数理方程经典问题专题整理

利用变量代换转化为勒让德方程

勒让德方程是这门课程中学习的一类重要的方程，对应于一类特殊函数相关固有值问题. 在勒让德方程的推导过程中涉及了一个重要的变量代换，对于学习者来说，除了要掌握常见形式的勒让德方程，也要掌握这一变量代换，即掌握变量代换前勒让德方程的形式. 这道例题通过求解一类特殊的常微分方程说明变量代换转化为勒让德方程这一方法的重要性.

求方程

$$Z''(\theta)+\cot\theta Z'(\theta)+20Z(\theta)=0 \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

满足条件 $Z(0)=1$ 的解 $Z(\theta)$，并求 $Z\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

解：

可以发现，这个方程是一般的非常系数二阶线性常微分方程，不能使用特征根方法求解. 并且未知函数及其各阶导数系数均不为 0，即不属于可降阶类型. 联想我们学过的求解方法，除了降阶法和特征根方法，求解二阶常微分方程的方法还有特殊函数法. 所以考虑将这个方程转化为特殊方程进而求解. 由此联想到，这个方程是勒让德方程，通过变量代换即可转化为勒让德方程标准型.

作变量代换 $x=\cos\theta$，记 $y(x)=Z(\theta)$，则方程可化为

$$\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'+20y=0$$

为勒让德方程标准型. 其中

$$\lambda=20=4\times5=4\times(4+1)$$

又由于 $Z(0)=1$，则可得解

$$Z(\theta)=P_4(x)=P_4(\cos\theta)$$

进而有

$$Z\left(\frac{\pi}{2}\right)=P_4\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=P_4(0)=\frac{1}{2^4 4!}\left[\left(x^2-1\right)^4\right]^{(4)}\Bigg|_{x=0}=\frac{3}{8}$$