微分方程

孙天阳

目录

目录 5

I 常微分方程 **7**

1 初等积分法 **9**

1.1 一阶线性方程 9

2 存在唯一性定理 **11**

2.1 Picard 存在唯一性定理 11

2.2 解的延伸 15

2.3 第一次习题课 17

2.4 比较定理 18

3 奇解 **21**

3.1 一阶隐式微分方程 21

3.1.1 微分法 21

3.1.2 参数法 22

4 高阶微分方程 **25**

4.1 解对初值和参数的连续依赖性 25

4.2 解对初值和参数的连续可微性 27

5 线性微分方程组 **29**

5.1 § 齐次线性方程组 29

5.2 高阶线性微分方程式 31

5.2.1 常系数高阶线性微分方程 31

6 定性理论与分支理论初步 **33**

6.1 动力系统、相空间与轨线 33

6.2 解的稳定性 34

6.2.1 线性稳定性 34

6.2.2 Lyapunov 第二办法 (针对非线性方程) 35

6.3 平面上的动力系统，奇点与极限环 37

II 偏微分方程 **39**

7 传输方程 **45**

7.1 常系数传输方程 45

7.1.1 特征线法 45

7.1.2 初值问题 45

7.2 非线性传输方程 46

8 波动方程 **47**

8.1 达朗贝尔公式、波的传播 47

8.1.1 全直线上的自由振动与达朗贝尔公式 47

8.1.2 延拓法处理半直线带有某种边值条件的自由振动问题 49

8.1.3 齐次化原理解强迫振动但初值为零的初值问题 50

8.1.4 混合问题例题 52

8.2 初边值问题的分离变量法 54

8.2.1 Sturm-Liouville 边值问题 56

8.2.2 非齐次方程，非齐次边界 60

8.2.3 分离变量法例题 61

8.3 高维波动方程的柯西问题 64

8.3.1 齐次方程，dim=3，球平均法 64

8.3.2 齐次方程，dim=2，降维法 68

8.3.3 非齐次方程 69

8.4 第七次习题课 71

8.5 波动方程解的衰减估计 73

8.5.1 dim=3 73

8.5.2 dim=2 74

8.6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性 76

8.6.1 非齐次项为零 76

8.6.2 非齐次项不为零 78

8.7 习题 82

9 热传导方程 (扩散方程) **87**

9.1 分离变量法 87
9.1.1 dim=1 87
9.1.2 圆形域 91
9.1.3 习题 93
9.2 柯西问题 95
9.2.1 解的导出 95
9.2.2 解的性质 96
9.3 极值原理，定解问题解的唯一性和稳定性 97
9.4 能量方法 105
9.5 第九次习题课 106
9.6 解的渐进性态 108
9.7 倒向唯一性 109

10 调和方程 (位势方程) 111

10.1 基本解的导出 111
10.2 Green 公式与 Green 函数 115
10.2.1 Green 函数的求法 116
10.3 调和函数的性质 117
10.3.1 平均值性质 117
10.3.2 B.Harnock 不等式及应用 123
10.4 极值原理、第二边值问题的唯一性 126
10.4.1 $\Delta u \geqslant 0$ 126
10.4.2 $-\Delta u + c(x)u = f(x)$ 129
10.5 那些年我们构造过的辅助函数 131
10.6 习题 132

III 可积系统 135

11 椭圆曲线和 KdV 行波 137

11.1 椭圆曲线和 Weierstrass$\wp$ 函数 137
11.1.1 $\wp$ 满足的微分方程 137
11.2 KdV 方程的行波解 138

A Fourier 变换 139

A.1 公式 139
A.2 Gaussians 139

Part I

常微分方程

Chapter 1

初等积分法

1.1 一阶线性方程

定理 1.1.1. 设 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

其中 $\beta(t)$ 非负，那么

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.2}$$

证明. 首先想到的是考虑等式的情形，

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.3}$$

希望能在此时推出

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.4}$$

对 (1.3) 两侧求导，移项，得到一个非齐次线性微分方程

$$\psi'(t) - \beta(t)\psi(t) = \alpha'(t) \tag{1.5}$$

选取它的一个积分因子

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s} \tag{1.6}$$

乘到 (1.5) 的两边，得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t)\right)' = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.7}$$

将 (1.7) 两侧从 0 到 t 进行积分，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t) - \psi(0) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s && (1.8)\\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) && (1.9)\\
&= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} && (1.10)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

在 (1.3) 中令 $t=0$，得 $\psi(0)=\alpha(0)$，所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\psi(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.12}$$

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.13}$$

等式的情形得证.

对于不等式的情形，我们希望能照搬上面的证明，但令人遗憾的是，我们无法从积分的不等式直接得到微分的不等式.

但幸运的是，如果记 (1.1) 式右侧的部分为 $\varphi(t)$，即

$$\varphi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.14}$$

那么我们有

$$\varphi'(t) = \alpha'(t) + \beta(t)\psi(t) \tag{1.15}$$

$$\leqslant \alpha'(t) + \beta(t)\varphi(t) \tag{1.16}$$

能这样放缩是因为我们预先假定了 $\beta(t) \geqslant 0$.

