目录

Chapter 1

基本概念

1 定义与最初的例子

1.1 李代数的基本概念

- 李代数的定义
- 李代数的同构 = 线性空间的同构 + 保持运算
- 一维李代数只有阿贝尔李代数
- 二维非平凡李代数只有 $[x, y] = y$
- $(\mathbb{R}^3, \times)$

定义 1.1 (李代数). 设 L 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，其上有一个二元运算 $[\ ,\ ] : L \times L \to L$，如果

(L1) 括号运算是双线性的

(L2) $[x, x] = 0$ 对于任意 $x \in \mathcal{L}$

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$，任意 $x, y, z \in \mathcal{L}$

那么称 L 为一个李代数，

注记.

- (L3) 被称作 Jacobi 恒等式. 它的一些 *trivial* 的等价形式
  - $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$
  - $[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$?
  - Lebniz 法则：$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$
- (L2) 通常被称作反交换性或斜对称性，事实上，利用 (L1) 和 (L2)，我们能由 $[x+y, x+y] = 0$ 推出

  (L2′) $[x, y] = -[y, x]$.

  当 $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$，在 (L2′) 中取 $y = x$，我们重新得到 (L2).

- 交换是否蕴涵着结合？

  考虑线性空间 $L = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}y$，在其上定义二元运算如下：

  $$xy = x, yx = x, xx = y, yy = x.$$

  容易验证 $(xx)y \neq x(xy)$，因此该二元运算是交换的，但不是结合的.

定义 1.2 (同构，子代数). 称 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 同构，如果存在向量空间之间的同构 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 满足 $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ 对任意 $x, y \in \mathcal{L}$ 成立.

称 $\mathcal{L}$ 的子空间 $\mathcal{K}$ 为子代数如果 $[x,y] \in \mathcal{K}$ 对任意 $x, y \in \mathcal{K}$ 成立.

例 1.1. 设 $\mathcal{L}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的李代数

(1) 如果 $\dim(L) = 1$，设 $L = \mathbb{F}x$，令 $[x,x] = 0$

(2) 如果 $\dim(L) = 2$，设 $L = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}y$，我们来看两个特殊的例子

   (a) $[x,y] = 0$，容易验证 $\mathcal{L}$ 是平凡李代数.

   (b) $[x,y] = -[y,x] = y$.

   注记. 我们可以只定义基之间运算是什么，然后线性延拓到所有元素间的运算（因而双线性性自动满足）. 只要基之间的运算满足了斜对称性，*Jacobi* 恒等式，所有元素的运算就随之满足斜对称性和 *Jacobi* 恒等式.

   首先我们要验证 (b) 确实是一个李代数. 唯一需要验证的是基之间是否满足 *Jacobi* 恒等式. 由 *Jacobi* 恒等式中元素的轮换对称性，我们事实上只需要检查两种情况.

   i. $[x,[x,y]] + [x,[y,x]] + [y,[x,x]] = [x,y] + [x,-y] + [y,0] = 0.$

   ii. $[y,[y,x]] + [y,[x,y]] + [x,[y,y]] = [y,-y] + [y,y] + [x,0] = 0.$

   注记. 除了平凡李代数，其它的二维李代数同构于它.

(3) 设 $L = \mathbb{R}^3$，并且 $[u,v] = u \times v$ 对于任意 $u, v \in L$，其中 $\times$ 是叉乘.

   (L1) $\checkmark$

   (L2) $u \times v = -v \times u$

   (L3)

   $$\begin{aligned}
   &[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] \\
   =&(u \cdot w)v - (u \cdot v)w + (v \cdot u)w - (v \cdot w)u + (w \cdot v)u - (w \cdot u)v \\
   =&0
   \end{aligned}$$

1.2 线性李代数

- 对于任意的（双线性）结合代数，我们总能以已有的二元运算为基础，构造一个新的二元运算，使得该线性空间在这个新的二元运算下成为一个李代数. 我们一般考虑非交换结合代数，否则得到阿贝尔李代数.
  - $\mathrm{End}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$
  - $M_n(\mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)a_{12} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)a_{21} & 0 \end{pmatrix}$
  也就是 a_{ij} 扩大 $\lambda_i - \lambda_j$ 倍，特别地，对角元变成 0.
- $\mathfrak{gl}(V)$ 与 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$
  - $\dim \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) = n^2$
  - 基 e_{ij}
  - $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$
  - $[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$
  - $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})) = \mathbb{F}I_n$
- $\mathfrak{sl}(V)$ 与 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$
  -
  - $[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$
- 上三角阵 $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$

命题 1.1. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的双线性结合代数，以 $\mathcal{A}$ 上的结合的二元运算为基础，定义其上的一个新的二元运算

$$[x, y] := xy - yx, \forall\ x, y \in \mathcal{A}$$

可以验证 $(\mathcal{A}, [\ ,\ ])$ 满足李代数的三条要求，记作 $\mathcal{A}^-$ 或 $\mathcal{A}_L$.

证明.

