

---

# Statistical View for Diffusion

---

禰科材

中国科学技术大学 化学物理系

2022 年 5 月 4 日

---

### 摘要

本文写于中国科学技术大学化学物理系开设的物理化学 II (英) 2022 年春陈初升老师的课堂, 旨在介绍随机数学在描述扩散现象时的应用。物质的扩散行为, 除了可以采用化学势  $\bar{\mu}$  以及广义力  $\mathcal{F} = \nabla \bar{\mu}$  或者扩散方程  $c_t = D\nabla^2 c$  研究之外, 随机漫步也是一种非常好的近似。然而这样模糊的表述使得推导一些有用的结果比较困难, 以致无法深入本质, 必须将其在数学上严格化。

为此, 本文引入随机过程与随机分析的知识体系来重新讲述扩散与布朗运动, 为抽象的数学符号赋予具象的物理化学意义, 希望能为读者带来一些启发。

关键词: 随机过程、布朗运动、随机微分方程、朗之万方程

## 引言

现今物理化学教材对于扩散的讨论大多通过热力学函数和数理方程两种手段——考虑大量分子总体确定性的运动趋势，得到了令人欣喜的结果。但这样做忽视了理解扩散行为的一个重要角度：概率。

然而，中国科学技术大学为化学专业本科生所开设的课程并没有涵盖理解这样的随机现象所必须的数理基础，所以作者希望以一篇介绍性质的文章为补充，给同学们传阅、批评。

形而上者谓之道，形而下者谓之器。数学的发展和其他自然科学紧密相关，所以本文采取双线并进的写作模式：数学方面，从随机变量、随机过程过渡到随机分析，对随机数学做一个简短的介绍；物理化学方面则贯穿布朗运动、电解质离子的漂移以及非平衡态动力学的朗之万方程。这样做的目的，在于为读者提供一个完整的逻辑图景，也希望能用简练的文笔勾勒出随机数学的优雅轮廓。

概率论与数理统计之后，是概率论的动力学：随机过程。它不仅定义在概率空间上，还包含一个参数集合  $t \in T$ 。一个随机过程既可以看做概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  对函数空间  $X(t)$  的映射，也可以简单认为是每时每刻都在发生的随机事件所产生的随机变量序列。

对随机过程的研究指出，许多过程关于参数集合  $T$  几乎处处不可微。为了讨论随机过程的“微积分”，数学家们发展了一门新的学科：随机分析。本文将使用一些简单的数学工具，观照在物质世界中一类重要的随机过程：布朗运动。

布朗运动也称维纳过程，在数学上是一种连续时间高斯过程。本文将探讨布朗运动的一些基本性质，给出一维布朗运动均方位移  $E[B(t)^2] = 2Dt$  的一个简洁证明，并以此为契机，探讨带漂移的布朗运动能否模拟电解液中离子的迁移行为。

此后，我们还将目光投向非平衡态热力学，通过引入随机微分方程以及相应的数学方法，求解一阶线性非齐次的朗之万方程，推导著名的涨落耗散定理。

作者深知水平有限，行文难免有纰漏之处，望后之览者不吝赐教。

邮箱：[ustcxkc@mail.ustc.edu.cn](mailto:ustcxkc@mail.ustc.edu.cn)

## 目录

第一部分 布朗运动	4
1 回顾	4
2 随机过程与布朗运动	5
2.1 定义 . . . . .	5
2.2 证明 $E[x^2] = 2Dt$ . . . . .	6
2.3 莱维飞行 . . . . .	10
2.4 带漂移的布朗运动 . . . . .	11
3 电解质溶液中的离子	13
第二部分 朗之万方程	15
4 不可积力学系统	15
4.1 Lorenz 混沌系统 . . . . .	15
5 随机分析	17
5.1 随机微分方程 . . . . .	17
5.2 伊藤积分 . . . . .	18
6 涨落耗散定理	19

# 第一部分 布朗运动

## 1 回顾

气体、溶液与固体向四周扩散的倾向能从三种不同的角度描述 [1]: 第一种是根据热力学第二定律, 通过自发过程熵增加, 或者在恒温恒压下吉布斯自由能自发下降的观点构造推动扩散的**虚拟力**

$$\mathcal{F} = -RT \left( \frac{\partial \ln a}{\partial x} \right)_{T,p} \quad (1)$$

第二种是通过在不同初边值条件下求解**扩散方程**

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2)$$

比如通过 Fourier 变换可知, 以  $\delta$  函数为初值、空间无限的一维扩散方程的解为

$$c(x, t) = \frac{n_0}{A(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} e^{-x^2/4Dt}$$

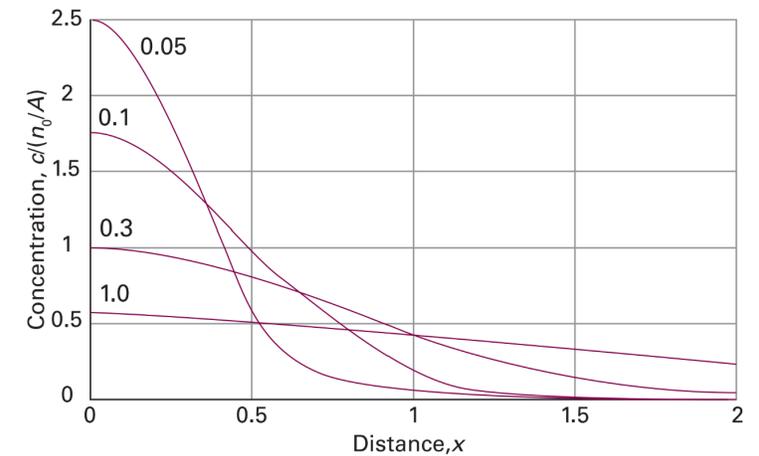


图 1: 一维扩散方程的解

第三种是更接近扩散机理的统计视角, 它将粒子的扩散想象为**随机漫步**。设分子在  $\tau$  时间间隔内随机跳跃的距离为  $\lambda$ , 可得一维随机游走的概率密度函数

$$P(x, t) = \left( \frac{2\tau}{\pi t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2\tau/2t\lambda^2} \quad (3)$$