这样我们就得到了想要的微分的不等式

$$\varphi'(t) - \beta(t)\varphi(t) \leqslant \alpha'(t) \tag{1.17}$$

接下来照搬上面的证明

将 (1.6) 乘到 (1.17) 的两边，得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t)\right)' \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.18}$$

将 (1.18) 两侧从 0 到 t 进行积分，得

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t) - \varphi(0) \leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s \tag{1.19}$$

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) \tag{1.20}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} \tag{1.21}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.22}$$

在 (1.14) 中令 $t=0$，得 $\varphi(0)=\alpha(0)$，所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\varphi(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.23}$$

$$\varphi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.24}$$

而我们又有

$$\psi(t) \leqslant \varphi(t) \tag{1.25}$$

故得证！ □

Chapter 2

存在唯一性定理

2.1 Picard 存在唯一性定理

$$(E): \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

$$\text{矩形区域}R: |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$$

$$I = [x_0 - h, x_0 + h]$$

$$h = min\{a, \frac{b}{M}\}, M > \max_{(x,y)\in R^2} |f(x, y)|$$

定理 2.1.1. *若 f 在 R 上连续并且关于 y 满足 Lipschitz 条件，则 (E) 在 I 上存在唯一解.*

证明.*Step1* 转化为积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

一方面，若 $y = y(x)$ 是 (E) 的解，则有

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

两边同时关于 x 从 x_0 到 x 积分，可得

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy(x)}{dx} dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

另一方面，若 $y = y(x)$ 是积分方程在 $(x_0 - h, x_0 + h)$ 上的解，则 $y(x)$ 可导，于是

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

Step2 构造 *Picard* 序列 $\{y_n(x)\}$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx$$

$$y_0(x) = y_0$$

要说明 $\forall x \in [x_0-h, x_0+h], \forall n \in N_0, (x, y_n(x))$ 在矩形 R 里面，才能说明序列的定义是好的

Claim: $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$

n=1 时，$|y_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx| \leqslant M|x - x_0| < Mh \leqslant b.$

设 $n = k$ 时断言成立，则当 $n = k+1$ 时，归纳法用在了哪里呢？需注意，只有前一个 $y_k(x)$ 是定义好的，我们才有下一个 y_{k+1} 可言；这里的归纳法并不是说下一个的证明利用到了前一个的成立，而是下一个的存在依赖于前一个的成立.

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))dx| \leqslant |\int_{x_0}^{x} Mdx| = M|x - x_0| < b$$

.

Step3 Picard 序列的收敛性

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) - y_{k-1}(x) + y_0$$

要证 $\{y_n(x)\}$ 收敛，只要证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) - y_{k-1}(x)$ 绝对收敛感觉这里的各种收敛乱乱的 ⋯ 先不管了吧... 淑芬学完了再说

要证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ 在 I 上一致收敛

$$n = 0, |y_1(x) - y_0(x)| \leqslant M|x - x_0|$$

$$\begin{aligned}
n = 1, |y_2(x) - y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_0(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1(x) - y_0(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML|x - x_0|dx\right| \\
&\leqslant ML\frac{|x - x_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 2, |y_3(x) - y_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_2(x) - y_1(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^2\frac{|x - x_0|^2}{2}dx\right| \\
&\leqslant ML^2\frac{|x - x_0|^3}{3!}
\end{aligned}$$

Claim:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant ML^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

用归纳法，假设 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
|y_{k+1}(x)-y_k(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_k(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_{k-1}(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_k(x))-f(x,y_{k-1}(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(x)-y_{k-1}(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^n\frac{|x-x_0|^n}{n!}dx\right| \\
&\leqslant ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

因此，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqslant \frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!} \leqslant \frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Lh)^n}{n!} < +\infty$$

因此，$\exists\phi(x) s.t. y_n(x)\to\phi(x)$ 在 I 上一致收敛. 由于 $y_n(x)$ 在 I 上是连续的，故 $\phi(x)$ 在 I 上也连续.

再由

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

关于 n 取极限得

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

即 $y=\phi(x)$ 是 (E) 在 I 上的解.

Step4 唯一性

令 $y=u(x)$ 和 $y=v(x)$ 是 (E) 的两个不同的解，它们共同的存在区间是 (x_0-d, x_0+d)

令 $w(x)=u(x)-v(x)$，则

$$
\begin{aligned}
|u(x)-v(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,u(x))-f(x,v(x))|dx\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\
&\leqslant Lk|x-x_0|
\end{aligned}
$$

将第三行得到的不等式带入到第二行中，得到

$$
\begin{aligned}
|u(x)-v(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\
&= \int_{x_0}^{x} L^2k|x-x_0|dx \\
&\leqslant \frac{k(L|x-x_0|)^2}{2}
\end{aligned}
$$

重复上述过程可得，

$$|u(x)-v(x)| \leqslant \frac{K(L|x-x_0|)}{n!} \leqslant \frac{k(Ld)^n}{n!} \to 0, \text{当} n\to\infty$$

由 *Gronwell* 不等式，$u(x)-v(x)\equiv 0 \quad on[x_0-d, x_0+d]$

注记. 出现单个 f, 以 M 为界；出现两个 f 作差，利用 *Lipschitz* 条件得到界

注记. 为什么要转化为积分方程？我们要求微分方程的解必须连续且可导，而对于积分方程我们只需要要求解连续，连续且满足积分方程一定可微，这是一个很大的好处。

对解的正则性的要求降低了

积分号与极限可以换序... 开始触及到知识盲区了...

积分满足一些很显然的很好的估计，比如

$$|\int f(x,y)dx| \leqslant \int |f(x,y)|dx$$

只是说在常微分方程及阶段这个优势不是很明显，在偏微分方程阶段，把微分方程化为积分方程是非常重要的手段

涉及到估计往往需要积分方程

注记. 现在我只知道 f 在矩形上有定义，现在我假设 y 满足积分方程，$(x,y(x))$ 是否落到矩形中？$|y(x)-y_0| = || \leqslant |\int_{x_0}^{x} Mdx| \leqslant M|x-x_0| < M(h-\epsilon) < b-\widetilde{\epsilon}$

注记. 第一步，构造逼近解；第二步，说明极限存在；第三步，说明极限就是我们要找的

例 2.1.1 (Ricatti 方程)**.**

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(x_0) = y_0$$

先判断关于 y 是否 *Lipschitz*, 事实上有一个更强的条件，即 f 关于 y 是否有连续的偏导数，若有，关于 y 用中值定理，得到 f 关于 y 确实 *Lipschitz*

由 *Picard* 定理，存在唯一的积分曲线经过 (x_0, y_0)

定理 2.1.2 (存在性 (Peano 存在定理))**.** *设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 内连续，则初值问题 (E) 在区间 $|x-x_0| < h$ 上至少存在一个解 $y = y(x)$.*

定义 2.1.1. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且满足不等式 $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant F(|y_1 - y_2|)$，其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数，而且积分 $\int_0^{r_1} \frac{r}{F(r)} = +\infty$，其中 $r_1 > 0$ 是常数，则称 f 在 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件；特别地，当取 $F(r) = Lr$ 时，得到 *Lipschitz* 条件.