(L1) ✓

(L2) $[x, x] = xx - xx = 0$.

(L3)

$$[x, [y, z]] = [x, yz - zy] = x(yz - zy) - (yz - zy)x$$

$$[x, [y, z]] = xyz - xzy - yzx + zyx$$

$$[y, [z, x]] = yzx - yxz - zxy + xzy$$

$$[z, [x, y]] = zxy - zyx - xyz + yxz$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

□

注记. 如果 $\mathcal{A}$ 本身还是交换的，那么 $\mathcal{A}^-$ 就是平凡李代数. 这促使我们去考虑一些结合非交换代数，首先想到的便是矩阵和线性映射.

例 1.2 (一般线性李代数).

$$\mathfrak{gl}(V) := \mathrm{End}(V)^-.$$

如果 $\dim V = n < +\infty$，通过选取 V 的一组基，我们能够把 $\mathfrak{gl}(V)$ 视作

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) := M_n(\mathbb{F})^-.$$

注记. 对于任意的线性空间 V 我们都能定义与他有关的一般线性李代数 $\mathfrak{gl}(V)$. 李代数 $\mathcal{L}$ 本身也是线性空间，我们当然可以定义与 $\mathcal{L}$ 有关的一般线性李代数 $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$.

例 1.3 (A_l).

$$\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F}) := \left\{x \in \mathfrak{gl}_{l+1}(\mathbb{F}) | \operatorname{tr}(x) = 0\right\}$$

- $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$
- 由于 $\operatorname{tr}(e_{11}) = 1$，因此 $\operatorname{tr} : M_{l+1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 显然是满射. 由维数定理，我们知道 $\dim \mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F}) = (l+1)^2 - 1 = l^2 + 2l$.
- $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F})$ 是 $\mathfrak{gl}_{l+1}(\mathbb{F})$ 的理想
- 基
  - 对角线元素：$\{h_i | e_{ii} - e_{i+1,i+1}, 1 \leqslant i \leqslant l\}$
  - 非对角线元素：$\{e_{ij} | 1 \leqslant i \neq j \leqslant l+1\}$
  - 当 $l = 1$ 时，基为
$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

当 $\dim V = l + 1 < +\infty$ 时，我们选取 V 的一组基建立 $\mathfrak{gl}(V)$ 与 $\mathfrak{gl}_{l+1}(\mathbb{F})$ 之间的同构，将 $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F})$ 的同构象定义为 $\mathfrak{sl}(V)$. 这个定义不依赖于基的选取是因为矩阵的迹是相似不变量.

当 $\dim V = +\infty$ 时，我们一般不能定义 $\mathfrak{sl}(V)$. 当 $\dim V < +\infty$ 时，容易证明不存在线性变换满足 $\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{I}$；但这在 $\dim V = +\infty$ 时是有可能的，比如设 $V = \mathbb{R}[x]$，定义

$$f(p(x)) := xp(x),$$

$$g(p(x)) := p'(x),$$

容易验证

$$(gf - fg)(p(x)) = p(x).$$

命题 1.2. 任意 $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$，存在 $y, z \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$，使得 $x = [y, z]$.

引理 1.1. $\operatorname{tr}(A) = 0$ 当且仅当 A 可相似对角化到一个主对角线元素均为零的矩阵.

证明. 对矩阵的维数进行归纳.

当 $n = 1$ 时，结论显然成立.

- 情形一：$\mathbb{R}^n$ 中的所有非零向量都是 A 的特征向量. 选定一组标准正交基，由它们都是特征向量可知，存在 λ_i 使得 $Ae_i = \lambda_i e_i$. 因此，$A \sim \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 再由所有 $e_i + e_j$ 都是特征向量有，存在 μ_{ij} 使得 $A(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \mu_{ij}(e_i + e_j)$，于是 $\mu_{ij} = \lambda_i = \lambda_j$. 因此 A 为纯量阵. 由 $\operatorname{tr}(A) = 0$ 知 $A = 0$.

- 情形二：存在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 α 不是 A 的特征向量，则 $\alpha, A\alpha$ 线性无关，因而存在可逆实方阵 $Q = (\alpha, A\alpha, *, \cdots, *)$ 满足 $AQ = Q\begin{pmatrix} 0 & * \\ & B \end{pmatrix}$，或者等价地 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & B \end{pmatrix}$，其中 B 为 $n-1$ 阶实方阵. 由 $\operatorname{tr}(A) = 0$ 知 $\operatorname{tr}(B) = 0$. 由归纳假设，存在可逆实方阵 R 使得 $R^{-1}BR$ 的对角元素都是 0. 令 $P = Q\operatorname{diag}(1, R)$，则 $P^{-1}AP$ 的对角元素都是 0.

□

定理 1.1. 特征为 0 的域上的有限维单李代数可以由两个元素生成.

注记. 生成到底是什么意思？可以使用什么运算？李括号是必然的；线性空间的运算也应该是允许的. 既然有线性空间的运算，那我们通过对生成元进行一些运算把所有的基都搞出来就好了.

