数理方程经典问题专题整理

勒让德多项式的递推公式

在求解关于特殊函数的积分时，经常会用递推公式。对于勒让德多项式的递推公式来讲，其推导思路主要是分别看作变量 x 和变量 t 的函数并进行求导，比较级数表达的对应项系数，进而得到最基本的递推公式，然后基于此进行恒等变形，得到其他需要的递推公式。那么，一个自然的问题是，我们需要什么样子的递推公式。要回答这个问题，我们就要思考，我们用递推公式来做什么。我们知道，我们利用递推公式来求解含有特殊函数的积分，而求解积分的方法一般包括：换元法，分部积分法。特别地，有时候我们会利用分部积分法构造积分递推公式得到积分表达式的值。那么，自然地，我们知道，我们需要思考在求解积分的时候需要什么样子的递推公式来方便我们求解。例如对于换元法来说，我们可能需要凑出某函数的导函数形式，那么我们可能需要用导函数表达原函数的递推公式。这一专题主要分析递推公式推导过程。

基于勒让德多项式母函数和级数表达形式推导递推公式。

$$w(t,x)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n(x)t^n$$

解：将 $w(t,x)$ 看作 t 的函数进行求导，得到式一

$$(n+1)p_{n+1}(x)-(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x)=0$$

将 $w(t,x)$ 看作 x 的函数进行求导，得到式二

$$p'_{n+1}(x)+p'_{n-1}(x)=2xp'_n(x)+p_n(x)$$

式一对 x 求导，得到式三

$$(n+1)p'_{n+1}(x)-(2n+1)p'_n\left(x_1\right)+np'_{n-1}(x)=0$$

式二乘以 $(n+1)$ 与式三做差，得到式四

$$p'_{n-1}(x)=xp'_n(x)-np_n(x)$$

式二与式四做差得

$$p'_{n+1}(x) = xp'_n(x) + (n+1)p_n(x)$$

整理上述等式得

$$\begin{aligned}
&(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0 \\
&p'_{n-1}(x) = xp'_n(x) - np_n(x) \\
&p'_{n+1}(x) = xp'_n(x) + (n+1)p_n(x)
\end{aligned}$$

考虑到我们在使用换元法求解积分时需要用导函数表达原函数的递推公式，所以从初始的递推式中的两项进行作差，得到

$$p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$$

综上所述，可以得到勒让德多项式的递推公式

$$\begin{aligned}
&(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0 \\
&np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x) = 0 \\
&np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x) = 0 \\
&p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)
\end{aligned}$$

总结：特殊函数的递推公式在处理这门课程中的一些题目时有着重要的作用，其中主要用于处理特殊函数的积分运算。从直观上看，递推公式数量比较多，而且看着规律性并不明显，从而给记忆带来一定困难。虽然在参考公式中可能会提供递推公式，但是掌握重要的递推公式是有必要的。那么，我们应该如何记住这些公式呢。一个自然的想法是，我们考虑这些公式是如何推导出来的。上述推导过程以一种相对清晰的思路展示了推导的过程。而要注意的一点是，其实这一思路的核心在于，我们要明确我们的目标是什么。在明确了我们要利用递推公式求解积分表达式，以及在求解积分表达式的常用方法中如何应用递推公式之后，我们就知道我们需要什么形式的递推公式。进而，根据分别对 t 和 x 求导得到的最基本的递推公式，按照我们的目标对这些基本的递推公式进行变形，进而可以得到我们需要的递推公式。