数理方程经典问题专题整理

重要的物理学定律

数学物理方程主要研究物理问题的数学模型建立以及对应的求解. 其中数学模型建立的过程可以总结为：选取合适的微元，根据物理学定律进行分析建立关系式，利用小量近似方法和数量关系、几何关系整理关系式建立方程，根据物理意义书写定解条件. 建立过程中一个重要的依据是物理学定律，这一专题重点总结这门课程中涉及的重要物理学定律.

1. 牛顿第二定律 $\quad F = m \cdot a$

2. 傅里叶热传导定律

   在无穷小时间段 $(t, t+\mathrm{d}t)$ 内, 沿点 M 处的面积元素 $\mathrm{d}S$ 的法向 n 流过 $\mathrm{d}S$ 的热量与温度的下降率成正比，即

   $$\mathrm{d}Q = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

   这里, $k(x,y,z)$ 称为物体在 M 点处的热传导系数, 它应取正值; 负号表示热流指向温度下降的方向. 上式可以写成

   $$\begin{aligned}\mathrm{d}Q &= -k(x,y,z)\nabla u \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   这里, $\boldsymbol{n}$ 是法向方向的单位向量 ; $\boldsymbol{q} = -k(x,y,z)\nabla u$, 称为在点 M 处的热流密度向量，其方向与温度梯度的方向相反。

3. 牛顿冷却定律

   从物体流向外部介质的热流密度 q 跟物体与介质在表面处的温度差成正比, 即

   $$q = h(u - \theta)$$

   式中, u 和 $\theta = \theta(t,x,y,z)$ 分别表示物体和介质在表面处的温度 $h = h(x,y,z)$ 称为热交换系数，它也取正值. 一般对应第三类边界条件

   $$\left.\left(k\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_s = h\theta$$

4. 扩散定律

当物体内浓度分布不均匀时会引起物质的扩散运动。粒子流强度 q(即, 单位时间内流过单位面积的粒子数) 与浓度的下降率成正比。即

$$\boldsymbol{q} = -D\nabla u$$

其中,D 为扩散系数, 负号表浓度减小的方向。写成分量式即

$$q_x = -D\frac{\partial u}{\partial x}, q_y = -D\frac{\partial u}{\partial y}, q_z = -D\frac{\partial u}{\partial z}$$

5. 胡克定律

常见的表达形式是关于弹性力和弹性体伸长之间的线性关系，具体描述为：在弹性限度内，弹性体受到的弹力和其形变量成正比，即

$$f = -kx$$

其中，k 为弹性体的劲度系数。负号表示弹力的方向和形变量的方向相反。

另一种表述是：在物体的弹性限度内，应力与应变成正比，其比例系数称为杨氏模量 E. 其中应力指单位面积上所受到的力 F/A, 应变指在外力作用下的相对形变 $\Delta L/L$. 公式表达为

$$E = (F \cdot L)/(A \cdot \Delta L)$$

6. 麦克斯韦方程组

假设空间中没有电荷，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别表示电场强度和磁场强度.

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}) = 0 \\ \nabla \cdot (\mu\boldsymbol{H}) = 0 \end{cases}$$

总结：在数理方程的建立过程中主要依据是物理学定律，在这门课程中我们会遇到的主要是这些物理学定律，对应我们研究的三类方程. 其中麦克斯韦方程组并不属于常见类型，但由于其重要性，以及通过这样一个自由电磁波的方程在一定条件下作近似可以得到波动方程或者热传导方程这样两类重要的方程，所以在这里列出并希望读者注意这一问题. 在熟练掌握这些重要的物理学定律并理解微元法的基础上，就可以顺利地完成这门课程中的数理方程的建立过程.