定理 2.1.3. *设 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件，则微分方程 (3.9) 在 G 内经过每一点的解是唯一的.*

证明. 用反证法，假设在 G 内存在一个点 (x_0, y_0)，使得方程 (3.9) 有两个解 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 都经过这个点，存在一个 $x_1 \neq x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$，$y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x} = sup\{x_0 \leqslant x < x_1 : y_1(x) = y_2(x)\}$$

. 则

$$y_1(x) > y_2(x), \forall \bar{x} < x \leqslant x_1$$

$$\frac{d(y_1(x) - y_2(x))}{dx} = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leqslant F(y_1 - y_2), \forall \bar{x} < x < x_1$$

令 $r(x) = y_1(x - y_2(x))$，则 $\frac{dr}{dx} \leqslant F(r), \forall \bar{x} < x < x_1$

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leqslant \frac{\bar{x}}{x_1} dx = x_1 - \bar{x} < +\infty$$

由 Osgood 条件，$\frac{0}{r_1}\frac{dr}{F(r)}=+\infty$，矛盾. □

2.2 解的延伸

考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

定理 2.2.1. 设 P_0 为区域 G 内任意一点，并设 Γ 是微分方程（*3.18*）的经过 P_0 点的任意一条积分曲线，积分曲线 Γ 将在区域 G 内延伸到边界. 对于任意的含在区域 G 中的有界闭区域 G_1 包含 P_0，那么 Γ 可以延伸到 G_1 之外.

证明. 设经过 P_0 的方程的解 Γ 为 $y=\phi(x)$. 设 J 是它的极大存在区间，只考虑 Γ 在 P_0 右侧的延伸情况. 令 $J^+=J\cap[x_0,+\infty)$ 是 Γ 在 P_0 右侧的极大存在区间.

- $J^+=[x_0,+\infty)$，则 Γ 是延伸到边界的.
- $J^+=[x_0,x_1],x_1<+\infty$，以 $(x_1,\phi(x_1))$ 为中心，作矩形 $|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$，由 Peano 存在定理，存在 $h>0$ 使得（3.18）在 (x_1-h,x_1+h) 上存在一个解 $y=\phi_1(x)$ 令 $y_1(x)$，则 y_x 是（3.18）在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1+h$ 上的解

  事实上，当 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$，$\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi(x))dx$

  特别地，$\phi(x_1)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi(x))dx$

  当 $x_1\leqslant x\leqslant x_1+h$，$\phi_1(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi_1(x))dx$

  $$y_1(x)=\phi(x_1)+\int_{x_1}^{x}f(x,y_1(x)dx)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(x,y_1(x))dx$$

  这与 J^+ 是 Γ 的右行极大存在区间矛盾！
- $J^+=[x_0,x_1),x_1<+\infty$ 用反证法，假设存在有界闭集 $G_1\subset G,p\in G_1,\Gamma\subset G_1$. claim: 当 $x\to x_1$ 时，$\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)$ 存在

  $$\forall x_n\to x_1,|\varphi(x_n)-\varphi(x_m)|=|\int_{x_m}^{x_n}\frac{d\varphi}{dx}dx|=|\int_{x_m}^{x_n}f(x,\varphi(x))dx|\leqslant\max_{(x,y)\in G}|f(x,y)|\leqslant M_1|x_n-x_m|$$

  故 $\{\varphi(x_n)\}$ 是 Cauchy 列

  令 $\bar{y}=\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)$ 令，则 $\tilde{y}(x)$ 是（3.18）在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上的解

  事实上，$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\varphi(x))dx,\forall x_0\leqslant x\leqslant x_1$

  当 $x\to x_0$ 时，$\bar{y}=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\varphi(x)dx)\Leftrightarrow\tilde{y}(x_1)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\tilde{y}(x))dx$

□

例 2.2.1. 试证微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

的任一解的存在区间都是有界的.

证明. 令 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 R^2 上连续，且在 R^2 上关于 y 是局部 Lipschitz. 由 Picard 存在唯一性定理，过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ，要证 Γ 的极大存在区间是有界的.

否则，设 Γ 的极大存在区间 J 是无界的. 不妨设 $(c,+\infty)\subset J$. 事实上，如果 $y=y(x)$ 是原方程的解，且 $(-\infty,c)\subset J$ 令 $\hat{y}(x)=-y(-x)$，则

$$\frac{d\hat{y}}{dx}=\frac{dy}{dx}(-x)=(-x)^2+(y(-x))^2=x^2+(\hat{y}(x))^2$$

则 $\hat{y}(x)$ 也是原方程的解.

设 $x_1>0$，$(x_1,+\infty)\subset J$，则

$$\frac{dy}{dx}>x_1^2+y^2,\forall x\in(x_1,+\infty)$$

故

$$\frac{1}{x_1^2+y^2}\frac{dy}{dx}\leqslant 1$$

$$\frac{d\frac{y}{x_1}}{x_1(1+\frac{y^2}{x_1^2})}=\frac{1}{x_1}darctan\frac{y}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_1}\frac{darctan\frac{y}{x_1}}{dx}\leqslant 1$$

两边同时从 x_1 到 x 积分可得，

$$\frac{\pi}{x_1}\leqslant\frac{1}{x_1}(arctan\frac{y(x)}{x_1}-arctan\frac{y(x_1)}{x_1})\leqslant x-x_1,\forall x>x_1$$

令 $x\to+\infty$，则得到矛盾！ □

例 2.2.2. 在平面上任取一点 $P_0=(x_0,y_0)$，试证初值问题

$$\frac{dy}{dx}=(x-y)e^{xy^2},y(x_0)=y_0$$

的右行解都在区间 $x_0\leqslant x<\infty$ 存在.