例 1.4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ 的生成元.

证明.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

注记.

- 基本身只反映线性结构，基可以通过线性运算生成整个线性空间；知道了基与基之间的李括号怎样作用就知道了任意两个元素间的李括号怎样作用；生成元除了可以使用线性运算，还可以使用李括号来生成其他元素，需要的最小的生成元的个数显然小于等于基的个数.

- $e_{i,i+1}, e_{i+1,i}, e_{ii-i+1,i+1}$

- $[e_{i,i+1}, e_{i+1,i}] = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$

-

引理 1.2. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，f 是 V 上的双线性型. 定义

$$L := \{x \in \operatorname{End}(V) | f(x(v), w) = -f(v, x(w)), \forall\ v, w \in V\},$$

那么 L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数.

证明. 容易看出 L 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子空间，这是因为 f 是双线性的. 下面验证 L 关于交换子封闭.

设 $x,y\in L$，

$$\begin{aligned}&f([x,y]v,w)\\=&f\left(x(y(v)),w\right)-f\left(y(x(v)),w\right)\\=&-f(y(v),x(w))+f(x(v),y(w))\\=&f(v,y(x(w)))-f(v,x(y(w)))\\=&-f(v,[x,y](w))\end{aligned}$$

□

例 1.5 (C_l)**.** 设 $\dim V=2l$，其基为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{2l}\}$.

考虑 V 上的非退化斜对称双线性型

$$f(v,w)=v^t sw, s=\begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix}\in M_{2l}(\mathbb{F}).$$

定义辛李代数 $\mathfrak{sp}(V)$ 为

$$\mathfrak{sp}(V)=\{x\in\mathrm{End}(V)|f(xv,w)=-f(v,xw),\forall\ v,w\in V\}.$$

接下来我们看一看这个李代数中的元素究竟长什么样子

$$(xv)^t sw=-v^t sxw\Rightarrow x^t s=-sx$$

设 $x=\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}m^t & p^t\\ n^t & q^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-p^t & m^t\\ -q^t & n^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p & -q\\ m & n\end{pmatrix}$$

即 $n^t=n, p^t=p, m^t=-q$.

接下来我们找 $\mathfrak{sp}(V)$ 的一组基.

- m,p：$e_{ij}-e_{j+l,i+l}, 1\leqslant i,j\leqslant l$
- n 的对角元：$e_{i,i+l}, 1\leqslant i\leqslant l$
- n 的非对角元：$e_{i,j+l}+e_{j,i+l}, 1\leqslant i<j\leqslant l$
- p 与 n 同理

因此 $\dim\mathfrak{sp}(V)=2l^2+l$.

注记. $\mathfrak{sp}(V)$ 是 $\mathfrak{sl}(V)$ 的子代数.

例 1.6. 设 $\dim V = 2l+1$. 考虑 V 上的对称双线性型

$$f(v,w) = v^t sw, s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix} \in M_{2l+1}(\mathbb{F}).$$

定义正交李代数为

$$\mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{F}) = \mathfrak{o}(V) := \{x \in \operatorname{End} V | f(xv,w) = -f(v,xw), \forall\ v,w \in V\}.$$

例 1.7.

$$s = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

注记. $o_6 \cong sl_4, o_2 = sp_2 = sl_2 \cong o_3, sp_4 = o_5, o_4 \cong sl_2 \oplus sl_2$

注记. 反对称阵取指数得到正交阵

定义 1.3. 设 L 和 L' 都是李代数，定义 $L'' := L \oplus L'$，

$$[(x,v),(y,u)] := ([x,y],[v,u])$$

例 1.8 (斜对称阵)**.** 对于 $n \in \mathbb{Z}^+$，定义

$$\mathcal{K}_n =: \left\{A \in M_n(\mathbb{F}) | A^t = -A\right\}$$

那么 $\mathcal{K}_n$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ 的子代数，并且

$$\dim \mathcal{K}_{2l} = 2l^2 - l = \dim \mathfrak{o}_{2l}(\mathbb{F}), \dim \mathcal{K}_{2l+1} = 2l^2 + l = \dim \mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F})$$

$$k_{2l} \cong o_{sl}, k_{2l+1} \cong sp_{2l}$$

1.3 $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ 与 $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$

- $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$，上三角阵，基 $e_{ij}, i \leqslant j$.
- $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$，严格上三角阵，基 $e_{ij}, i < j$.
- $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$，对角阵，基 $e_{ii}, 1 \leqslant i \leqslant n$.
- $[\mathfrak{d}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{n}_n(\mathbb{F})] = \mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$.
  - 当 $i < j$ 时，$[e_{ii}, e_{ij}] = e_{ii}e_{ij} - e_{ij}e_{ii} = \delta_{ii}e_{ij} - \delta_{ij}e_{ii} = e_{ij}$.
  - 从而 $[\mathfrak{t}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{t}_n(\mathbb{F})] = \mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$.
- $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ 与对称阵显然维数相同，但它们不同构.
- $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$ 是阿贝尔李代数

定理 1.2 (Ado-Iwasawa)**.** 任何有限维李代数都同构于某个线性李代数.

