数学分析 A2 第二次习题课讲义

2024 春

作者：wclw

时间：2024 年 3 月 31 日

第 1 章 基础内容

1.1 极限、连续、导数、微分

我们首先来回忆从多变量函数（映射）的极限，连续，方向导数到微分的概念.

定义 1.1 (极限)

$a \in D'$，$\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$x \in D$ 且 $0 < ||x - a|| < \delta$ 时，有 $|f(x) - l| < \epsilon$. ♣

可以通俗地理解为，在 x 趋近于 a 的时候，$f(x)$ 趋近于 l. 需要考虑以下两个问题：

1. f 在 a 处的定义：只考虑极限时，当然不要求 f 在 a 处存在定义；
2. x 以何种方式趋近于 a：与单变量函数不同的是，在 $\mathbb{R}$ 上，x 只能从实轴的左右趋近于 a，因此极限的存在性等价于单边极限的存在性且要求相等. 但是在多变量函数中，这种趋近方式是多样的，在不同的趋近方式下如果算出来的值不同，自然说明极限的不存在性.

对于极限的计算，习题中已经给出了很多常用的手段，包括但不限于放到指数上面，放缩为和模长相关的表达式（由于极限的定义是依据模进行的）.

练习 1.1 计算极限,8.6.3

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解

(1)

$$\left|x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)\right| \le \left(x^2+y^2\right)^2\left|\log\left(x^2+y^2\right)\right| \to 0,\ \text{as } (x,y)\to(0,0).$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(\left|x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)\right|\right) = 1.$

(2)

$$0 < \frac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{(x^2+y^2)/2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} < 1,$$
$$0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0 \text{ as } x\to+\infty,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0,$

(3)

$$0 < \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)} < (x+y)^2e^{-(x+y)} \to 0,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)} = 0.$

注 在这里需要注意一个写法的问题，还没有证明极限存在性时，若要放缩请写为上下极限的形式.

当然对于极限的计算问题，我们不能先对一个变量求极限，再对另一个变量求极限，由于累次极限和重极限的区别是巨大的. 这部分内容隔壁班助教写的很明确，打算直接引用了. 课本上也有不少相关的题目. 更多的反例请参考汪林《数学分析中的问题和反例》P315 反例们.

至于一些极限不存在的问题，通用的办法大致如下：

1. 不同方向进行趋向得到的结果不同，其实本质也是不同的点列趋向得到的结果不一致；
2. 累次极限均存在但是结果不一致（这其实是 8.6.8 的推论）.

我们引入极限的目的实际上是为了定义所谓的连续性.

定义 1.2 (连续)

$a \in D, \forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$x \in D$ 且 $0 < ||x - a|| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. ♣

我们需要注意：

1. 连续是一个点态的性质，刻画的是一点处的极限等于一点处的函数值，因此函数必须在该点处存在定义；
2. 这里的 δ 除了与 ϵ 有关，还与 a 有关，这也是区分一致连续与连续的关键；
3. 在极限的定义中，$a \in D'$，但是在这里并没有要求. 根据这里的定义容易发现，孤立点处总是连续的.

我们可以发现，在非孤立点处，连续的定义本身就是验证一个极限过程. 极限若不存在自然不连续，若不等于该点处的函数值亦不连续. 证明的时候请指出极限为什么不存在，需要指明点列或者一些方向！请不要直接说不存在.

和单变量函数一样，也有一致连续的概念：

定义 1.3 (一致连续)

$\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $0 < ||x_1 - x_2|| < \delta$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. ♣

直观的想法是，当两个点之间的距离足够小的时候，他们的函数值也会足够的小. 证明一致连续的时候遵从定义，证明不一致连续的时候可以考虑点列.

练习 1.2 连续但不一致连续, 8.7.2

设

$$f(x,y) = \frac{1}{1-xy}, (x,y) \in [0,1]^2 \backslash \{(1,1)\},$$

求证:f 连续但不一致连续.