证明. $f(x,y)=(x-y)e^{xy^2}$ 在 R^2 上连续，局部 Lip，由 Picard 定理，过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的右行部分的存在区间是 $[x_0,+\infty)$

若 P_0 在直线 $y=x$ 的上方，则过 P_0 的积分曲线会下降，穿过 $y=x$ 到达它的下方. 由延伸定理，Γ 会延伸到 $G=\{(x,y)|x_0\leqslant x<+\infty\}$ 的边界. 由于在 $L:y=x$ 下方与它接近的点，斜率远小于 1，故 Γ 无法穿过 L 到达它的上方. 故 Γ 一直位于 L 的下方. 因此 Γ 的右行存在区间为 $[x_0,+\infty)$. □

定理 2.2.2. 设微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $S:\alpha<x<\beta,-\infty<y<+\infty$ 内连续，且满足不等式 $f(x,y)\leqslant A(x)|y|+B(x)$，其中 $A(x)\geqslant 0,B(x)\geqslant 0$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续，则方程的每一个解都以区间 $\alpha<x<\beta$ 为最大存在区间.

证明. 设 $P_0\in S$ 是任意一点. 由于 $f(x,y)$ 在 S 上是连续的，由 Peano 定理，一定存在过 P_0 的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的最大存在区间是 (α,β) 只考虑右行解，要证右行解的最大存在区间是 (x_0,β).

否则，存在 $x_0<\beta_0<\beta$，使得右行解的最大存在区间是 $[x_0,\beta_0)$

任取 Γ 上一点 (x_1,y_1)，在矩形 $R:|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$ 上，$f(x,y)$ 是连续的.

由 Peano 定理，在 (x_1-h,x_1+h) 上存在解，$h=\min\{a,\dfrac{b}{M}\}$
设在 R 上，$A(x),B(x)$ 的最大值是 A_0,B_0，则 $|f(x,y)|\leqslant A_0(|y|+b)+B_0$
取 $M=A_0(|y_1|+b)+B_0+1$，则

$$\frac{b}{M}=\frac{b}{A_0(|y_1|+b)+B_0+1}\to\frac{1}{A_0}$$

当 b 充分大时，$\dfrac{b}{M}>\dfrac{1}{2A_0}$
选取 $a=\dfrac{1}{4A_0}$，则 $h=\dfrac{1}{4A_0}$
取 x_1 充分接近 β_0，则 Γ 可延伸到 $x_1+\dfrac{1}{4A_0}>\beta_0$，这与 $[x_0,\beta_0)$ 是右行最大存在区间矛盾！ □

2.3 第一次习题课

例 2.3.1.

$$\frac{dy}{dx}\leqslant\frac{f(x)}{g(y)},g(y)>0$$

$$g(y)dy\leqslant f(x)dx$$

$$\int_0^y g(t)dt-\int_0^x f(t)dt\leqslant C$$

$$\psi(x):=\int_0^{y(x)}g(t)dt-\int_0^x f(t)dt$$

$$\dot{\psi}(x)=$$

例 2.3.2.

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2\geqslant y^2$$

$$y(0)=1$$

$$\frac{dy}{y^2}\geqslant dx$$

$$\psi(x)=\frac{1}{y}+x\leqslant\psi(0)=1$$

$$\dot{\psi}(x)=-\frac{\dot{y}}{y^2}+1=-\frac{x^2+y^2}{y^2}+1\leqslant 0$$

注记. 若要证 $f=g$，可证 f 和 g 满足相同的方程并且有相同的初值条件

例 2.3.3.

$$\frac{dy}{dx}=f(y)in(x,y)\in R\times[a,a+\epsilon)]$$

其中 $f(a)=0$，$f(y)>0in(a,a+\epsilon)$ 当 $|\displaystyle\int_a^{a+\epsilon}\frac{1}{f(y)}dy<\infty|$ 时，有两条过 (x_0,a) 的积分曲线；当 $|\displaystyle\int_a^{a+\epsilon}\frac{1}{f(y)}dy|=\infty$ 时，只有一条

证明. 内容... □

2.4 比较定理

定理 2.4.1 (第一比较定理). 假设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续，并且满足不等式 $f<F,\forall(x,y)\in G$，又设函数 $y=\phi(x)$ 与 $y=\Phi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上分别是初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y),y(x_0)=y_0$$

的解，其中 $(x_0,y_0)\in G$，则我们有 $\phi(x)<\Phi(x), when \quad x_0<x<b; \phi(x)>\Phi(x), when \quad a<x<x_0$

证明. 只证明右行部分.

令 $\psi(x)=\Phi(x)-\phi(x)$，则

$$\frac{d\psi}{dx}=F(x,\Phi(x))-f(x,\phi(x)),\psi(x_0)=0$$

由于 $F(x_0,\Phi(x_0))>f(x_0,\phi(x_0))$，故 $\dfrac{dy}{dx}(x_0)>0$，所以存在 $\sigma>0$，使得 $\psi(x)>0,\forall x\in(x_0,x_0+\sigma)$

要证的是 $\psi(x)>0,\forall x_0<x<b$ 否则，存在 $x_0+\sigma<x_1<b$，使得 $\psi(x_1)=0$

令 $\beta=min\{x_0<x<b|\psi(x)=0\}$，则 $\psi(\beta)=0$，且 $\psi'(\beta)\leqslant 0$

但是，$\dfrac{d\psi}{dx}(\beta)=F(x_1,\Phi(\beta))-f(x,\phi(\beta))>0$，矛盾！ □

现在考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$ 上连续. 令 $M>\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|,h=mina,\dfrac{b}{M}$，在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上至少存在一个解如果在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上初值问题 E 有两个解 $y=Z(x),y=W(x)$ 使得 E 的任何的解 $y=y(x)$ 都满足 $W(x)\leqslant y(x)\leqslant Z(x),x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$，则称 $W(x),Z(x)$ 分别是初值问题的最小解和最大解

定理 2.4.2. 存在 $0<\sigma<h$，使得在区间 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上初值问题存在最大解和最小解.