1.4 导子构成的李代数

- 导子是代数上满足 Lebniz 法则的线性变换
- 一个线性变换到底是不是导子取决于这个代数上的二元运算是什么
- 导子的全体记作 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$，它是 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 的子空间，在交换子的二元运算下又称为 $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 的子代数
  - 有趣的是，$\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 这个李代数与 $\mathcal{A}$ 上的二元运算是什么完全无关.
  - 在 $\mathcal{A}$ 上定义不同的二元运算，就会得到不同的 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$，但它们都是同一个 $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 的子代数.
- 对于李代数可以验证 $\mathrm{ad}\, x(y) := [x, y]$ 是导子，称这样的导子为内导子，内导子的全体记作 $\mathrm{Inn}(\mathcal{L})$
- $\mathrm{Inn}(\mathcal{L})$ 是 $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$ 的子代数，$\mathrm{Der}(\mathcal{L})$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$ 的子代数.

定义 1.4 ($\mathbb{F}$-代数)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，若 $\mathcal{A}$ 上还有一个双线性二元运算 $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{F}$-代数.

注记. 结合代数，李代数等等都是对该二元运算提出特殊要求的 $\mathbb{F}$-代数.

定义 1.5 (导子)**.** $\mathbb{F}$-代数 $\mathcal{A}$ 上的导子是指 $\mathcal{A}$ 上的一个线性变换 $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 满足 *Lebniz* 法则

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

将 $\mathcal{A}$ 上的全部导子记为 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$，那么 $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{End}(\mathcal{A})$，并且容易验证 $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 对加法和数乘是封闭的，构成 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 的子空间

注记. 导子的复合是导子吗？

命题 1.3. $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 的子代数.

证明. 设 $x, y \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$，下面验证 $[x, y] = xy - yx$ 也是导子.

$$\begin{aligned}
&(xy)(a * b)\\
=&x\,[y(a * b)]\\
=&x\,[y(a) * b + a * y(b)]\\
=&x(y(a) * b) + x(a * y(b))\\
=&(xy)(a) * b + y(a) * x(b) + x(a) * y(b) + a * (xy)(b)\\
&(yx)(a * b)\\
=&(yx)(a) * b + x(a) * y(b) + y(a) * x(b) + a * (yx)(b)
\end{aligned}$$

注记. 有空时把 xy 换成 δ 吧

因此

$$(xy-yx)(a*b)=(xy-yx)(a)*b+a*(xy-yx)(b).$$

□

于是现在只要我们有一个代数就可以得到它的导子代数.

例 1.9. $\mathbb{C}[t]$ 是一个交换结合代数，我们来计算它的导子都是什么.

由于导子首先是一个线性映射，我们只需要知道导子在 $\mathbb{C}[t]$ 的基 $\left\{1,t,t^2,\cdots\right\}$ 上的作用

$$\delta(1)=\delta(1\cdot 1)=\delta(1)\cdot 1+1\cdot\delta(1)=2\delta(1)\Rightarrow\delta(1)=0$$

$$\delta(t)=f(t)\in\mathbb{C}[t]$$

$$\delta(t^2)=\delta(t)t+t\delta(t)=2t\delta(t)=\delta(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2$$

猜测 $\delta(t^k)=\delta(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^k$ 对任意 $k\geqslant 1$ 正确，归纳证明

$$\delta(t^{k+1})=\delta(t)t^k+t\delta(t^k)=(k+1)t^k\delta(t)=\delta(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{k+1}.$$

因此

$$\mathrm{Der}(\mathbb{C}[t])=C[t]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

例 1.10. $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$

$$\delta(1)=\delta(t\cdot t^{-1})=\delta(t)t^{-1}+t\delta(t^{-1})\Rightarrow\delta(t^{-1})=-\delta(t)t^{-2}=\delta(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-1}$$

$$\delta(t^{-2})=\delta(t^{-1})t^{-1}+t^{-1}\delta(t^{-1})=2t^{-1}\delta(t^{-1})=-2t^{-3}\delta(t)=\delta(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-2}$$

$$\mathrm{Der}(\mathbb{C}[t,t^{-1}])=\mathbb{C}[t,t^{-1}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

例 1.11. 结合代数 $M_n(\mathbb{C})$，对任意 $A\in Mn(\mathbb{C})$，验证

$$\varphi(X):=[A,X]=AX-XA$$

是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的一个导子.

证明.

$$\begin{aligned}
&[A,XY]\\
&=A(XY)-(XY)A\\
&=AXY-XYA\\
&[A,X]Y+X[A,Y]\\
&=(AX)Y-(XA)Y+X(AY)-X(YA)\\
&=AXY-XAY+XAY-XYA\\
&=AXY-XYA
\end{aligned}$$

因此

$$[A,XY]=[A,X]Y+X[A,Y].$$

□

注记. 注意到结合性在其中发挥了重要的作用.