以及爱因斯坦-斯莫鲁霍夫斯基方程

$$D = \frac{\lambda^2}{2\tau} \quad (4)$$

通过积分，易得方均位移

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx = 2Dt$$

前两种讨论方式都考虑大量分子总体确定性的趋势，而不论单个粒子的运动，采用的也是和蔼可亲的微积分语言，而使用概率论体系来研究扩散行为的想法常常会被忽略。本文力图介绍从统计角度理解扩散的必要数学工具：[随机过程](#)，以及在统计观点下研究扩散会带来什么样的结果。

## 2 随机过程与布朗运动

### 2.1 定义

随机过程是概率论的动力学 [6]。一个随机变量或者随机向量在做完试验之后的取值已经确定，如果过了做实验的时刻再谈论它的分布已经没有了意义。但是如果这样的随机事件时时刻刻都在发生，并且各自的分布似乎并不相同，为了研究它们构成的总体，我们不得不考虑一族分布随时间  $t \in T$  有所变化的随机变量，这就是随机过程。

#### Definition: 随机过程

设有概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  及参数集合（指标集） $T \subset \mathbb{R}$ ，称随机变量族

$$X = \{X(t), t \in T\} = \{X(t, \omega), \omega \in \Omega, t \in T\}$$

为一随机过程或随机函数。

从定义可以看出，所谓“随机过程”，是指一族随机变量，它不仅在概率空间  $\Omega$  上，还自带参数集合  $T$ ，别名叫“随机函数”。所以随机过程也可以这样理解：随机向量是概率空间对  $n$  维向量空间的映射，随机过程是概率空间对函数空间的映射 [11]，这部分读者也可以阅读概率论相关书籍，不作过多阐述。

对于“分子永无休止的无规则运动”来说，首先它应当一种连续时间随机过程，即参数集合  $T$  连续取值；其次，它产生的机理是大量的随机碰撞，我们希望它的步长服从正态分布；另外，前一步和后一步，作为两个随机变量，应当是独立的：

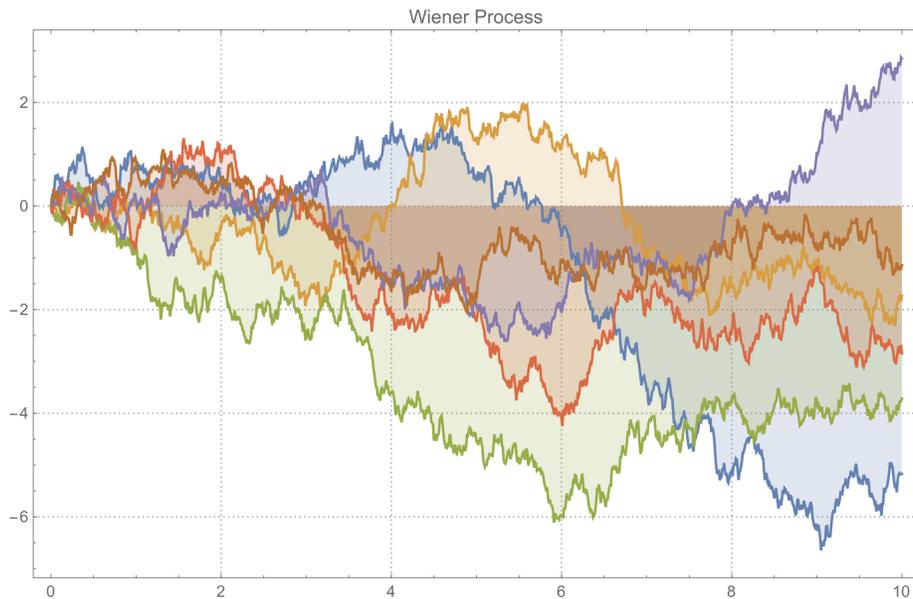


图 2: 一种的特殊随机过程: 维纳过程的样本函数

**Definition: 布朗运动/维纳过程**

设随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  满足:

1.  $X(t)$  为独立增量过程;
2. 对于  $\forall s \geq 0, t \geq 0$ , 有

$$X(s+t) - X(s) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

3.  $X(0) = 0$ , 且  $X(t)$  在  $t = 0$  右连续;

则  $\{X(t), t \geq 0\}$  为布朗运动或维纳过程。

**2.2 证明  $E[x^2] = 2Dt$** 

方均位移  $\langle x^2 \rangle$  在概率论语言体系下即为位移平方的期望  $E[x^2]$ 。从布朗运动的定义出发, 我们可以直接证明: 布朗运动的方均位移  $E[B(t)^2] = 2Dt$ :

## Justification:

对于标准布朗运动  $B(t)$ ,  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 。记  $B(t_k) - B(t_{k-1}) = \Delta B(k)$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 则  $\Delta B(k) \sim N(0, \Delta t_k)$ , 且  $E[\Delta B(k)^2] = \Delta t_k$ ,  $E[\Delta B(k)^4] = 3(\Delta t_k)^2$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 对差的平方求期望, 根据增量的独立性:

$$\begin{aligned} E[B(t)^2 - t]^2 &= E\left[\sum_{k=1}^n (\Delta B(k)^2 - \Delta t_k)\right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n E[\Delta B(k)^2 - \Delta t_k]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n [E\Delta B(k)^4 - 2\Delta t_k * E\Delta B(k)^2 + (\Delta t_k)^2] \\ &= \sum_{k=1}^n [3(\Delta t_k)^2 - 2(\Delta t_k)^2 + (\Delta t_k)^2] \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (\Delta t_k)^2 \end{aligned}$$