定理 2.4.3 (Ascoli-Azela). 设在区间 I 上给定一个函数列 $\{f_n(x)\}_1^\infty$，称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致有界是指 $\exists K>0$，使得 $|f_n(x)|\leqslant K,\forall x\in J,\forall n\geqslant 1$. 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续，如果 $\forall\epsilon>0,\exists\delta$, 使得 $\forall|x_1-x_2|<\delta,|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\epsilon,\forall n=1,2,\cdots$

若 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上一致有界，并且等度连续，则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证明. 考虑初值问题

$$(E_m):\frac{dy}{dx}=f(x,y)+\epsilon_m,y(x_0)=y_0$$

$$\epsilon_m>0,M_m=M+\epsilon_m,h_m=mina,\frac{b}{M_m}\leqslant h$$

若 ϵ_m 单调递减趋于 0，h_m 趋于 h.

则在 (x_0-h_m,x_0+h_m) 上存在 (E_m) 的解 $y=\varphi_m(x)$

由于 $\epsilon\to 0$, 故 $h_m\to h$，因此 $\exists\sigma>0$，当 m 充分大时，$\varphi(x)$ 在 $(x_0-\sigma,x_0+\sigma)$ 上都存在，并且

$$\varphi_m(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f_m(x,\varphi_m(x))dx,f_m(x,y)=f(x,y)+\epsilon_m$$

由第一比较定理，对于 (E) 的任一解 $y=\phi(x)$，有

$$\varphi_m(x)<\phi(x), x_0-\sigma<x<x_0$$

$$\varphi_m(x)>\phi(x), x_0<x<x_0+\sigma$$

$$||\leqslant||+\int_{min}^{max}dx\leqslant,\forall x\in[],\forall m$$

$$||=||\leqslant(M+1)||,\forall\epsilon>0,\exists\delta=\frac{\epsilon}{2(M+1)},\forall||<\delta,||<\epsilon$$

由 $Arzela-Adcoli$，存在子列（仍记为 $\varphi_n(x)$）在 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上一致收敛到 $y=\Phi(x)$

令 $m\to\infty$，有

$$\Phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f_m(x,\Phi(x))dx,\forall x\in[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$$

且 $\Phi(x)$ 在 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上连续，因此，$\Phi(x)$ 是 (E) 在 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上的解.

由第一比较定理，(E) 的任意的解 $y=y(x)$，都有

$$y(x)<\varphi_m(x), x_0<x\leqslant x_0+\sigma$$

则有

$$y(x)\leqslant\Phi(x), x_0<x\leqslant x_0+\sigma$$

□

定理 2.4.4. 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足 $f(x,y)\leqslant F(x,y,\forall(x,y)inG)$，又设函数 $\phi(x),\Phi(x)$ 分别是

$$(E_1):\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

$$(E_2):\frac{dy}{dx}=F(x,y),y(x_0)=y_0$$

的解 $((x_0,y_0)\in G)$ 并且 $y=\varphi(x)$ 是 (E_1) 的右行最小解和左行最大解，则由如下关系：

$$\varphi(x)\leqslant\Phi(x), x_0\leqslant x<b$$

$$\varphi(x)\geqslant\Phi(x), a<x\leqslant x_0$$

Chapter 3

奇解

3.1 一阶隐式微分方程

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

3.1.1 微分法

若从 (4.1) 可解出

$$y=f(x,p),p=\frac{dy}{dx}$$

对 x 求导，

$$p=f_x^{'}+f_p^{'}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-f_x^{'}}{f_p^{'}}$$

$$f_p^{'}dp+(f_x^{'}-p)dx=0$$

若 (4.3) 可解得通解 $p=v(x,C)$，则原方程的解为 $y=f(x,v(x,C))$，C 为任意常数.

若 (4.3) 可解得一个特解 $p=w(x)$，则原方程的特解为 $y=f(x,w(x))$.

有时可解 (4.3) 得到 $x=v(p,C)$，则原方程的通解是 $y=f(v(p,C),p),x=v(p,C)$.

例 3.1.1. 求解克莱罗方程

$$y=xp+f(p)$$

其中 $f^{''}(p)\neq 0$

证明. 对 x 求导，可得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f^{'}(p)\frac{dp}{dx}\rightarrow(x+f^{'}(p))\frac{dp}{dx}=0$$

若 $x+f^{'}(p)=0$，即 $x=-f^{'}(p),y=-pf^{'}(p)+f(p)$，是特解

若 $\frac{dp}{dx}=0$，则得到通解 $p=C$，故原方程通解 $y=Cx+f(C)$

由于 $f^{''}(p)\neq 0$，p 可写成 □

例 3.1.2. 求解微分方程

$$x(y^{'})^2 - 2yy^{'} + 9x = 0$$

证明. 当 p=0 时，不可能是方程的解当 $p \neq 0$ 时，

$$y = \frac{xp^2 + 9x}{2p} = \frac{xp}{2} + \frac{9x}{2p}$$

两边对 x 求导，可得

$$p = \frac{p}{2} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{9}{2p} - \frac{9x}{2p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$-(\frac{p}{2} - \frac{9}{2p}) + (\frac{x}{2} - \frac{9x}{2p^2})\frac{dp}{dx} = 0$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2})(x\frac{dp}{dx} - p) = 0$$

$\Rightarrow p = 3$，原方程特解 $y = 3x$

若 $x\dfrac{dp}{dx} - p = 0$，则 $p = Cx$ 故原方程通解是

$$y = \frac{Cx^2}{2} + \frac{9}{2C}$$

□

3.1.2 参数法

设隐式方程不显含自变量，即 $F(y,p) = 0$

设 $y = g(t), p = h(t)$ 是 (4.12) 的一个参数表示，则

$$dx = \frac{1}{p}dy = \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt$$

故

$$x = \int \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt + C$$

于是，原方程的解为 $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt + C \\ y = g(t) \end{cases}$