证明 由 $1 - xy$ 连续且其不为 0，则由极限的四则运算及得 $f(x,y)$ 连续。

取 $(x_n, y_n) = (1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}), (x'_n, y'_n) = (1 - \frac{1}{n}, 1)$,

$$|f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n)| = \left|\frac{n - n^2}{2n - 1}\right| \to +\infty \text{ as } n \to +\infty$$

故其不一致连续.

练习 1.3 问题 9.1

设D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的凸区域，$f:\ D \to \mathbb{R}$. 如果 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上有界，证明 f 在 D 上一致连续.

证明 设 M 是 $|\frac{\partial f}{\partial x}|$ 和 $|\frac{\partial f}{\partial y}|$ 的共同上界. 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. 对于任意一对满足 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < \delta$ 的 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$，设

$$g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2),$$

那么存在 $\xi \in [0,1]$ 使得

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = |g(1) - g(0)| = |g'(\xi)| = |(x_1 - x_2)f_x + (y_1 - y_2)f_y| \le 2\delta M = \varepsilon.$$

因此 f 在 D 上一致连续.

问题 1.1 一致连续函数的特征

设 $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，称 f 的陡弦是短的，当且仅当存在 P，使得当 $||f(x) - f(y)|| > P||x - y||$ 时，就有

$$||(x, f(x)) - (y, f(y))|| < \epsilon.$$

(1) 若 $n = 1$，则该条件等价于一致连续.(Paine,D. Visualizing Uniform Continuity, 1968.)

(2) 若 $n > 1$，则上述命题不成立，但是该条件等价于一致连续 + 另一个条件.(K.F.Klopfenstein and John Telste, 1978.)

连续函数有很多本质特征，如开集的原像是开集，那么自然地，闭集的原像是闭集. 这里的拓扑都是全空间上的拓扑，拓扑中对于连续性的定义也是如此. 除此之外，连续映射可以将紧致集映为紧致集（体现为最大最小值），连通集映为连通集（体现为介值定理）.

注 事实上，紧致性与连通性是一种拓扑性质，要求在同胚下维持，同胚要求连续映射的逆映射也连续，这意味着开集间形成了“一一对应”，表明两个空间拓扑的等价性. 我们熟知的 $\mathbb{R}^n$ 空间可以自然推广为度量空间，在度量空间的结构下自列紧与紧始终是等价的（请参考 Prob1 的 T4).

习题中讲到了很多与距离函数相关的性质，请记住相关的结论，以后会用到. 实际上，可以举一个简单的应用.

问题 1.2 Urysohn 定理

(1)(度量空间中的 Urysohn 定理) 对于 (X, d) 上任意两个不相交的闭集 A 和 B，存在 X 上的连续函数，使得在 A 和 B 上的取值为 0 和 1.

(2)(Urysohn 定理) 如果 X 满足 $T4$ 公理，则有相同的结论. $T4$ 公理即任两个不相交的闭集存在开邻域将其分隔开.

(3)(Tietze 扩张定理) 如果 X 满足 $T4$ 公理，则定义在 X 闭子集 F 上的连续函数可以连续扩张到 X 上，这可以视为 Urysohn 定理的应用.

证明 对于 (1) 只需要考虑

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

注

1. 这里恰好是问题 8.7.1 给出的结果.
2. 对于 (2)，事实上度量空间的结构是非常好的，满足 $T1$（任意两个不同，x 有邻域不含 y，y 有邻域不含 x), $T2$（任意两点有开邻域分隔开），$T3$（任意一点与闭集可以分隔开）与 $T4$. 关于更多点集拓扑的知识请自行阅读.
3. 对于 (3) 我们有更多更有趣的结果，对于一般的度量空间，开集上的连续函数是否一定能连续延拓到全空间 (否)，开集上的一致连续函数是否一定能连续延拓到全空间 (是)，对于 $\mathbb{R}^n$，稠密子集上的一致连续函数甚至也可以连续延拓到全空间.