设  $\lambda = \max \Delta t_k \rightarrow 0$ , 则有

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n (\Delta t_k)^2 &\leq 2\lambda \sum_{k=1}^n \Delta t_k \\ &= 2\lambda t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

和求解偏微分方程或者使用随机迈步模型相比, 这个方法简单有效, 也为我们带来了理解扩散系数  $D$  新的视角:  $D$  在这个证明中直接起源于方差  $\sigma$ , 一个刻画随机变量在均值附近离散程度的数字特征。

这表明: 粒子的运动越是随机, 所能达到的均方位移就越远。

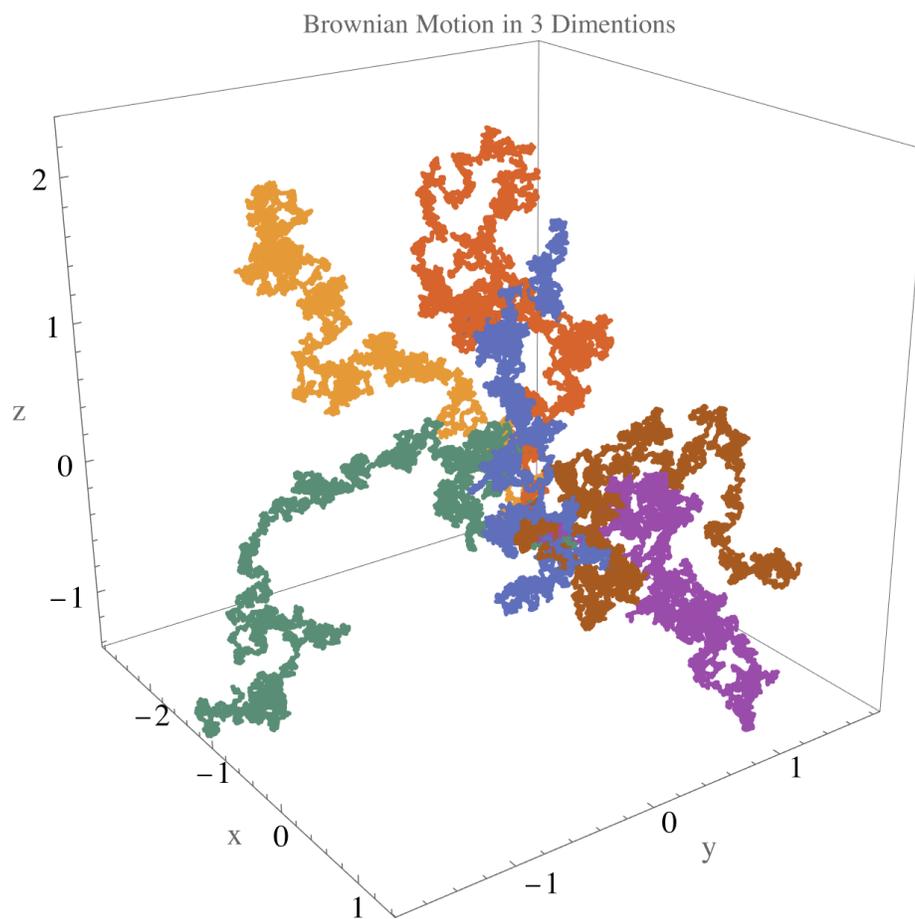


图 3: 三维布朗运动

对方均位移的数值模拟如下 [12]:

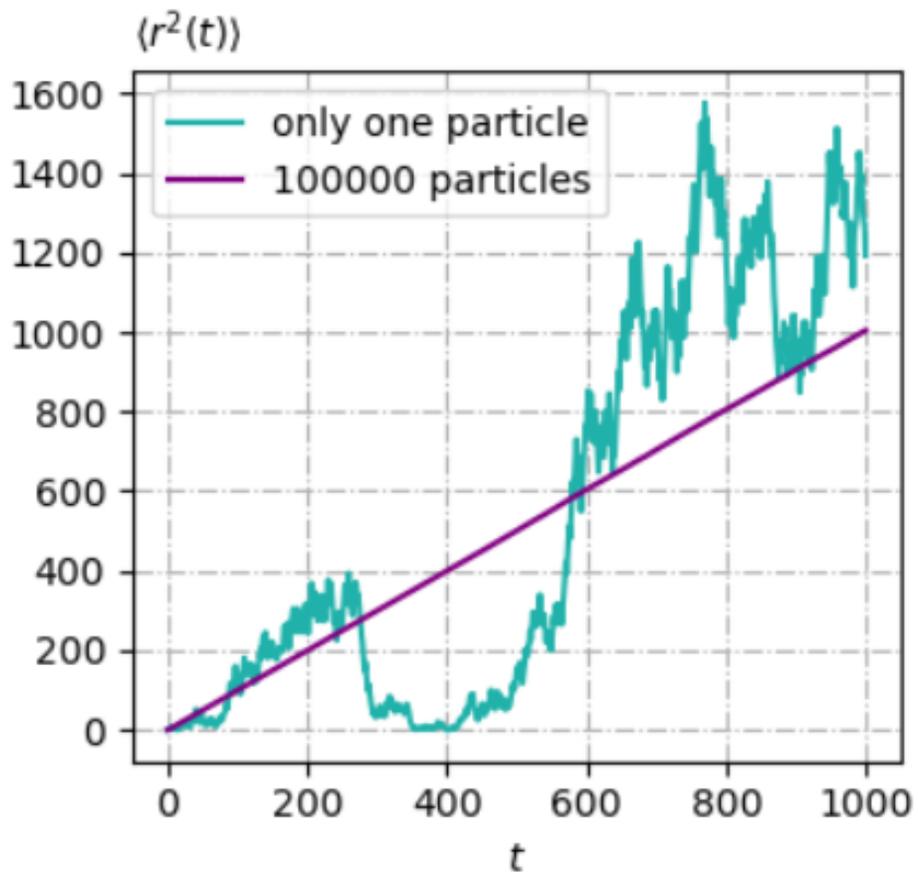


图 4: 方均位移的数值模拟

### 2.3 莱维飞行

除了布朗运动，**莱维飞行**也是一类重要的连续时间随机过程，它在刻画海洋中鲨鱼的游走、昆虫的飞行甚至人在逛街时的运动都比较重要。

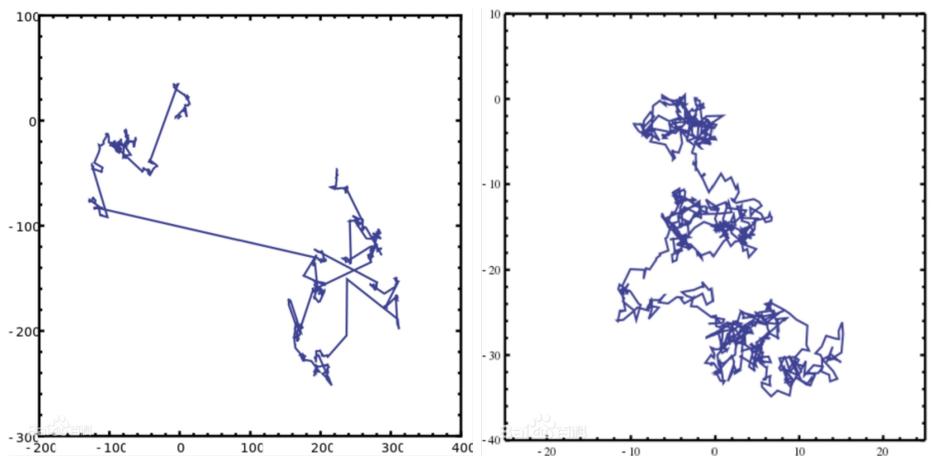


图 5: 莱维飞行

对人类来说，餐桌上的苍蝇较容易打中，而飞行中的苍蝇很难打中的原因，就是苍蝇在餐桌上做二维布朗运动，而在我们要打它的时候转化成了三维莱维飞行。它常常会急转弯、急加速，用数学刻画就是：莱维飞行有更大的机会迈很长的一步，使用多项式分布可以达到这一目的：