例 3.1.3. 求解微分方程

$$y^2 + (\frac{dy}{dx})^2 = 1$$

若 $p = 0$，则 $y = 1$，是方程的特解

例 3.1.4. 考虑隐式微分方程 $F(x,y,p) = 0$ 设 $x = f(u,v), y = g(u,v), p = h(u,v)$ 上述方程的参数化表示由于 $dy = pdx$ 故

$$g^{'}_u du + g^{'}_v dv = h(f^{'}_u du + f^{'}_v dv)$$

因此

$$(g^{'}_u - hf^{'}_u)du + (g^{'}_v - hf^{'}_v)dv = 0$$

若从上式可以解出 $u=Q(v,C)$，那么原方程的通解为 $\begin{cases} x=f(Q(v,C),v) \\ y=g(Q(v,C),v) \end{cases}$ 若从上式可以解出特解 $u=S(v)$，则原方程的特解为 $\begin{cases} x=f(S(v),v) \\ y=g(S(v),v) \end{cases}$

例 3.1.5. 解微分方程

$$(\frac{dy}{dx})^2+y-x=0$$

Chapter 4

高阶微分方程

考虑 n 阶微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \cdots, y^{n-1})$$

令

$$y_1 = y, y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \cdots, y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx}$$

原方程可以化为

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, \cdots, y_n)$$

一般地，考虑 $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$ $f_1, \cdots, f_n$ 是关于变量 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在区域 D 上的连续函数. 上式可以写成

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果 $f_k(x, y_1, \cdots, y_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i + e_k(x)$，则 $f(x, y) = A(x)y + e(x)$

此时，

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + e(x)$$

若向量函数 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 $|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$ 连续，且 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 关于 $\vec{y}$ 满足 Lipschitz 条件：$\exists L > 0$，使得

$$\left|\vec{f}(x, \vec{y_1}) - \vec{f}(x, \vec{y_2})\right| \leqslant L\left|\vec{y_1} - \vec{y_2}\right|$$

4.1 解对初值和参数的连续依赖性

考虑 $\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \lambda) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$ 要研究它的解 $y = \varphi(x; x_0, \vec{y}_0, \lambda)$ 对初值 $(x_0, \vec{y}_0)$ 及参数 λ 的连续依赖性令 $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{\vec{y}} = \vec{y} - \vec{y}_0$

因此，只需讨论方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

关于参数 λ 的连续依赖性.

证明. 1. 等价于

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda) dx$$

2. 定义

$$\varphi(x)$$

3. k=0 时，结论成立

假设 k 时结论成立，当 k+1 时，$\forall (x_0, \lambda_0) \in D$，

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x, \lambda) - \varphi(x_0, \lambda_0) &= \int_0^x f(x, \varphi_k(x, \lambda), \lambda) dx - \int_0^{x_0} f(x, \varphi_k(x, \lambda_0), \lambda) dx \\ &= \end{aligned}$$

□

定理 4.1.1. *设 n 维向量函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 空间内的某个开区域 G 上连续，而且对 y 满足局部 Lipschitz 条件. 假设 $y = \xi(x)$ 是微分方程*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的一个解，令它的存在区间为 J. 现在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$，存在常数 $\delta > 0$，使得对于任何初值 $(x_0, y_0), a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$，柯西问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 也至少在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 存在，并且在闭区域 $D_\delta : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$ 上是连续的.

证明. 设 f 在 G 上是 Lipschitz 的，令

$$\eta(x) = y(x) - \xi(x)$$

则

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\xi}{dx} = f(x, \eta + \xi) - f(x, \xi)$$

$$\eta(x_0) = y(x_0) - \xi(x_0) = y_0 - \xi(x_0)$$

把研究 y 转化为研究 η

由于 f 是 Lip 的，

$$|g(x, y)| \leqslant L|\eta|$$

$$|f(x, \eta_1) - g(x, \eta_2)| = |f(x, \eta_1 + \xi) - f(x, \eta_2 + \xi)| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|$$

构造 Picard 序列 $\begin{cases} \ldots \end{cases}$

Claim

$$||\leqslant \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}|y_0-\xi(x_0)|$$

$$|\varphi_k(x)|\leqslant \sigma$$

用数学归纳法证明 Claim1

当 k=0 时，

$$\varphi_1(x)-\varphi_0(x)=|\int_{x_0}^{x}|\leqslant L|y_0-\xi(x_0)|dx=L|y_0-xi(x_0)||x-x_0|$$

结论成立

设 k 时结论成立，则 k+1 时，

$$|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|=|\int_{x_0}^{x}(g(x,\varphi_k(x))-g(x,\varphi_{k-1}(x)))dx$$

取 $\sigma>0$，使得 $D=\{(x,y)||y-\xi(x)|\leqslant\sigma\}\subset G$ 由于 f 在 G 上局部 Lipschitz，则 f 在 D 上关于 y 是 Lipschitz 的. 取 $\delta>0$ 使得 $\delta e^{L|b-a|}=\dfrac{\sigma}{2}$ □

4.2 解对初值和参数的连续可微性

定理 4.2.1. 设 $f(x,y,\lambda)$ 在区域 $G:|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|\lambda-\lambda_0|\leqslant c$ 上连续，而且对 y,λ 又连续的偏导数，则 (5.5.2) 的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 在区域 D 上是连续可微的.

Chapter 5

线性微分方程组

考虑 n 阶线性微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), a_{ij}(x), f_i(x) \in C(a,b), i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n$$

可写成矩阵乘法的形式：

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x) := g(x, \vec{y})$$

若 $f(x)$ 恒为零，则称之为齐次的；若 $f(x)$ 不恒为零，则称之为非齐次的.
要想说明 (a,b) 上的唯一性，只需说明 (a,b) 中的任意的闭区间的唯一性.
$\forall I \subset (a,b)$ 是闭区间，

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

由 Picard 存在唯一性定理，(6.1) 在 (a,b) 上有唯一解.