对于连续映射，我们现在只需要考虑映射的结果为 m 个连续的函数. 对于其余性质，我们均可以照搬过来，但是需要注意在 $\mathbb{R}^m$ 中我们无法直接体现最大最小值和介值.

这里的 8.8.1 其实与连续的充要条件有关.

练习 1.4 连续的充要条件，8.8.1 f 连续，等价于如下的命题：

1. 开集的原像是开集；

2. 闭集的原像是闭集;
3. 任意集合 E，有 $f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$.

证明

1. (1)、(2) 与连续的等价是容易的. 只需要证明连续与 (3) 的等价性.
2. 连续 $\to$ (3): 由 $\overline{f(E)}$ 为闭集，且 f 为连续函数, 则 $f^{-1}(\overline{f(E)})$ 为闭集. 而由定义 $E \subset f^{-1}(\overline{f(E)})$, 两边取闭包有 $\overline{E} \subset f^{-1}(\overline{f(E)})$. 则有 $f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$.
3. (3) $\to$ 连续: 若 f 不连续，则存在点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$x_n \to x$, 但是 $||f(x_n) - f(x)|| \geq \epsilon_0$. 取 $E = \{x_n\}$，则 $\bar{E} = \{x_n\} \cup \{x\}$，根据条件 $f(x) \in \overline{f(\{x_n\})}$，得出矛盾.

对于 8.8.2，与闭图像定理的证明方法类似.

✍ **练习 1.5 图像的闭性，8.8.2** 设 $E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}^n$. 证明:

(1) 若 E 是闭集, f 连续, 则 f 的图像

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\}$$

是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的闭集;

(2) 若 E 是紧致集, f 连续, 则 $G(f)$ 也是紧致集;

(3) 若 $G(f)$ 是紧致集, 则 f 连续.

证明

(1)$\forall$ $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$, 则 $x_n \to x$ 且 $x_n \in E$, E 为闭集, 则 $x \in E$. 由 f 连续, 则 $f(x_n) \to f(x)$. 而 $f(x_n) \to y \Rightarrow f(x) = y$, 则 $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$.

(2)$g : E \to G(f) \quad g(x) = (x, f(x))$ 则由 f 连续 $\Rightarrow g$ 连续. 由 E 为紧致集，则 $G(f)$ 也为紧致集.

(3) 若 f 在 x_0 点处不连续, 则 $\exists\epsilon_0, \exists x_n$ 使得 $|f(x_0) - f(x_n)| > \epsilon_0 \quad n = 1, 2, ...$

由$G(f)$ 为紧致集, 则对 $\{(x_n, f(x_n))\}$ 存在收敛子列 $\{(x_{n_k}, f(x_{n_k}))\} \to (x, f(x))$.

由$x_n \to x_0$, 则 $x_0 = x \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ 矛盾.

至于问题 8.8，其实主要在考虑“同胚”.

问题 1.3 同胚相关，问题 8.8

(1) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧致集，f 为 E 上的连续单射，记 $f(E) = D$. 证明 f 为同胚.

(2) 证明 [0,1] 与单位圆周不同胚.

(3) 证明 [0,1] 与 [0,1]×[0,1] 不同胚.

证明

(1) 即证明 f^{-1} 连续，只需 f 为闭映射，即闭集的像为闭集.

E 为紧集，则 E 中闭集为紧集（紧致空间的闭子集紧），因此 $f(E)$ 紧（由于连续映射保持紧性），则自然闭.

实际上这里要求 D 是 Haussdorf 的 (T2 的)，在这类拓扑空间中紧集才是闭集，不过我们现在均默认在 $\mathbb{R}^n$ 中. 事实上，这个定理的完整表述是，紧致空间到 Haussdorf 空间的连续一一映射为同胚.

(2)[0,1] 去掉一个点后不连通，单位圆周去掉一个点后连通，因此不同胚.