命题 1.4. 设 $\mathcal{L}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数，对任意 $x \in \mathcal{L}$，

$$\operatorname{ad} x(y) := [x, y]$$

是 $\mathcal{L}$ 上的一个导子.

证明. 由李括号的双线性性 $\operatorname{ad} x$ 显然是 $\mathcal{L}$ 上的线性变换.

$$\operatorname{ad} x([y,z]) = [x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] = [\operatorname{ad} x(y), z] + [y, \operatorname{ad} x(z)].$$

□

定义 1.6. 定义

$$\operatorname{Inn}(\mathcal{L}) := \{\operatorname{ad} x | x \in \mathcal{L}\}.$$

称 $\delta \in \operatorname{Inn}(\mathcal{L})$ 为内导子，$\delta \in \operatorname{Der}(\mathcal{L}) \setminus \operatorname{Inn}(\mathcal{L})$ 为外导子.

注记. 外导子是 $\operatorname{Der}(\mathcal{L})$ 挖去 $\operatorname{Inn}(\mathcal{L})$ 而不是 $\operatorname{Der}(\mathcal{L})$ 模去 $\operatorname{Inn}(\mathcal{L})$，挖去和模去的符号有点像注意不要混淆. 不过外导子的概念似乎也不怎么重要就是了.

命题 1.5. $\operatorname{Inn}(\mathcal{L})$ 是 $\operatorname{Der}(\mathcal{L})$ 的子代数.

证明.

$$\begin{aligned}
&[\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y](z) \\
=&[x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\
=&[x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\
=&-[z,[x,y]] \\
=&[[x,y],z] \\
=&\operatorname{ad}([x,y])(z)
\end{aligned}$$

□

注记.

- $[\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y] = \operatorname{ad}[x,y]$. 从这个方向读，意思就是 $\operatorname{Inn}(\mathcal{L})$ 在交换子的运算下是封闭的.
- $\operatorname{ad}[x,y] = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y]$. 从这个方向读，意思就是 ad 是从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$ 的一个同态.

  我们把这种到一个一般线性李代数的同态叫做 $\mathcal{L}$ 的一个表示.
  特别地，称 ad 为 $\mathcal{L}$ 的伴随表示.

注记. 可以一字不差的证明：对任意 $\delta \in \operatorname{Der}(L), x \in \mathcal{L}$，

$$[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} \delta x \in \operatorname{Inn} \mathcal{L}.$$

这实际上是说，$\operatorname{Inn}(\mathcal{L})$ 不仅仅是 $\operatorname{Der}(\mathcal{L})$ 的子代数，还是 $\operatorname{Der}(\mathcal{L})$ 的理想.

注记. 若 x 非零，那么 $\operatorname{ad} x$ 便有非零的从属于 0 的特征向量 x.

注记. 若 x 处于 L，还处于 L 的子代数 $L1$，那么 adx 一般是不一样的

1.5 抽象李代数

引理 1.3. 设 L 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，其基为 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，并且 $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ 是一个双线性型，那么 L 在 $[\ ,\ ]$ 下成为李代数当且仅当

- $[x_i, x_i] = 0, [x_i, x_j] = -[x_j, x_i], \forall\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$
- $[x_i, [x_j, x_k]] + [x_j, [x_k, x_i]] + [x_k, [x_i, x_j]] = 0, \forall\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n$

2 同态和理想

- 自己跟自己作用还在里面是子代数，自己跟整体作用还在里面是理想，整体跟整体作用还在里面的最小子空间是导出子代数
  - 导出子代数一定是理想，理想一定是子代数
- 理想的例子
  - 中心
  - 导出子代数
  - 理想的和
  - 理想的交
  - $[I, J]$
- 对于任意的子空间我们总能定义模掉它得到的商空间，但只有当（其实不是必要条件，但这样说起来顺口一点）这个子空间是一个理想时我们才能在商空间上定义李代数

2.1 理想

定义 2.1. 设 L 是李代数，I 是 L 的子空间，如果对任意 $x \in L, y \in I$ 有 $[x, y] \in I$，称 L 的子空间 I 为 L 的理想，记作 $I \lhd L$.

注记.

- 正因为李括号的运算是斜对称的，我们才不需要定义单边理想.
- 理想一定是子代数，子代数不必是理想.

例 2.1. L 的中心

$$\mathcal{Z}(L) := \{z \in L | [x, z] = 0, \forall x \in L\}$$

是一个理想.

注记.

- $\mathcal{Z}(L) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$.
- $L/\mathcal{Z}(L) = \mathrm{Inn}(L)$
- L 是交换的当且仅当 $\mathcal{Z}(L) = L$.
- 在某种程度上中心表示和所有元素可交换的元素
- $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})) = \mathbb{F} I_n$

例 2.2. 导出子代数 $[L, L] \lhd L$.

注记.

- L 是交换的当且仅当 $[L, L] = \{0\}$.

- $[\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{gl}(V)]=\mathfrak{sl}(V)$.