5.1 § 齐次线性方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} \tag{5.1}$$

在式5.1中

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}$$

引理 5.1.1. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是 (6.2) 的两个解，则它们的线性组合 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也仍然是 (6.2) 的解，C_1, C_2 是任意常数.

由该引理得，令 (6.2) 的所有的解构成集合 S，则 S 是一个线性空间.

引理 5.1.2. 线性空间 S 是 n 维线性空间.

证明. 固定 $x_0 \in (a,b)$，令，则有唯一的 (6.2) 的解在 (a,b) 上存在，记为 $y = y(x)$. 定义映射

$$H : \mathbb{R}^n \to S$$

$$y_0 \mapsto y(x)$$

1. H 是线性的由引理 4.1.1，$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 仍是 (6.2) 的解，且其初值为，由解的唯一性，得证.

2. H 是单射

3. H 是满射

因此 $H : \mathbb{R}^n \to S$ 是一个同构，故 S 是 n 维的. □

定理 5.1.1. 设 (6.2) 在区间 (a, b) 上有 n 个线性无关的解 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$，则它的通解为 $y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), C_1, \cdots, C_n$ 为任意常数.

称 (6.2) 的 n 个线性无关的解为一个基本解组.

如何判断 (6.2) 的 n 个解是线性无关的？令 n 个解是 $y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}$ 称 $W(x)$ 为解向量的朗斯基 $(Wronski)$ 行列式.

引理 5.1.3. 内容...

定理 5.1.2. (6.2) 的解组 (6.8) 是线性无关的充要条件为 $W(x) \neq 0, \forall a < x < b$

定义 5.1.1. 对应于解组 (6.8)，令矩阵 $Y(x)$

例 5.1.1. 内容...

证明.

$$\frac{d}{dx}$$

由于

故

$$\Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} = \frac{f(s)}{W(s)} \begin{pmatrix} -\varphi_2(s) \\ \varphi_1(s) \end{pmatrix}$$

□

5.2 高阶线性微分方程式

5.2.1 常系数高阶线性微分方程

例 5.2.1. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{5.2}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数，$x > 0$. 试利用适当的变换把它化成常系数的非齐次线性微分方程.

解. 设 $x = \mathrm{e}^t$，即 $t = \ln x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right] \\
&= -2\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{x^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

记

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} =: \mathrm{D}$$

不难由归纳法证明

$$y^{(k)} = \frac{1}{x^k}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y$$

□

Chapter 6

定性理论与分支理论初步

6.1 动力系统、相空间与轨线

设 t 时刻质点的位置 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，运动速度 $v=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$，则质点的运动方程为

$$\frac{dx}{dt}=v(x) \tag{6.1}$$

这个方程不显含自变量，称这样的方程是自治的. 若 $v(x)$ 满足 Picard 定理的条件，则以 $x(t_0)=x_0$ 有唯一解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$.

注记. 为什么要将之视为 R^n 中的一条曲线而不是 R^{n+1} 中的一条曲线

把 x 取值的的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为相空间，把 (t,x) 所在的空间 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 称为增广相空间

(8.3) 给出了与线速场 $u(x)$ 相吻合的一条“光滑”曲线，称之为轨线。用箭头在轨线标明对应于时间增加质点的运动方向.

目标：从向量场 $v(x)=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$ 出发获取轨线的集合特征，或者更进一步，弄清轨线族的拓扑结构图

拓扑结构中有两个东西特别重要，

1. 平衡点：若 $v(x_0)=0$，则称 x_0 为方程6.1的一个平衡点. 对于平衡点我们需要关注它是否是稳定的、渐近稳定的，如果不稳定，我们想知道它为什么不稳定

2. 闭轨：若存在方程6.1的非定常的周期运动 $\varphi(t+T;t_0,x_0)=\varphi(t;t_0,x_0),\forall t$，我们想知道相图中是否存在闭轨，如果存在，有多少条

例 6.1.1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1)\end{cases}$

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 则???

$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(r^2-1),r(0)=r_0\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1,\theta(0)=\theta_0\end{cases}$

那么我们可以找到平衡点

1. $r_0=0$

2. $r_0 \neq 0$

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{r_0^2})e^{2t}}}$$

注记. 这个极坐标的变换不保持平衡点???

本例中我们是通过把解解出来之后研究它的相图，本章的目的是不解它就研究它的相图

称方程6.1为一个动力系统，其基本性质如下：

1. 积分曲线的平移不变性设 $\varphi(t)$ 是方程6.1的一个积分曲线，则 $\varphi(t+C)$ 仍然是积分曲线. 注意，不重合.
   $\dfrac{d\varphi(t+C)}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}(t+C) = v(\varphi(t+C))$
   要去思考一下对于非自治方程为什么就不成立了

2. 经过相空间每一点的轨线是唯一的.

   性质一和性质二说明，每条轨线都是增广相空间中沿 t 轴可平移重合的一族积分曲线在相空间中的投影，而且只是这族积分曲线的投影.

3. 群的性质，单参数连续变换群! 好耶

6.2 解的稳定性

考虑

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{6.2}$$

其中 $f(t,x)$ 对 $x \in G \subset \mathbb{R}^n, t \in (-\infty,+\infty)$ 连续，且关于 x 满足李氏条件.

定义 6.2.1. *假设(6.2)有一个解 $x=\varphi(t)$ 在 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 有定义.*

称(6.2)的解 $x=\varphi(t)$ 是 Lyapunov 稳定的，如果对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0-\varphi(t_0)| < \delta$, 有 $|x(t;t_0,x_0)-\varphi(t)| < \varepsilon$ 对 $\forall t \geqslant t_0$ 成立.

称(6.2)的解 $x=\varphi(t)$ 是渐进稳定的，如果 $\exists \delta_1, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0-\varphi(t_0)| < \delta_1$, 有 $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t;t_0,x_0)-\varphi(t)| = 0$ 成立.