(3) 与 (2) 同理，事实上，一个凸多边形 (体) 同胚于相同维度的球.

注 证明不同胚最经典的办法之一就是利用拓扑性质的不相同. 以后还会从基本群等角度考虑.

接下来进入方向导数的概念，这个定义也是导数定义的自然延申.

定义 1.4 (方向导数)

$\boldsymbol{u}$ 为一个方向，考虑极限

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\boldsymbol{u})-f(x_0)}{t}.$$

♣

注 在这里需要说明的是，若 $\boldsymbol{u}$ 为一个方向，则 $-\boldsymbol{u}$ 为其反方向，方向并不相同，但是方向导数的结果差一个符号. 因此找存在方向导数的方向时，请全部列举.

✍ **练习 1.6 方向导数的计算，9.1.4** 设函数 $f(x,y,z)=|x+y+z|$. 在平面 $x+y+z=0$ 上的每一点处，沿着哪些方向 f 的方向导数存在?

解 令 $v=(v_1,v_2,v_3)$，则在 (x_0,y_0,z_0) 点处

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to 0}\frac{|tv_1+tv_2+tv_3|}{t},$$

则只有 $v_1+v_2+v_3=0$ 才有极限存在. 故沿着平面内的任意方向都可以.

对于标准化的方向，我们定义了偏导数:

定义 1.5

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_i+t,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_n)}{t}.$$

♣

计算的时候即将别的变量都看成常数求导就行了. 事实上对于可微的函数，可以利用偏导数求出任意方向的方向导数. 接下来来到最核心的概念，(全) 微分.

定义 1.6 (可微，微分)

设 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$，若

$$f(x_0+\boldsymbol{h})-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_i+o(||h||),$$

其中 λ_i 为不依赖于 $\boldsymbol{h}$ 的常数，那么 f 在点 x_0 处可微，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i h_i$ 为 x_0 处的微分，记作

$$df(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_i.$$

♣

可微同样是一个点态的概念. 容易求出若可微，则 $\lambda_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，因此对于可微的验证，我们需要验证如下等式的成立性:

$$\lim_{||h||\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i}{||h||}=0.$$

✍ **练习 1.7 可微的验证，9.2.6**

证明：二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处可微，但它的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

证明 分别计算 x,y 的偏导数得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t}=0,$$

类似计算有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t}=0.$$

由于

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0,y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

故其在原点处可微. 而在不在原点处的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

沿 $y=0$ 方向趋向于原点时，极限不存在. 故不连续.

关于 y 的偏导数同理可得不连续.

如果要验证不可微，一方面可以验证上面等式的不成立：

练习 1.8 不可微的验证 1，9.2.2

证明：函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微.

证明 先计算

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,$$

类似计算有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0,$$

假设 f 在原点处可微, 则只有

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

于是我们有

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

但是取 $x=y$ 方向趋向于原点, 则得到极限为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 矛盾.

注 请务必说明为什么极限不存在.

另一方面也可以直接说函数不连续，因为可微必然连续：

练习 1.9 不可微的验证 2，9.2.1

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

求证：函数 f 在原点处的各个方向导数存在, 但在原点处 f 不可微.

证明 令 $v=(\cos\theta,\sin\theta)$, 则沿着 v 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2\cos^2\theta\cdot t\sin\theta}{t^4\cos^4\theta+t^2\sin^2\theta}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

若 $\sin\theta \neq 0$ 则有

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta};$$

若 $\sin\theta = 0$ 则有

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0.$$

故各个方向导数存在.

但取 $x = 0$ 方向和 $y = x^2$ 方向逼近原点，分别得到 0 和 $\frac{1}{2}$, 故在原点处不连续，故不可微.

最后我们需要梳理已知这几个概念间的关系，并且记住一些反例，如图所示.

