数理方程经典问题专题整理

定解问题书写原则和方法

定解问题的书写是这门课程考试中的考点之一，其主要考察对于三类典型方程与物理过程的对应，方程中非齐次项的意义，定解条件个数的确定、定解条件的物理意义. 需要大家熟练掌握以上内容，既可以做到根据给定的定解问题描述出其对应的哪类物理过程以及对应项的物理意义，也可以做到根据自然语言描述的物理过程书写出定解问题.

由于定解问题的书写对于这类相关知识点的考察更为综合，并且也在 2019 年的期末考试中出现，所以这一专题主要介绍定解问题的书写原则和方法.

首先我们说明定解问题书写的三步走战略

- 根据自然语言描述的物理过程，建立合适的坐标系 (在答题的时候简要描述即可)
- 根据物理过程，选定三类方程中对应的那一个，并确定是否有非齐次项，书写出泛定方程，并注明定义域
- 根据泛定方程中对于时间变量 t 的偏导数的阶数确定初始条件的个数，根据物体本身的边界情况确定边界个数，进而根据对应的物理意义确定初始条件和边界条件的具体表达形式

泛定方程中非齐次项的物理意义

- 弦振动方程中，非齐次项对应的物理意义是外界对于弦 (振动物体) 施加的外力 (或描述为冲量)
- 热传导方程中，非齐次项对应的物理意义是热源

初始条件的个数

- 初始条件的个数由泛定方程中对于时间变量 t 的偏导数的阶数确定，二者保持一致. 例如弦振动方程中，对于时间变量 t 的偏导数的阶数为 2，所以需要 2 个初始条件；而热传导方程中，对于时间变量 t 的偏导数的阶数为 1，所以需要 1 个初始条件；对于泊松方程 (特别地，拉普拉斯方程) 这种描述稳态的方程，不含有时间变量 t，自然不存在对于时间变量 t 的偏导数，所以不需要初始条件

边界条件的个数

2020 春数理方程 08 班

- 边界条件的个数由边界的形状决定，其根本原则是要使得泛定方程结合定解条件可以得到唯一解，对应于物理意义来说，就是边界条件要恰好描述出物体的所有边界上的情况. 例如，一根无限长的弦的振动问题，由于不存在边界，所以不需要边界条件；一个圆柱体的热传导问题，其边界分别有上底、下底、侧面，所以需要 3 个定解条件；一个长方体的电势问题，其具有 6 个边界，所以需要 6 个定解条件

初始条件的物理意义

- 弦振动方程有两个初始条件，分别是 $u|_{t=0} = \varphi(M)$ 和 $u_t|_{t=0} = \psi(M)$. 其所描述的物理意义是，弦在初始时刻的振动情况 (位移) 为 $\varphi(M)$、速度为 $\psi(M)$
- 热传导方程有一个初始条件，为 $u|_{t=0} = \varphi(M)$，表示物体初始时刻的温度为 $\varphi(x)$
- 说明：这里 M 表示坐标变量 (全体)，即 $M \in V$

边界条件的物理意义

- 弦振动方程
  - 第一类边界条件描述物体边界的振动 (位移) 情况. 以一维弦振动为例，边界条件 $u|_{x=0} = \varphi(t)$ 描述在端点 $x = 0$ 处物体的振动 (位移) 规律为 $\varphi(t)$，即 t_0 时刻端点 $x = 0$ 处位移为 $\varphi(t_0)$. 特别地，齐次的第一类边界条件对应的描述为固定端
  - 第二类边界条件描述物体边界的受力情况. 以一维弦振动为例，假设在 $x = 0$ 处施加外力 $F(t)$(取其正方向为 u 的正方向，即位移正方向). 则对于微元 $[0, 0 + \Delta x]$ 有

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(t) + T_2(t, 0 + \Delta x) + g(t, x)\Delta x$$

其中 ρ 为弦的线密度，T_1 为弦的张力在 x 轴方向分量，T_2 为弦的张力在位移 u 的正方向上的分量，$F(t)$ 为在端点 $x = 0$ 处施加的外力 (其正方向取位移 u 的正方向)，$g(t, x)$ 为弦上的随时间变化的外力. 其中

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

整理可得

$$T_1 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} + F(t) = 0$$

即对应第二类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\frac{F(t)}{T_1}$$

2020 春数理方程 08 班

由于弦的振动是微小的，其中 u_x 是小量，可近似得 $T = T_1$. 所以上述条件可写作

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{F(t)}{T}$$

特别地，齐次边界对应的描述为自由端

- 第三类边界条件描述物体边界受到弹性力的情况. 以一维弦振动为例，假设在 $x = 0$ 处施加外力 $F(t)$(取其正方向为 u 的正方向，即位移正方向)，并且端点和一个弹性物体相连 (这个弹性物体弹性系数为 k, 不计长度，一端固定在 $x = 0$，一端和弦的端点相连). 则类似对第二类边界条件的分析，这里直接运用其结论可得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{F(t) - k u|_{x=0}}{T}$$

整理可得

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{k}{T}u\right)\right|_{x=0} = -\frac{F(t)}{T}$$

- 热传导方程
  - 第一类边界条件描述的是物体边界的温度分布情况. 可以写作 $u(M;t)|_{\partial V} = \varphi(M;t)$，表示物体边界温度为 $\varphi(M;t)$.
  - 第二类边界条件描述的是物体边界的热流情况. 由傅里叶热传导定律可知

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial V} = -\frac{q}{k}$$

描述物体边界热流密度向量为 q. 其中 k 为热传导系数，q 和热量 Q 的关系为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q &= -k\nabla u \cdot n \mathrm{d}S \mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{dS} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

特别地，齐次的边界条件对应的描述为绝热

  - 第三类边界条件描述的是物体通过边界和外界物体进行热交换的情况. 假设外界物体温度为 u_0，则由牛顿冷却定律结合傅里叶热传导定律，有

$$-\left.k\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial V} = h\left(u|_{\partial V} - u_0\right)$$

其中 h 为热交换系数，∂V 表示区域 V 的边界. 整理可得

$$\left.\left(hu + k\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial V} = hu_0$$

2020 春数理方程 08 班