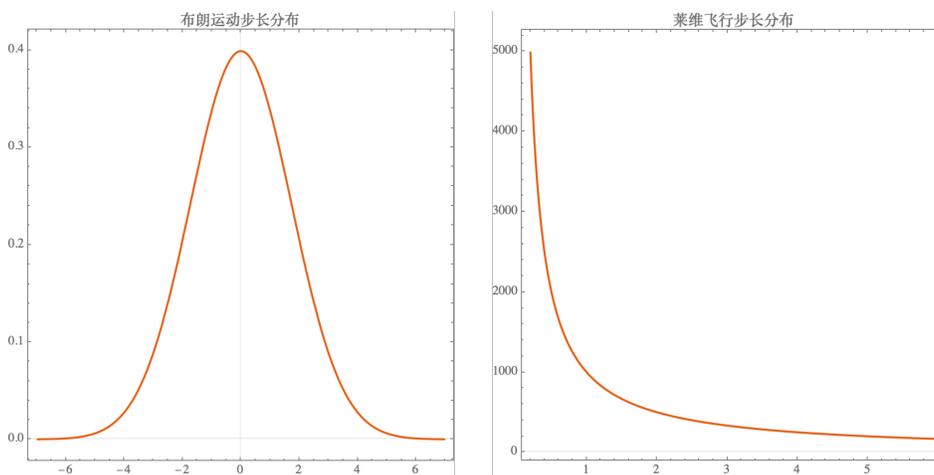


图 6: 布朗运动和莱维飞行的步长分布

可以看到，多项式收敛于 0 的速度显然慢于正态分布的平方指数收敛。莱维飞行

只不过是更大的概率迈出更长的步子而已，故名“飞行”。

## 2.4 带漂移的布朗运动

让我们回到布朗运动上来，前文我们主要讨论的是均值  $\mu = 0$  时的情况，如果  $\mu \neq 0$ ，会发生什么结果？先做几个数字实验。

如果固定标准差  $\sigma = 1$ ，增大均值：

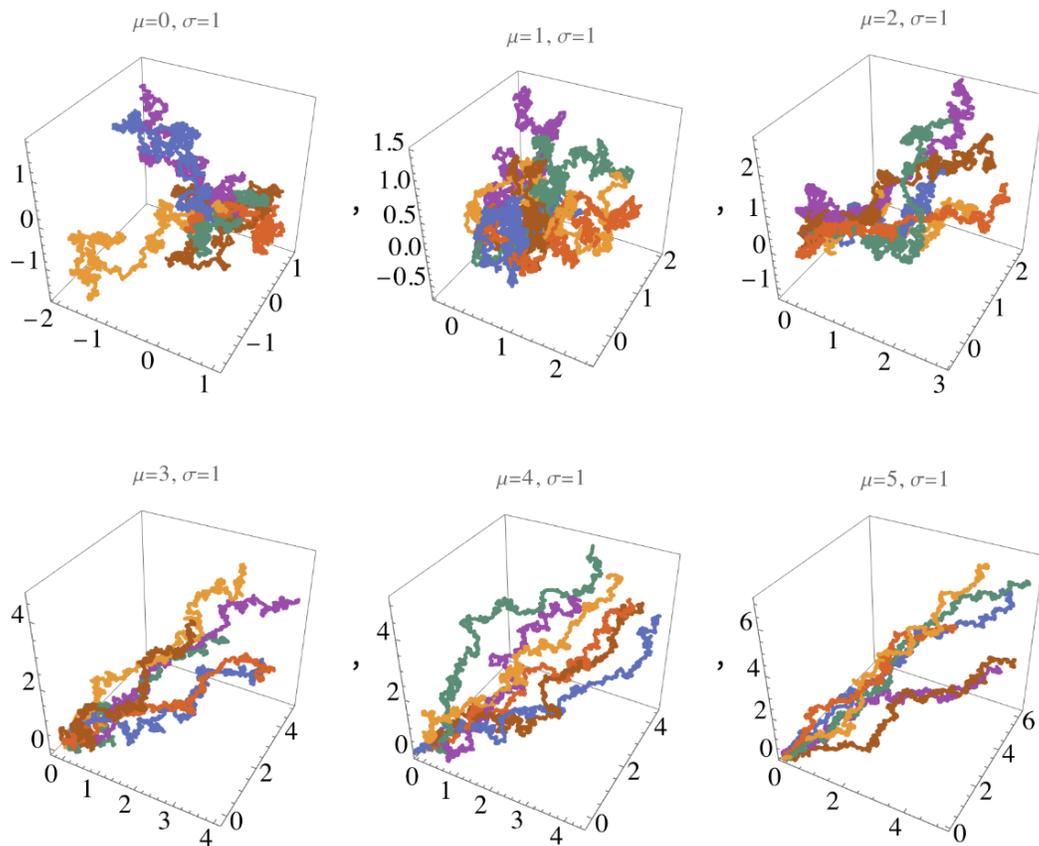


图 7: 固定方差

可以看到，原本向四周发散运动的粒子逐渐汇聚一处——确定性逐步增加；相反，固定均值  $\mu = 10$ ，增加标准差：

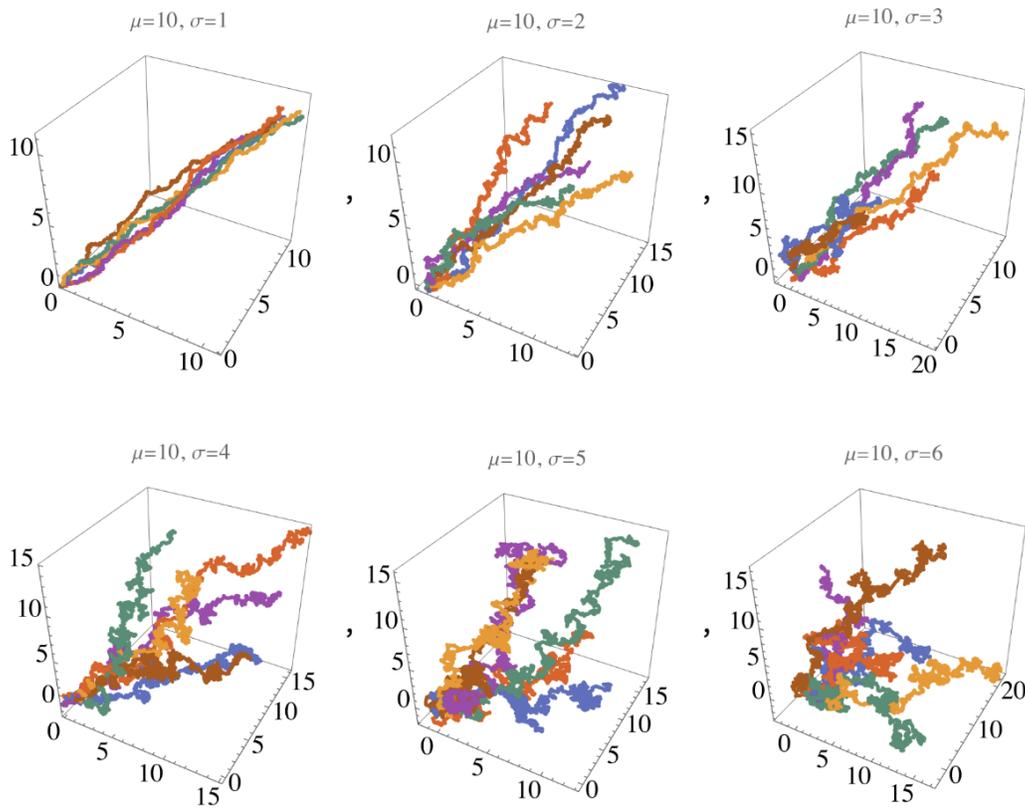


图 8: 固定均值

原本大致沿直线运动的粒子逐渐分道扬镳，但保持了向同一方向运动的总体趋势——随机性逐步增加。就此，我们定义**带漂移的布朗运动**：

**Definition: 带漂移的布朗运动**

设  $\{B(t), t \geq 0\}$  为一标准布朗运动， $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  为常数，令

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t), \quad t \geq 0$$

则  $\{X(t), t \geq 0\}$  为漂移系数  $\mu$ ，扩散系数  $\sigma$  的布朗运动。

## 带漂移的布朗运动具有的性质

1.  $X(t)$  为独立增量过程;