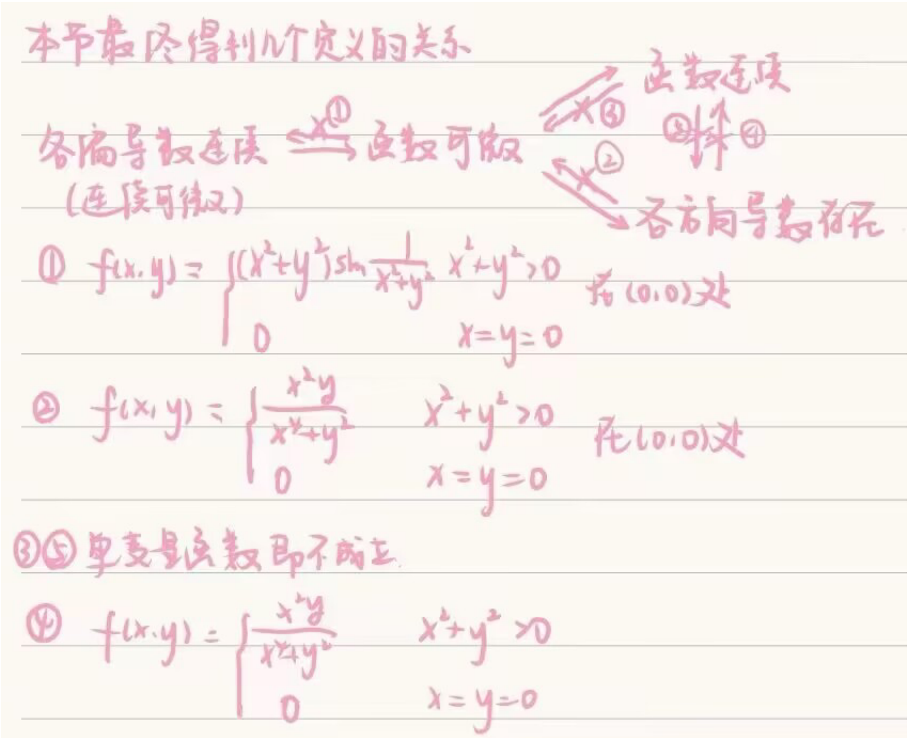

图 1.1: 连续、方向导数、可微

如下的例子综合了这几个概念：

练习 1.10 概念综合

设函数 $f(x,y) = |x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在 (0,0) 的邻域内有定义，要求给 $\varphi(x,y)$ 加上条件，使得

1. $f(x,y)$ 在 (0,0) 连续；
2. $f(x,y)$ 在 (0,0) 存在偏导数；
3. $f(x,y)$ 在 (0,0) 可微.

解 见网页端 xhm 习题课讲义下册 P173 例题 19.2.3.

值得一提的是各阶偏导数连续推出可微的命题，对于二元函数，有一个弱化的条件，两者的证明方法也是极为类似的：

练习 1.11 二元函数可微的充分条件，问题 9.2.2

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一个邻域 U 上有定义，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上存在. 证明：如果其中有一者连续，则函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

证明 不妨设 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 处是连续的. 注意到当 $(h,k)\to(0,0)$ 时有

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)\\
&= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)\\
&= f_y(x_0+h, y_0+\theta k)k + f_x(x_0, y_0)h + o(h)\\
&= (f_y(x_0, y_0) + o(1))k + f_x(x_0, y_0)h + o(h)\\
&= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}),
\end{aligned}$$

等式的第三行前一项运用了对 y 的中值定理，后一项利用了对 x 偏导的存在性. 第四行前一项运用了对 y 偏导的连续性. 因此 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微.

映射的微分即对函数进行升维.

练习 1.12 9.3.3 设区域 $D\subset\mathbb{R}^n$, 映射 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}: D\to\mathbb{R}^n$. 求证:

(3) 当 $m=1$ 时，有 $\mathbf{J}(\boldsymbol{fg}) = \boldsymbol{g}\mathbf{J}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\mathbf{J}\boldsymbol{g}$;

(4) 当 $m>1$ 时，有

$$\mathbf{J} < \boldsymbol{f},\boldsymbol{g} >= \boldsymbol{g}(\mathbf{J}\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{J}\boldsymbol{g}),$$

证明 (3) 由

$$\frac{\partial \boldsymbol{fg}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} * \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} * \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x}$$

这对应于问题中每个分量的值，故成立.

