（2）,$F_z(tx,ty,\xi) \neq 0$. 故

$$tf(x,y) = f(tx,ty)(\forall t \in \mathbb{R})$$

即得证。

□

定理 (对多元情形多函数推广)**.** 设开集 $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$,$\boldsymbol{F}: D \to \mathbb{R}^m$, 满足下列条件*:*

(a) $\boldsymbol{F} \in C^1(D)$;

(b) 有一点 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$, 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$;

(c) 行列式 $\det \boldsymbol{J_y F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$.

那么存在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的一个邻域 $G \times H$, 使得:

(1) 对每一个 $\boldsymbol{x} \in G$, 方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ 在 H 中有唯一解，记为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$;

(2) $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$;

(3) $\boldsymbol{f} \in C^1(G)$;

(4) 当 $\boldsymbol{x} \in G$ 时,

$$\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{J_y F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\boldsymbol{J_x F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

其中 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

例 4. 书上习题熟练掌握。(见作业答案 5)

例 5. 证明: $\begin{cases} e^{xu}\cos(yv) = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{xu}\sin(yv) = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \frac{\pi}{4})$ 的邻域里确定了唯一的隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 并求 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v, \mathrm{d}^2u, \mathrm{d}^2v$ 在点 P_0 处的值。

解.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) \\
\mathrm{d}v &= -\frac{1}{2}\mathrm{d}x + (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4})\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}^2u &= -\mathrm{d}x^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}^2v &= \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x\mathrm{d}y + (\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2})\mathrm{d}y^2
\end{aligned}$$

可自行验算。 □

1.2 逆映射定理

定理 (局部逆映射定理)**.** 设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$,$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^n$ 满足:

(a) $\boldsymbol{f} \in C^1(D)$;

(b) 有 $\boldsymbol{x}_0 \in D$, 使得 $\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$.

记 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 那么存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域 U 和 $\boldsymbol{y}_0$ 的一个邻域 V, 使得:

(1) $\boldsymbol{f}(U) = V$, 且 $\boldsymbol{f}$ 在 U 上是单射:

(2) 记 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 U 上的逆映射，$\boldsymbol{g} \in C^1(V)$;

(3) 当 $\boldsymbol{y} \in V$ 时，$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$.

定理 (逆映射定理)**.** 设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$,$\boldsymbol{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$, 满足:

(a) $\boldsymbol{f} \in C^1(D)$;

(b) 对每一个 $\boldsymbol{x}_0 \in D$,$\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

那么 $G = \boldsymbol{f}(D)$ 为一个开集。又如果:

(c) $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的单射,

那么:

(1) 存在从 G 到 D 上的映射 $\boldsymbol{f}^{-1}$, 满足: 对一切 $\boldsymbol{y} \in G$, 有 $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$;

(2) $\boldsymbol{f}^{-1} \in C^1(G)$;

(3) $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}$

定义. 设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$. 映射 $\boldsymbol{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$ 满足以下三个条件:

(1) $\boldsymbol{f} \in C^1(D)$;

(2) $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的单射;

(3) $\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ 对一切 $\boldsymbol{x} \in D$ 成立。

我们称 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的一个正则映射。

例 6. 书上习题验证开映射，直接证明行列式不为 *0* 即可，很多同学求逆矩阵没有除矩阵的行列式 *(*见作业答案 *5)*。

例 7. 设 $f(x, y)$ 存在二阶连续偏导数，且 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, 证明变换:

$$\begin{aligned} u &= f_x(x, y) \\ v &= f_y(x, y) \\ w &= -z + xf_x(x, y) + yf_y(x, y) \end{aligned}$$

存在唯一的逆变换:

$$
\begin{aligned}
x &= g_u(u,v) \\
y &= g_v(u,v) \\
z &= -w + ug_u(u,v) + vg_v(u,v)
\end{aligned}
$$

解. 容易发现证明结论只需证明前两条，第三条由前两条和第三个条件显然推出。而欲证前两条，等价于证明存在函数 $g(u,v)$, 使得 $\mathrm{d}g = x\mathrm{d}u + y\mathrm{d}v$ 成立。故由前两个条件，我们有:

$$
\begin{aligned}
x\mathrm{d}u + y\mathrm{d}v &= xf_{xx}\mathrm{d}x + xf_{xy}\mathrm{d}y + yf_{yx}\mathrm{d}x + yf_{yy}\mathrm{d}y \\
&= (xf_{xx} + yf_{yx})\mathrm{d}x + (xf_{xy} + yf_{yy})\mathrm{d}y \\
&= (xf_x + yf_y - f)_x\mathrm{d}x + (xf_x + yf_y - f)_y\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

故我们令 $g = xf_x + yf_y - f$ 即为所求。另一方面对于方程组

$$
\begin{aligned}
F &= u - f_x(x,y) = 0 \\
G &= v - f_y(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0
$$

故逆变换存在且唯一。 □

2 高阶偏导数、中值定理和 Taylor 公式

高阶偏导数最重要的就是熟练运用链式法则去验证恒等式；中值定理和 Taylor 公式总体考的不多，考前简单看一看书后问题就可以了。

例 8. *2022 年期末 T2，见群文件。*

例 9. *2022 年第一次小测 T7 (问题 9.9T1)，算是为数不多的证明题，思路也是比较明确。*

3 （条件）极值

这一块理论倒不是很重要，重点在于如何去构造 Lagrange 函数和求 Hesse 矩阵去求目标函数的最值（极值），如何更好地构造函数和约束，使得自己的计算变得简便。

例 10. *书上习题最好自己都动手算一遍，考试的时候一定要细心，如果算错就比较麻烦了。*

例 11. *已知 $\triangle ABC$ 的三条边长分别为 a, b, c, 以 $\triangle ABC$ 为底作高为 h 的三棱锥，利用拉格朗日乘数法求出此三棱锥顶点的位置，使得三棱锥的三个侧面积之和最小，并求出该最小值。(2022 年期末 T4，解答可见群文件)*

例 12. *设* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy^2z^3 = 1\}$.

(1) S 是否连通，是否紧致？

(2) 点 p 满足 $||p|| = \inf\limits_{q \in S} ||q||$, 求 p 组成的集合。

解. (1) 显然不连通；考虑点列 $\{(n, n, \frac{1}{n})\}$, 故不紧致。

(2) 设 Lagrange 函数 $L = x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda(xy^2z^3 - 1)$, 由 Lagrange 乘子法，可解得 $x^2 = \lambda, y^2 = 2\lambda, z^2 = 3\lambda$, 代入约束条件。即可求得所需点集。

□

例 13. *设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，f 在 D 上连续且有偏导数。证明: 如果在 D 上有 $f_x + f_y + f_z = f, f|_{\partial D} = 0$, 则 f 在 D 上恒等于 0.*

解. 在有界闭区域上连续，则一定有最大值和最小值点。若最值点 p 是内点，则 p 也是 f 的极值点。故有 $f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0$. 再由条件有 $f(p) = f_x(p) + f_y(p) + f_z(p) = 0$. 若 $p \in \partial D$, 则有条件我们仍有 $f(p) = 0$. 因此，f 在 D 上，既有最大值点也有最小值点，并且在所有最值点上，都有 $f(p) = 0$, 故 $f \equiv 0$。 □