2. 对于  $\forall s \geq 0, t \geq 0$ , 有

$$X(s+t) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

3.  $X(0) = 0$ , 且  $X(t)$  在  $t = 0$  右连续

正如我们在数值模拟和严格定义中看到的, 均值  $\mu$  代表某种确定性因素导致的变化, 而标准差  $\sigma$  代表随机因素对系统施加的影响。对于电解质溶液中的离子来说, 我们希望均值  $\mu$  是对某种保守场  $\varphi$  的响应, 响应系数为  $\kappa$ :

$$\mu = \kappa \nabla \varphi$$

而随机因素控制的  $\sigma$  至少应当由溶质溶剂分子质量比  $\frac{m_1}{m_2}$ 、温度  $T$ 、碰撞频率  $\nu$  等确定:

$$\sigma = \sigma \left( \frac{m_1}{m_2}, T, \nu, \dots \right)$$

### 3 电解质溶液中的离子

在对“带漂移的布朗运动”的讨论中我们看到, 确定性因素和随机性因素分别控制布朗运动的两个参数, 并认为它们大概应当受什么具体物理化学因素的影响——这似乎可以用于模拟电解液中离子的迁移。然而, 电解质离子远比我们想象的复杂。

为了给溶液中的离子的运动建模 [2], 需要得到数量丰富的热力学参量, 这主要是相平衡, 但也包括热、体积和界面性质。可惜的是, 这些模型只在小范围内或某些特定情况下与实际相符, 并且理论基础相对薄弱 (即使应用了德拜-休克尔理论)。

总结起来, 如果我们真的需要为溶液中的离子建立一个最“周到”物理模型, 它大概应该包含以下七个方面:

一个“周到”物理模型应当考虑：

1. 理想气体的随机运动
2. 范德华力
3. 氢键作用
4. 溶剂化作用
5. 离子氛自能
6. 离子氛的库伦相互作用
7. 离子配对作用

而我们“带漂移的布朗运动”，还停留在“理想气体”的层面。

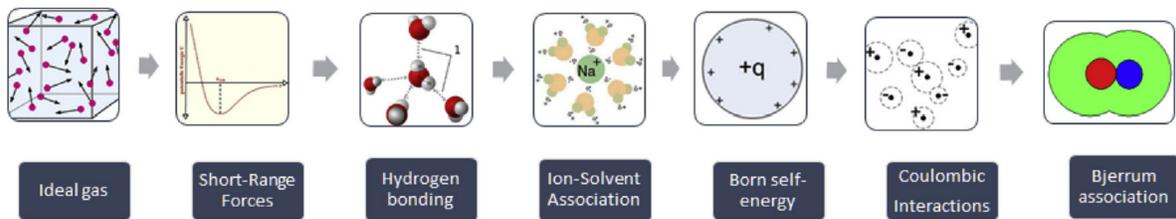


图 9: 主要面临的困难

让我们回到稍微简单一点的东西上来。

## 第二部分 朗之万方程

粒子的无规则运动的来源，是它和周围粒子大量随机的碰撞，这一作用力即可视为一种随机过程。朗之万方程就是这样一类带有随机项的微分方程，为了行文方便，我们先从确定论和随机论的桥梁：混沌讲起。

### 4 不可积力学系统

力学系统可按照其能量是否守恒区分为保守系统和耗散系统；又可按照系统可否用已知数学方式表达其运动形式区分为可积系统与不可积系统。在一切可能的力学系统中，不可积系统无处不在，而传统的力学教科书只讲授可积系统——即解可用积分表示。这没有描述出牛顿力学的真面目，一个著名的例子是19世纪末H. 庞加莱在讨论太阳系稳定性时，首次发现的三体系统的不可积性，以及其轨道的复杂性。

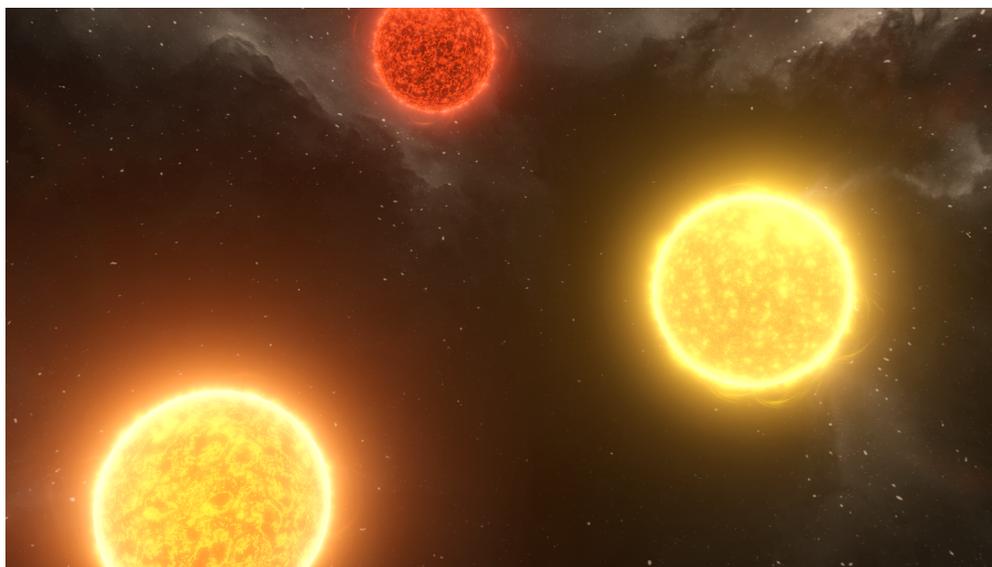


图 10: 三星系统

#### 4.1 Lorenz 混沌系统

只要系统精确地从某一初始点出发，其运动的轨道是完全确定的。但如果初始条件发生不论多么微小的变化，系统某些运动轨道会出现无法预料的改变。这种发生在

确定性系统中的运动轨道对初始值极为敏感的貌似无序和混乱的运动，就称为**混沌运动**。

一个运动即使是确定性的，也仍可由于初始数据的测定不可能完全精确导致预测的结果出现误差，从而为不可预测的，二者并不矛盾。一个典型的不可积的力学系统通常兼有规则运动和随机运动的两种不同区域。随着偏离可积性，随机区域逐渐扩大，终至取代规则区域。因此，从可预测性的观点看，决定性的牛顿力学实际上具有内秉的随机性。