(4)

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle &= \left(\frac{\partial\sum_{k=1}^m f_k g_k}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\sum_{k=1}^m f_k g_k}{\partial x_n}\right) = \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k g_k}{\partial x_1},\ldots,\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k g_k}{\partial x_n}\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\cdot g_k + f_k\cdot\frac{\partial g}{\partial x_1},\ldots,\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\cdot g_k + f_k\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_n}\right) = \boldsymbol{g}(\mathbf{J}\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{J}\boldsymbol{g})
\end{aligned}$$

事实上，对于线性变换而言，$\mathbf{J}$ 即线性变换在标准基下的矩阵，这个矩阵蕴含着大量与线性变换有关的信息. 接下来考虑链式法则，这在计算中是非常重要的.

练习 1.13 9.4.6

设$u=f(x,y)$，当 $y=x^2$ 时，有 $u=1$，且 $\frac{\partial u}{\partial x}=x$，求 $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=x^2}$.

解

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x,x^2) = f_1(x,x^2) + 2xf_2(x,x^2) = x + 2xf_2(x,x^2),$$

因此,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2} = -\frac{1}{2}$$

练习 1.14 9.4.8

设 $f(x,y,z) = F(u,v,w)$, 其中 $x^2=vw$,$y^2=wu$,$z^2=uv$, 求证:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v} + w\frac{\partial F}{\partial w}$$

证明 下面都考虑导数存在，故不考虑 $u,v,w=0$ 的情形由

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w},$$

代入要证的式子，则只用证明

$$x=\frac{\partial x}{\partial v}v+\frac{\partial x}{\partial w}w$$

其余两条同理，由于 $x^2=vw$ 两边分别对 v 和 w 求导

$$2x\frac{\partial x}{\partial v}=w,2x\frac{\partial x}{\partial w}=v.$$

代入即有等式成立.

练习 1.15 9.4.10

设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中可微，又设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中三个互相垂直的方向. 求证:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_3}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

证明 记

$$A=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$$

则由方向导数计算方法得到

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_1}\\\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_2}\\\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_3}\end{pmatrix}=A^T\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\\\frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$$

由 A 为正交阵带入得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_3}\right)^2=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_1}&\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_2}&\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_1}\\\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_2}\\\frac{\partial f}{\partial\mathbf{e}_3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}&\frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}AA^T\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\\\frac{\partial f}{\partial Z}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

注 类似的处理在证明微分几何中的不变量是常见的.

练习 1.16 齐次函数，问题 9.4.2

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，如果对 $t>0$，$q\in\mathbb{R}$，有 $f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^qf(x_1,\cdots,x_n)$，则称 f 为 q 次齐次函数.

(1)f 为 q 次齐次函数等价于 $\forall x\in\mathbb{R}^n$,

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=qf(x).$$

(2)$f(x_1,\cdots,x_n)$ 为二次连续可微的 q 次齐次函数，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 为 $q-1$ 次齐次函数.

(3)$f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 m 次连续可微的 q 次齐次函数，则有

$$(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^mf=q(q-1)\cdots(q-m+1)f.$$

这里 $(x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n})^m$ 可以视为一个算子.

证明

(1) 左推右：齐次函数定义两边同时对 t 求导，取 $t=1$ 即可.

右推左：令 $\varphi(t)=\frac{f(tx_1,\cdots,tx_n)}{t^q}$，则 $\varphi'(t)=0$. 取 $t=1$ 即可得出结论.

(2) 齐次函数定义两边同时对 x_i 求导即得.

(3) 齐次函数定义两边对 t 求导,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = qt^{q-1}f(x).$$

即作用一次偏微分算子. 归纳后取 $t=1$ 即得.