例 2.3. 若 $I,J\lhd L$，那么 $I+J\lhd L$.

证明. I 和 J 首先是子空间，$I+J$ 也是子空间.

对任意 $x+y\in I+J$，$z\in L$，

$$[x+y,z]=[x,z]+[y,z]\in I+J$$

因此 $I+J$ 也是理想. □

例 2.4. 若 $I,J\lhd L$，那么 $[I,J]\lhd L$.

证明. 回忆 $[I,J]$ 是所有形如 $[x,y],x\in I,y\in J$ 的元素张成的线性空间.

任取 $x\in I,y\in J,z\in L$，那么

$$[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]]\in[I,J]$$

从这里我们也能看到 $[I,J]$ 是 L 的理想，但 $\{[x,y]|x\in I,y\in J\}$ 一般不是 L 的理想. □

例 2.5. L 是一个李代数，*Inn*（L）还是李代数，*Inn*（L）是它的一个理想。

定义 2.2 (完美李代数)**.** 如果 $L=[L,L]$，那么我们称 L 是完美李代数.

注记. 也就是说，做换位运算，这个李代数不会变小. 但很多李代数都是会变小的，首先一维李代数，它是平凡的，一定会变小；平凡二维李代数，当然也会变小了；非平凡的二维李代数都同构于我们之前定义过的 $[x,y]=y$，其中 x,y 是这个二维李代数的基，那显然变成一维的了也变小了. 所以一维二维不存在完美李代数.

三维中，$(\mathbb{R}^3,\times)$ 和 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ 都是完美李代数.

定义 2.3. 称李代数 L 是单的当且仅当它没有非平凡理想，并且 $[L,L]\neq 0$.

注记. $[L,L]\neq 0$ 的要求实际上只是为了排除 $\dim L=1$ 的情况，容易看出，一维李代数确实没有非平凡理想，但 $[L,L]=0$.

当 $\dim\geqslant 2$ 时，实际上我们能推出 $[L,L]\neq 0$. 首先 $[L,L]\lhd L$，但 L 只有平凡理想，即 $[L,L]=0$ 或 $[L,L]=L$. 但只要 $[L,L]=0$，即 L 是交换的，那么任意子空间都是 L 的理想，这就与 L 只有平凡理想矛盾了. 因此 $[L,L]\neq 0$，附带的我们还得到了 $[L,L]=L$，也就是单李代数一定是完美李代数.

注记. L 的中心 $\mathcal{Z}(L)$ 也是 L 的理想，对于单李代数，只有平凡理想，那么 $\mathcal{Z}(L)$ 要么为 0 要么为 L. 但显然 $\mathcal{Z}(L)$ 不能是 L，因为这意味着 L 是交换的，任意子空间都是 L 的理想了. 因此 $\mathcal{Z}(L)=0$.

我们之前说过 $\mathcal{Z}(L)=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$，$L/\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})\simeq\mathrm{Inn}(L)$，既然 $\mathcal{Z}(L)=0$，那么

$$L\cong\mathrm{Inn}(L).$$

也就是单李代数 L 同构于其内导子.

例 2.6. 设 $L=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$，$\mathrm{char}\,\mathbb{F}\neq 2$，其基为

$$x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

乘法表为

$$[x,y]=h,[h,x]=2x,[h,y]=-2y.$$

注意到 x,y,h 分别是 $\mathrm{ad}\,h$ 从属于 $2,-2,0$ 的特征向量，因为 $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\neq 2$，所以这些特征值是互不相同的.

如果 I 是 L 的一个理想，那我用任意元素作用到 I 中元素上得到的东西都应该还在 I 中. 假设 $x\in I$，那么 $[x,y]=h\in I$，$[h,y]=2y\in I$，因此 $x,y,h\in I$ 进而 $I=L$. 从 y 和 h 出发同理能够得到 x,y,h 都在 I 里.

下面我要论证如果 $I\neq 0$，也就是 I 中有一个非零元素 $ax+by+ch$，那我总能推出 x,y,h 中的一者在 I 里进而都在 I 里进而 $I=L$.

$$[x,ax+by+ch]=0+bh-2cx\in I,[x,bh-2cx]=-2bx\in I$$

$$[y,ax+by+ch]=-ah+0-2cy\in I,[y,-ah-2cy]=-2ay\in I$$

因此当 a 或 b 不为零时我能推出 y 或 x 在 I 中，当 $a=b=0$ 时，$ch\in I$ 就已经说明了 $h\in I$.

因此 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ 是单的.

注记. 证明，当 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，L 是单的推出 $L\cong\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$，L 是单的推出 $L\cong\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 或 $L\cong\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

首先证明，在复数域里，如果 $[\alpha,\beta]=\gamma,[\beta,\gamma]=\alpha,[\gamma,\alpha]=\beta$，$L=\mathbb{C}\alpha\oplus\mathbb{C}\beta\oplus\mathbb{C}\gamma$，那么 $L\cong\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

注记. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 与 $(\mathbb{R}^3,\times)$ 不同构，这是因为我们在 $(\mathbb{R}^3,\times)$ 中找不到一个像 h 一样的元素.

