二阶线性常系数微分方程求解

特征根法，你到底，你到底是谁

- **基础工作——探寻迷宫出口**

首先，我们要明确解的结构，这个思路在微分方程的求解中始终会有应用到。（再次安利：先有意义后求量）

根据在一般的二阶线性齐次微分方程的分析中我们了解到，解的结构是一个由两个线性无关解张成的解空间，这两个线性无关解就是这个函数空间的一组基。

这样，我们就明确目标：找到两个线性无关的解。

- **基于目标的思考——意识自控，脉搏流动**

我们要思考怎样找到这两个线性无关的解。

我们观察方程的形式，并且联想到我们熟悉一类具有特殊性质的函数——指数函数（求导性质）。这样，我们就想，能否得到形如$e^{\lambda x}$的解。

那么，我们就把这个形式解带入方程，整理后惊奇地发现，我们得到了一个只含有λ的二次方程，那，我们就放心了。我们知道，这个方程的解就是符合要求的λ，进而带入$e^{\lambda x}$就是微分方程的解。

- **求解过程——优雅的恶魔把问题一点一点吞没**

如前所述，求解关于λ的二次方程，得到符合要求的λ。

根据我们对二次方程解的结构的认识，我们知道基于判别式讨论可以得到三种不同类型的解形式。

➢ 两个互异实根：

这个比较友好，我们直接得到了两个不同的λ，记作λ_1和λ_2。

则带入形式解$e^{\lambda x}$，得到了我们期望的两个线性无关解$e^{\lambda_1 x}$和$e^{\lambda_2 x}$。任务完成!

在这里呢，回答一下之前有些同学提出的问题，即关于双曲正余弦形式的解。

我们根据上述分析过程知道，我们其实目标就是找到两个线性无关的解，并且我们知道上面得到的两个解是线性无关且满足方程，那么，我们也可以对二者进行线性组合，当λ_1和λ_2互为相反数的时候，这样做也可以得到线性无关的满足方程的解——双曲正余弦，那么，这种解也是可以的。

具体选择哪种，从原则上讲没有本质区别。如果判断出解的奇偶性，可以选择对应的双曲正余弦，或者就简单一些，直接选择指数形式解。

- 双重根

  这时候我们只得到了一个λ。那，目标还没完成，任重道远。

  不过我们根据在一般二阶方程的分析我们知道，存在形如$f(x)e^{\lambda x}$的解可以和它一起，并肩看潮来潮去。

  我们把$f(x)e^{\lambda x}$代入方程得到一个关于$f(x)$的方程，求解得到一个特解$f(x) = x$。那么，这组解就是$e^{\lambda x}$和$xe^{\lambda x}$。

- 共轭复根

  这时候，我们得到两个共轭复根，记作λ_1和λ_2。则带入形式解$e^{\lambda x}$，得到了我们期望的两个线性无关解$e^{\lambda_1 x}$和$e^{\lambda_2 x}$。这样其实

是可以的，只不过我们习惯上希望得到实变函数解，所以我们根据欧拉公式进行简单操作，得到实变函数解：$e^{\alpha x}\cos\beta x$和$e^{\alpha x}\sin\beta x$。

这样，任务完成。

- **结语——我见过天使，遇过魔鬼，特征根法，我终于看清你是谁**

总的来讲，我对于特征根法的认识就如前所述。

解法的根本思想是，基于解的结构分析，联系我们熟悉的具有特殊性质的指数函数，然后把形式解带入方程，发现我们期望的形式解可以进一步得到真正的符合要求的解。

然后我们把这个思想封装成一个黑盒子，输入是根据方程写出的特征方程，输出就是解中唯一的参变量λ。这样，我们就完成了求解。