练习 1.17 正则映射,问题 9.4.1

(1) 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. 证明:对非零的实数 a,b 与 c,

$$\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{b}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial z}$$

等价于,存在 $g \in C^1(\mathbb{R})$,使得

$$f(x,y,z) = g(ax+by+cz).$$

(2) 设函数 $u = f(x,y,z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$. 证明:$u$ 仅为 r 的函数,其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,当且仅当对于非零的 x,y,z,有 $\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y} = \frac{f'_z}{z}$ 成立.

证明

(1) 右推左显然,只需左推右:

考虑正则映射 $u = ax+by+cz$,$v = y$,$w = z$. 则

$$f(x,y,z) = f(\frac{1}{a}(u-bv-cw), v, w) = h(u,v,w).$$

因此

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{a}.$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-b}{a} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-c}{a} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

因此 $h(u,v,w) = g(u)$,进而得到结论.

(2) 同样只需左推右:

设正则映射如下(也可用其他正则映射,如球坐标):

$$\begin{cases} t = x^2+y^2+z^2 \\ v = y \\ w = z \end{cases}$$

验证这是正则映射:

$$\frac{\partial(t,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x \neq 0, \text{ if } xyz \neq 0$$

即在给定条件下是正则映射.

由于:

$$f'_x = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot 2x, \quad f'_y = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot 2y, \quad f'_z = \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot 2z$$

由条件得:

$$\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial w}=0$$

故 u 仅是 $t=r^2$ 的函数, 即 u 仅是 r 的函数.

1.2 曲线与曲面

这里其实在局部微分几何课程里面会重新学习. 请大家务必牢记曲率公式, 切平面公式与第一基本型公式. 关于计算的细节请大家参考作业答案, 实际上几乎处处只在套如下的公式:

1. 任意参数的曲率公式:
$$k(t)=\frac{||r'(t)\times r''(t)||}{||r'(t)||^3}.$$
2. 对于隐式曲面 $f(x,y,z)=0$, 当然显式曲面很容易转化, 切平面公式:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)=0.$$
3. 对于参数曲面, 我们需要回顾整个流程. 结论为法向量具有如下形式:
$$(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}).$$
4. 对于第一基本型:
$$E=||r_u||^2=(\frac{\partial x}{\partial u})^2+(\frac{\partial y}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial u})^2.$$
$$F=r_u\cdot r_v=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$
$$G=||r_v||^2=(\frac{\partial x}{\partial v})^2+(\frac{\partial y}{\partial v})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2.$$
$$I=E\mathrm{du}^2+2F\mathrm{du}\mathrm{dv}+G\mathrm{dv}^2=<\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r}>.$$

问题 1.4 曲面局部几何

我们已经定义了曲面的第一基本型, 现在考虑如下问题的表达式:

(1) 切平面中元素的内积;

(2) 曲面上曲线的弧长;

(3) 证明: 第一基本形式不依赖于参数的选取, 不依赖于刚体运动.

现在我们来定义曲面的第二基本形式. 我们考虑如何反应曲面的弯曲程度.

(4) 考虑 $\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0+\delta u,v_0+\delta v)-\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$, 考虑该偏移向量在曲面一点处法向的投影, 尝试计算该投影的长度. (提示: 将 $\boldsymbol{r}$ 展开到二阶.)

(5) 证明:

$$<\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{n}>=-<\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{n}_u>=:L.$$

$$<\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{n}>=-<\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{n}_v>=-<\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}_u>=:M.$$

$$<\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{n}>=-<\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}_v>=:N.$$

定义

$$II = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2.$$

(6) 证明：$II = - < \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{n} >$.

(7) 证明：第二基本形式不依赖于参数的选取（正参数变换保持相同，反参数变换差一个负号）；不依赖于刚体运动（正向刚体运动保持相同，负向刚体运动差一个负号）.