当一个李代数不是单的，那么我们总是可以“factor out”一个非平凡理想，进而得到一个维数更低的李代数.

定义 2.4 (商代数)**.** 定义 L 关于其理想 I 的商代数为商空间 L/I，其上的李括号定义为

$$[x+I,y+I]:=[x,y]+I.$$

注记. 我们要验证这个定义是良定的，事实上我们将发现，它的良定是由我们对理想的定义保证的. 这也正是我们定义理想的动机.

若 $x_1-x_2=u\in I,y_1-y_2=v\in I$，我们要验证 $[x_1,y_1]-[x_2,y_2]\in I$.

$$[x_1,y_1]=[x_2+u,y_2+v]=[x_2,y_2]+[u,y_2]+[x_2,v]+[u,v].$$

定义 2.5 (直和)**.** 设 L 和 L' 都是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数，那么我们可以在直和 $L\oplus L'$ 上定义李代数的结构

$$[(x,x'),(y,y')]=([x,y],[x',y'])$$

李代数 $L\oplus L'$ 被称作 L 与 L' 的直和.

注记. L 是不是一定是 $L\oplus L'$ 的理想？

注记. $\mathfrak{sl}_2\oplus\mathfrak{sl}_2$ 一共有四个子代数.

注记. $\mathfrak{sl}_2$ 有多少个子代数？

定义 2.6 (正规化子)**.** 定义 L 的子空间 K 的正规化子为

$$N_L(K) = \{x \in L | [x, K] \subset K\}.$$

注记.

- $N_L(K)$ 是 L 的子代数. 若 $x, y \in N_L(K)$，那么

$$[[x, y], K] = [x, [y, K]] - [y, [x, K]] \subset K$$

- 如果 K 还是一个子代数, 那么就有 $K \subset N_L(K)$. 按定义, K 还是 $N_L(K)$ 的理想. 并且, $N_L(K)$ 还是以 K 为理想的最大的子代数.

- 如果 $K = N_L(K)$，我们称 K 是自正规的.

定义 2.7 (中心化子)**.** 定义 L 的子集 X 的中心化子为

$$C_L(X) = \{x \in L | [x, X] = 0\}.$$

注记. $C_L(X)$ 是 L 的子代数. 容易看出这和 $N_L(K)$ 那里的证明是一样的. 从这里也可以看出为什么中心化子可以只要求 X 是子集而正规化子必须要求 K 是子空间.

例 2.7. 对于 $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}y \oplus \mathbb{F}h$，

(1) 如果 $K = \mathbb{F}x$，那么 $N_L(K) = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}h, C_L(K) = \mathbb{F}x$.

(2) 如果 $K = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}h$，那么 $N_L(K) = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}h, C_L(K) = \{0\}$.

(3) 如果 $K = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}y$，那么 $N_L(K) = \mathbb{F}h, C_L(K) = \{0\}$.

(4) 如果 $K = \mathbb{F}h$，那么 $N_L(K) = \mathbb{F}h, C_L(K) = \mathbb{F}h$.

(5) 如果 $K = \mathbb{F}(x + y)$，那么 $N_L(K) = K$.

例 2.8. 对于非平凡二维李代数 $L = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}y$，$[x, y] = y$，

(1) 如果 $K = \mathbb{F}x$，那么 $N_L(K) = \mathbb{F}x, C_L(K) = \mathbb{F}x$.

(2) 如果 $K = \mathbb{F}y$，那么 $N_L(K) = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}y, C_L(K) = \mathbb{F}y$.

2.2 同态与表示

定义 2.8. 设 $\mathcal{L},\mathcal{L}'$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数，称线性映射 $\varphi:\mathcal{L}\to\mathcal{L}'$ 是李代数同态如果对任意 $x,y\in\mathcal{L}$ 成立 $\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]$.

称 φ 是单同态如果 $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$，称 φ 是满同态如果 $\operatorname{Im}\varphi=\mathcal{L}'$.

称 φ 是同构如果它既是单同态又是满同态.

回忆

定理 2.1 (映射基本定理)**.**

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & Y \\ X/\overset{f}{\sim} \arrow[r, leftrightarrow] & \operatorname{Im} f \arrow[u, hook, "inc"'] \end{tikzcd}$$

我们将映射基本定理应用到李代数同态 $\varphi:\mathcal{L}\to\mathcal{L}'$ 上，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathcal{L}' \\ \mathcal{L}/\overset{\mathcal{L}}{\sim} \arrow[r, leftrightarrow] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, hook, "inc"'] \end{tikzcd}$$

由于 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 本身的环结构以及 φ 对结构的保持，我们能说更多的事情：

- $\operatorname{Im}\varphi$ 具有李代数结构，从而不仅仅是 $\mathcal{L}'$ 的子集而且是 $\mathcal{L}'$ 的子代数.
- $\mathcal{L}/\overset{\mathcal{L}}{\sim}$ 具有李代数结构.
- $\tilde{\varphi}$ 是李代数同态，从而不仅仅是双射，而且是李代数同构.

