数理方程经典问题专题整理

关于分离变量法使用条件的探讨

这门课程中我们主要研究二阶的线性偏微分方程构成的定解问题及其求解. 我们学习的求解方法中一个重要的求解方法是分离变量法. 分离变量法的使用条件可以简要概括为：有界 (针对固有函数系的变量来说) 区域齐次方程齐次边界.

从本质上讲，分类变量法的使用条件是固有值问题满足施刘定理的条件. 施刘定理成立条件中的变量定义域有界对应我们所说的有界区域问题；施刘定理成立条件中要求定解问题分离变量得到的固有值问题中方程为二阶线性方程并且系数满足一定的性质 (具体验证方法是把固有值问题的方程转化为施刘方程标准型然后按照系数条件做比较)；施刘定理成立条件中要求固有值问题的定值条件，也就是固有值问题中的变量对应在原定解问题中边界条件满足齐次要求 (为零、周期性边界或者自然边界).

这一专题以高阶固有值问题为例，讨论这类固有值问题不满足施刘定理条件的问题如何处理. 特别说明，这类问题非常特殊，在这门课程中主要研究求解方法，并不特别研究偏微分方程理论，一般遇到的问题都是常规的满足施刘定理条件的问题. 制作这一专题是因为作业中出现这类问题，在平时讨论中也有一些同学反馈对于分离变量法的使用条件、分离变量法与施刘定理关系等问题有一些疑惑，在这段前言概括中对于分离变量法的使用条件的说明以及这一结论是如何得到的、如何理解、怎样和施刘定理之间建立联系等问题做了简要说明，而后面的这一例题则是为了说明这类问题属于特例，以避免使得大家理解遇到误区.

求解定解问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t>0, 0<x<l) \\ u(0,x) = x(l-x), u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(t,r) = T(t)X(x)$.

代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X^{(4)}}{X} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X^{(4)} + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = X''(0) = X''(l) = 0 \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时, $X(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. 代入边界条件知道此时只有零解.

当 $\lambda > 0$ 时, 特征方程为 $p^4 + \lambda = 0$. 解得

$$p_k = \sqrt[4]{\lambda} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2}\right)}, k = 1, \dots, 4,$$

即

$$p_1 = \sqrt[4]{\lambda}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right), p_2 = \sqrt[4]{\lambda}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$
$$p_3 = -\sqrt[4]{\lambda}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right), p_4 = -\sqrt[4]{\lambda}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

记 $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\lambda}$，则方程的解可写作

$$X(x) = e^{\omega x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) + e^{-\omega x}(C\cos\omega x + D\sin\omega x)$$

计算得到

$$\begin{aligned} X' =& \omega e^{\omega x}((A+B)\cos\omega x + (B-A)\sin\omega x) - \omega e^{-\omega x}((C-D)\cos\omega x + (C+D)\sin\omega x) \\ X'' =& 2\omega^2 e^{\omega x}(B\cos\omega x - A\sin\omega x) + 2\omega^2 e^{-\omega x}(D\cos\omega x + C\sin\omega x) \end{aligned}$$

代入定解条件得到方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ e^{\omega l}\cos\omega l & e^{\omega l}\sin\omega l & e^{-\omega l}\cos\omega l & e^{-\omega l}\sin\omega l \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -e^{\omega l}\sin\omega l & e^{\omega l}\cos\omega l & e^{-\omega l}\sin\omega l & e^{-\omega l}\cos\omega l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0$$

计算得到系数矩阵行列式不为 0，即方程组只有零解. 对应固有函数只有零解，不成立.
当 $\lambda < 0$ 时, 特征方程解为

$$p_k = \sqrt[4]{-\lambda} e^{i\frac{(k-1)\pi}{2}}, k = 1, \dots, 4$$

即

$$p_1 = \sqrt[4]{-\lambda}(=\omega), p_2 = -\sqrt[4]{-\lambda}, p_3 = i\sqrt[4]{-\lambda}, p_4 = -i\sqrt[4]{-\lambda}$$

常微分方程的解可以写作

$$X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} + C\cos\omega x + D\sin\omega x$$

计算得到

$$\frac{1}{\omega}X' = Ae^{\omega x} - Be^{-\omega x} - C\sin\omega x + D\cos\omega x$$
$$\frac{1}{\omega^2}X'' = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} - C\cos\omega x - D\sin\omega x$$

代入定解条件得到方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{\omega l} & e^{-\omega l} & \cos\omega l & \sin\omega l \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ e^{\omega l} & e^{-\omega l} & -\cos\omega l & -\sin\omega l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0$$

令系数行列式为 0，解得 $\sin\omega l = 0$ 和 $A = B = C = 0$. 即得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$$

此时可以发现，固有函数系为三角函数系，是完备的，且满足正交性. 另外可以发现，固有函数系和教材 2.1 节所述典型的波动方程问题的固有函数系相同，因而满足完备性和正交性等性质. 进而，虽然固有值问题不满足施刘定理要求，但固有函数系满足完备性，进而可以将解在固有函数系上展开——级数形式解存在；固有函数系满足正交性，进而可以将定解条件在固有函数系上展开——可以利用正交性求解系数 (固有函数系的完备性施刘定理为分离变量法提供的理论支持，正是因为有施刘定理提供的这样的保证，分离变量法才有意义. 这类特殊的问题由于固有值问题的方程是高阶方程，已经不满足施刘定理成立条件要求，所以为了说明仍然可以使用分离变量法，我们必须要换一种方式说明这一根本问题，即固有函数系是完备的). 所以，可以使用分离变量法求解这个定解问题.

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = A_n e^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at} + B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at}$$

进而得到形式解

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n e^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at} + B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n + B_n)\sin\frac{n\pi x}{l} = x(l-x)$$

和

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 aA_n - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 aB_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

进而得到

$$A_n = B_n = \frac{1}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

解得

$$A_{2k} = B_{2k} = 0, A_{2k+1} = B_{2k+1} = \frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3}\left(e^{\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2 at} + e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2 at}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x$$

总结：这道题目比较特殊，其固有值问题不满足施刘定理，这类特殊问题的求解方法建议同学们了解. 但是通过这一问题，更想说明的是，固有函数系的完备性是分离变量法有意义的前提，而施刘定理告诉我们满足固有值问题满足其成立条件时固有函数系就是完备的. 希望通过这一问题能够更加清楚地说明分离变量法的使用条件应该如何理解.