Lorenz 系统是数值试验中最早发现的呈现混沌运动的耗散系统，其状态方程形如：

$$\begin{aligned}x' &= -3(x - y) \\y' &= x(-z) + 26.5x - y \\z' &= xy - z \\x(0) = z(0) &= 0, \quad y(0) = 1\end{aligned}$$

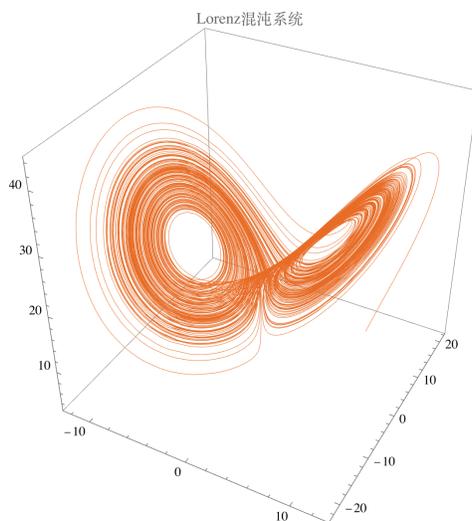


图 11: Lorenz 混沌系统

混沌系统的一大特点是对初值条件敏感，而长时间的平均却非常稳定。以蝴蝶状的 Lorenz 系统举例， $(x, y, z)$  的坐标有时在左边翅膀，有时在右边翅膀，对于一段时间后它会落在哪只翅膀上，由于测量的局限性我们无法预测；但在一只翅膀上的停留时间占总时间的比值却随着时间的流逝而逐渐趋于稳定，这就叫做“内秉的随机性”。

混沌系统的另一大特点是最后的稳定状态与初值条件的相关程度不强。如图所示是 Lorenz 混沌系统在四种初值条件下的数值解，可以看到，无论出发点在何处，它们总会回到这只蝴蝶上来，所以称之为**吸引子**。

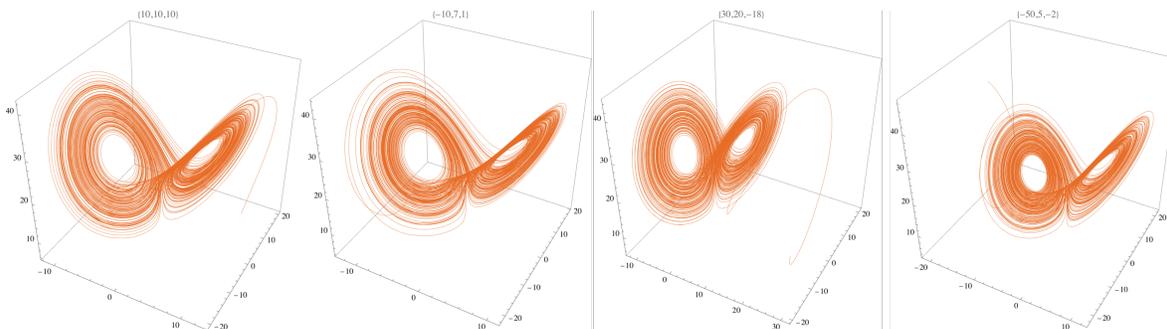


图 12: 不同初值条件下的 Lorenz 混沌系统

在物理学和其他科学领域中，也有混沌运动的各种例子，比如以 B-Z 反应为代表的化学振荡以及分形结构反应扩散动力学 [10]。混沌现象的发现沟通了经典力学和统计力学，在确定论和随机论之间有一定的启发作用。

## 5 随机分析

第一部分中我们主要讨论了什么是随机过程，以及简单介绍了一类特殊的连续时间随机过程：布朗运动。更进一步，在某些情形下，我们需要对一些随机过程做微积分，以研究它们进一步的性质，这就引出了[随机微积分](#)的概念。

### 5.1 随机微分方程

有了随机微积分，就会有[随机微分方程](#)。它和我们熟悉的确定性微分方程的区别在于：方程中的某些函数项  $p(t)$  替换为了随机过程  $X(t)$ ，比如带阻力的牛顿动力学方程

$$m \frac{dv}{dt} = \zeta v + F(t)$$

其中的  $\zeta v$  代表阻力， $F(t)$  代表外加动力。如果外加动力具有随机性，则得到[朗之万方程](#) [5]

$$m \frac{dv}{dt} = \zeta v + \delta F(t) \quad (5)$$

其中随机力的期望和协方差分别服从

$$\langle \delta F(t) \rangle = 0, \quad \langle \delta F(t) \delta F(t') \rangle = 2B \delta(t - t')$$

常数  $B$  衡量涨落力的强度，而  $\delta F(t)$  服从  $\delta$  相关性表明任意两个不同时刻的随机力是没有关联的。

为了求解这个一阶线性非齐次微分方程，我们有时需要对随机项  $\delta F(t)$  做微分或者积分，如果随机过程  $X(t)$  轨迹处处可微，那就再好不过了。以前面的带漂移布朗运动  $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$  为例：

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t)$$

更一般地有

$$X'(t) = \mu(X(t), t) + \sigma(X(t), t)B'(t)$$

设我们需要研究的函数为  $g(t)$ ，积分：

$$\int_0^t g(\tau)X'(\tau) d\tau = \mu \int_0^t g(\tau) d\tau + \sigma \int_0^t g(\tau)B'(\tau) d\tau$$