注记.

- $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 $\mathcal{L}$ 的理想. 设 $x\in\operatorname{Ker}\varphi$，$y\in L$，则

$$\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]=[0,\varphi(y)]=0\in\operatorname{Ker}\varphi$$

- $\operatorname{Im}\varphi$ 是 $\mathcal{L}'$ 的子代数，这是因为

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=\varphi([x,y]).$$

命题 2.1 (同态基本定理)**.**

(a) 如果 $\varphi:L\to L'$ 是李代数同态，那么

$$L/\operatorname{Ker}\varphi\cong\operatorname{Im}\varphi$$

如果 $I\lhd L$，$\operatorname{Ker}\varphi\subset I$，那么存在同态 $\psi:L/I\to L'$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & L' \\ & \\ & L/I \end{tikzcd}$$

(b)

(c) $I, J \lhd L$,

$$(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$$

定义 2.9. 设 $\mathcal{L}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李代数.$\mathcal{L}$ 的一个表示是指一个同态

$$\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V),$$

其中 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的某个线性空间.

例 2.9. $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L})$ 称为 $\mathcal{L}$ 的伴随表示.

命题 2.2. 任意单李代数同构于一个线性李代数.

证明. L 是单的 $\Rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{L})$

$$L \cong \mathrm{ad}\, L < \mathfrak{gl}(L)$$

□

2.3 自同构

例 2.10. L 是一个李代数，$x \in L$，并且 $\mathrm{ad}\, x$ 是幂零的，定义

$$\exp(\mathrm{ad}\, x) := 1 + \mathrm{ad}\, x + \frac{(\mathrm{ad}\, x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathrm{ad}\, x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

断言，$\exp(\mathrm{ad}\, x)$ 是一个自同构.

(1) $(\exp(\mathrm{ad}\, x))^{-1} = (\exp(-\,\mathrm{ad}\, x))$

(2) $\exp(\mathrm{ad}\, x)[y,z] = [\exp(\mathrm{ad}\, x)y, \exp(\mathrm{ad}\, x)z]$

注记. $\delta \in \mathrm{Der}(L)$，$\delta[y,z] = [\delta y, z] + [y, \delta z]$

$$\delta^n([y,z]) = \sum_{i=0}^{n}$$

定义 2.10.

$$Int(L) := \langle exp(adx) \big| adxniplont \rangle$$

是 $Aut(L)$ 的子群

命题 2.3. $Int(L) \lhd AutL$

证明. 任取 $\varphi \in Aut(L)$，任取 $x \in L$，adx 幂零

$$\varphi(adx)\varphi^{-1}(y) = \varphi([x, \varphi^{-1}(y)]) = [\varphi(x), y] = ad\varphi(x)(y)$$

$$\varphi adx \varphi^{-1} = ad\varphi(x)$$

□

例 2.11. $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$，定义

$$\sigma := (\exp \operatorname{ad} x)(\exp \operatorname{ad} y)(\exp \operatorname{ad} x)$$

$\sigma \in Int(L) \subset Aut(L)$ $\sigma(x) = -y, \sigma(y) = -x, \sigma(h) = -h$

注记. 这是自同构是显然的，内自同构不是显然的.

命题 2.4. $L \subset gl(V)$，$x \in L$ 是一个幂零线性变换，那么

$$(\exp x)y(\exp x)^{-1} = (\exp(\operatorname{ad} x))\,(y)$$

证明. □

3 可解李代数与幂零李代数

3.1 可解性

定义 3.1. L 可解意思是存在 n 使得 $L^{(n)} = 0$

例 3.1.

$$t_n(F)$$

命题 3.1. L 是李代数

- L 是可解的 $\Rightarrow$ 子代数与同态象都是可解的.
- $I \lhd L$，I 可解，L/I 可解，那么 L 可解.
- $I, J \lhd L$ 都是可解的，那么 $I + J$ 也是可解的.

证明. □

注记. 存在唯一的极大可解理想.

定义 3.2. 如果 $RadL = 0$，称 L 是半单的.

例 3.2. (1) L 是单的，$\Rightarrow [L, L] = L$

(3) $L/RadL$ 是半单的

(4) $\dim L = 1, 2$ 那么 L 不是半单的.
L

3.2 幂零

例 3.3. *1.* 幂零一定可解

2. 可解不一定幂零

命题 3.2.

注记. L 幂零能推出 $(adx)^n = 0$ 对任意 $x \in L$ 成立.

定义 3.3. L 是一个李代数，$x \in L$，如果 adx 幂零，那么称 x 是 $adnipoltent$ 的

如果 L 是幂零的那么 x 都是 ad 幂零的

定理 3.1 (Engel)**.** $\dim L < +\infty$，如果任意 $x \in Lx$ 是 $adniplont$，那么 L 是一个幂零李代数.

Chapter 2

作业

1