

hw2

1、将下面公式化成与之等值的并且仅含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的公式。

(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

(2) $\neg(P \rightarrow Q) \vee R$

(3) $P \leftrightarrow Q$

$$\begin{aligned} (1) P \rightarrow (Q \rightarrow R) &\Leftrightarrow P \rightarrow (\neg P \vee Q) && \text{蕴涵等值式} \\ &\Leftrightarrow P \rightarrow \neg(Q \wedge \neg R) && \text{德·摩根} \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(Q \wedge \neg R) && \text{蕴涵等值式} \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge (Q \wedge \neg R)) && \text{德·摩根} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \neg(P \rightarrow Q) \vee R &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R && \text{蕴涵等值式} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R && \text{德·摩根} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) && \text{等价等值式} \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) && \text{蕴涵等值式} \\ &\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P) && \text{德·摩根} \end{aligned}$$

2、将题1中公式化成与之等值的并且仅含 $\{\neg, \vee\}$ 中联结词的公式。

$$\begin{aligned} (1) P \rightarrow (Q \rightarrow R) &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q \wedge \neg R) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R) && \text{德·摩根} \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && \text{德·摩根} \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \neg(P \rightarrow Q) \vee R &\Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg R) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg R) && \text{德·摩根} \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R && \text{德·摩根} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) && \text{德·摩根} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))) \quad \text{德·摩根}$$

3、用等值演算分别求下列公式的析取范式和合取范式。

$$(1) (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$$

$$(2) \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q$$

$$(3) (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow (P \vee Q \vee R)$$

$$\begin{aligned}(1) (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \vee P) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \vee P) \\ &\Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \vee (\neg Q \vee P) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg Q \vee P \\ &\Leftrightarrow \neg Q \vee P\end{aligned}$$

$\neg Q \vee P$ 既为析取范式也为合取范式

$$\begin{aligned}(2) \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q &\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge Q \\ &\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow P \wedge F \\ &\Leftrightarrow F\end{aligned}$$

F 既为析取范式也为合取范式

$$\begin{aligned}(3) (P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow (P \vee Q \vee R) &\Leftrightarrow \neg(P \vee (Q \wedge R)) \vee (P \vee Q \vee R) \\ &\Leftrightarrow \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R) \vee P \vee Q \vee R \\ &\Leftrightarrow P \vee Q \vee R \vee \neg Q \vee \neg R \\ &\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

T 既为析取范式也为合取范式