但是，这样处理是不行的。研究表明，很多随机过程的轨迹即使几乎处处连续，它也几乎处处不可微。所以通常意义上的 Riemann 积分面对随机过程在这里丧失了价值。我们需要定义一种新的积分形式，来研究以某个随机过程为权重的“带权求和”，这就是伊藤积分。

## 5.2 伊藤积分

其实伊藤积分非常简单，既然不能写成  $dX(t) = X'(t)dt$  的形式，干脆保留  $dX(t)$ ：

### Definition: 伊藤积分

设  $\{B(t), t \geq 0\}$  为标准布朗运动， $\{g(t), t \geq 0\}$  二阶矩存在且平方可积，则对  $\forall t > 0$ ，取分割： $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ ，记  $t_k - t_{k-1} = \Delta_k$  ( $1 \leq k \leq n$ )，且  $\lambda = \max \Delta_k$ ，若

$$\sum_{k=1}^n g(t_{k-1})(B(t_k) - B(t_{k-1}))$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时的均方极限存在，则称该极限为  $\{g(t), t \geq 0\}$  关于  $\{B(t), t \geq 0\}$  在区间  $[0, t]$  上的伊藤随机积分，记

$$I_g(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(t_{k-1})(B(t_k) - B(t_{k-1}))$$

在不至于引起混淆时，即可记为

$$I_g(t) = \int_0^t g(\tau) dB(t)$$

和 Riemann 积分比较, 不难发现它的要求降低了, 不再要求对于“小区间中任意的分点值”, 极限都存在, 均方收敛和收敛相比也弱一些。

## 6 涨落耗散定理

有了随机微分方程的知识, 我们现在着手求解朗之万方程。这个一阶线性非齐次的随机微分方程的解可以写为

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{\zeta t}{m}} + \int_0^t \frac{\delta F(s)}{m} \exp\left(-\frac{\zeta(t-s)}{m}\right) ds$$

线性叠加原理告诉我们: 第一项是确定性阻力对初速度的损耗, 第二项源于随机涨落与耗散的平衡。不过, 相对于速度本身, 我们更关心粒子的方均速率  $v_{\text{rms}}^2 = \langle v^2 \rangle$ 。

一通计算猛如虎:

Justification:

计算  $v(t)^2$ , 展开后有三项:

$$v^2(0)e^{-\frac{2\zeta t}{m}} \quad (6)$$

$$2v(0)e^{-\frac{\zeta t}{m}} \int_0^t \frac{\delta F(s)}{m} \exp\left(-\frac{\zeta(t-s)}{m}\right) ds \quad (7)$$

$$\left[ \int_0^t \frac{\delta F(s)}{m} \exp\left(-\frac{\zeta(t-s)}{m}\right) ds \right]^2 \quad (8)$$

方程中的量都有各自的物理含义, 所以

$$\int_0^t \frac{\delta F(s)}{m} \exp\left(-\frac{\zeta(t-s)}{m}\right) ds$$

必有界, 于是带有指数衰减的前两式在对噪声的积分中消失, 只剩下最后的

$$\langle v(t)^2 \rangle = \frac{1}{m^2} \int_0^t dt' \delta F(t') \exp\left(-\frac{\zeta(t-t')}{m}\right) \int_0^t dt'' \delta F(t'') \exp\left(-\frac{\zeta(t-t'')}{m}\right)$$

由于噪声服从  $\delta$  相关性:

$$\langle v(t)^2 \rangle = \frac{1}{m^2} \int_0^t dt' \exp\left(-\frac{\zeta(t-t')}{m}\right) \int_0^t dt'' \exp\left(-\frac{\zeta(t-t'')}{m}\right) 2B\delta(t' - t'')$$

根据  $\delta$  函数的性质, 结果如下:

$$\langle v(t)^2 \rangle = v(0)^2 e^{-\frac{2\zeta t}{m}} + \frac{B}{\zeta m} \left(1 - e^{-\frac{2\zeta t}{m}}\right)$$

我们看到  $\langle v(t)^2 \rangle$  采取我们喜闻乐见的指数衰减形式。在分子动理论中, 我们知道理想气体分子在平衡态的方均速率为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

显然

$$B = \zeta kT \quad (9)$$

这就是著名的**涨落耗散定理**。它说明涨落的强度  $B$  与耗散的强度  $\zeta$  成正比, 其实涨落和耗散都起源于粒子的随机运动 (回忆  $E[x^2] = 2Dt$  的证明以及粘滞阻力的形成机理), 是同一件事的两个方面 [12]。

## 参考文献

- [1] Peter Atkins. *Atkins' PHYSICAL CHEMISTRY 11th Edition*. 高等教育出版社, 2021.7.
- [2] Kaj Thomsen Georgios M. Kontogeorgis, Bjørn Maribo-Mogensen. The debye-hückel theory and its importance in modeling electrolyte solutions. *Fluid Phase Equilibria*, 462(130-152), 2018.
- [3] W.Hirsch Morris. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. World Book Inc, 2016.
- [4] Wan-Jian Yin. Simple descriptor derived from symbolic regression accelerating the discovery of new perovskite catalysts. *Nature Communications*, 11(3513), 2020.
- [5] Robert Zwanzig. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford University Press, Inc, 2000.
- [6] 威廉·费勒. 概率论及其应用. 人民邮电出版社, 2014.
- [7] 方兆本、缪柏其. 随机过程. 科学出版社, 2011.
- [8] 盛骤、谢式千、潘承毅. 概率论与数理统计. 高等教育出版社, 2008.
- [9] 范康年、周鸣飞. 物理化学. 高等教育出版社, 2021.3.
- [10] 辛厚文、侯中怀. 非线性化学. 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [11] 郑坚坚. 随机过程. 中国科学技术大学出版社, 2016.1.
- [12] 郑纪鸣. Random motion and diffusion. 2021.