6.2.1 线性稳定性

令

$$y = \tilde{y} + y_*,$$

代入到

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

则

$$LHS = \frac{d(\tilde{y}+y_*)}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{dt}$$

$$\begin{aligned} RHS = f(\tilde{y}+y_*) &= f(y_*) + f^{'}(y_*)\tilde{y} + \Big[f(\tilde{y}+y_*) - f(y_*) - f^{'}(y_*)\tilde{y}\Big] \\ &= f^{'}(y_*)\tilde{y} + \Big[f(\tilde{y}+y_*) - f^{'}(y_*)\tilde{y}\Big] \end{aligned}$$

$$= A\tilde{y} + N(\tilde{y})$$

其中 $A = f^{'}(y_*)$ 是常数矩阵，而 $N(\tilde{y})$ 满足 $\lim\limits_{\tilde{y}\to 0} \dfrac{|N(\tilde{y})|}{|\tilde{y}|} = 0.$

在(6.2)中，设 $x = 0$ 是一个解，令 $f(t,x) = A(t)x + N(t,x), \lim\limits_{|x|\to 0} \dfrac{|N(t,x)|}{|x|} = 0, N(t,0) = 0$

$A(t)$ 是 n 阶矩阵，在 $t \geqslant t_0$ 上连续

考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{6.3}$$

的稳定性. 称它的稳定与不稳定为原方程6.2的线性稳定与不稳定

定理 6.2.1. 在 (6.3) 中，若 $A(t)$ 是常数矩阵，则

1. 零解是渐近稳定的，当且仅当 A 的全部特征根有负的实部
2. 零解是稳定的，当且仅当 A 的全部特征根实部非正，并且实部为零的特征根对应的 *Jordan* 块是一阶的
3. 零解是不稳定的，当且仅当 A 有实部为正的特征根或 A 有实部为零的特征根且它对应的 *Jordan* 块是高于一阶的

6.2.2 Lyapunov 第二办法 (针对非线性方程)

考虑自治系统

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y}) \tag{6.4}$$

定理 6.2.2 (Lyapunov 稳定性). 令 $\vec{y}_*$ 是方程 (6.4) 的平衡点，令 $L : O \to R$ 是包含 $\vec{y}_*$ 的开集 O 上的连续可微函数，假设

1. $L(\vec{y}_*) = 0$, 且 $L(\vec{y}) > 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$
2. $$\dot{L}(\vec{y}) \ = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L \circ \phi_t(\vec{y}) \leqslant 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$$
   其中 $\phi_t(\vec{y})$ 表示以 $\vec{y}$ 为初值的(6.4)的解.

则 $\vec{y}_*$ 是稳定的，若再假设 $\dot{L}(\vec{y}) < 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$，则 $\vec{y}_*$ 是渐近稳定的.

证明. 1. ε 充分小，使得 $B_\varepsilon(\vec{y}_*) \subset O$

定义 $\alpha = \min\{L(\vec{y}) \big| |\vec{y} - \vec{y}_*| = \varepsilon\}$

$u_\varepsilon = \{y \in B_\varepsilon(y_*) \big| L(y) < \alpha\}$，则 u_ε 是开集，且 $y_* \in u_\epsilon$

由 $\dot{L} \leqslant 0$，若 $y_0 \in u_\epsilon$，则

$$\frac{d}{dt} L(y(t)) \leqslant 0$$

以 y_0 为初值的解一定一直限制在 u_ϵ 中，

现在对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta$ 使得 $B_\delta \subset U_\epsilon$，以 y_0 为初值的解一直在 u_ϵ 中，

$$|y(t) - y_*| < \epsilon, \forall t$$

取 δ 使得 $B_\delta(y_*) \subset U_\epsilon$ 中，则 y_* 是稳定的.

2. 由稳定性，$|y(t)-y_*|<\epsilon, \forall t$，故 $|y(t)| \leqslant< M, \forall t$，故存在收敛子列 $t_n \to \infty$ 使得 $y(t_n) \to z_0$

   现在要证的是，

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)-y_*| = 0$$

   现在先证 z_0 就是 y_*

   由于 $\dot{L}<0, L(y(t))$ 严格递减趋于 $L(z_0)$，（$L(y(t))$ 的极限你是知道存在的，但是你不知道 $y(t)$ 的极限，你只知道 $y(t_n)$ 的极限，但是对于 L 这个极限相同）

   令 $z(s)$ 是以 z_0 为初值的解，则有 3，

$$L(z(s)) < L(z_0), \forall s > 0$$

   这里不能由 $L(z_0)$ 最小出点东西？

   令 $Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 为初值的解，则 $Y_n(s) = y(t_n+s)$

   并且我们还知道 $y(t_n) \to z_0, Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 的解，$z(s)$ 是以 z_0 为初值的解，由解对初值的连续依赖性，当 n 充分大时，$L(Y_n(s)) = L(y(t_n+s)) < L(z_0), \forall s > 0$，这与 $L(y(t)) > L(z_0)$ 矛盾.

   于是 $y(t)$ 只能以 y_* 为唯一的极限点??? $y(t)$ 咋就有极限了.

□

例 6.2.1. 分析方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\varepsilon x + 2y)(z+1) \\ \dfrac{dy}{dt} = (-x+\epsilon y)(z+1) \\ \dfrac{dz}{dt} = -z^3 \end{cases}$ 的平衡点的稳定性

证明. $\begin{cases} (\varepsilon x + 2y) = 0 \\ (-x+\epsilon y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0,0)$ 是平衡点找线性部分

$$(x,y,z) = (0+\tilde{x}, 0+\tilde{x}, 0+\tilde{x})$$

所以直接看线性化方程是什么，$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \epsilon x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x+\epsilon y \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 2 & 0 \\ -1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda E) = -\lambda((\lambda-\epsilon)^2+2)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \epsilon + \sqrt{2}i, \lambda_3 = \epsilon - \sqrt{2}i$$

如果 $\epsilon > 0$，那么这个系统是线性不稳定的，进而使不稳定的. 如果 $\epsilon \leqslant 0$，虽然是线性稳定的，但是不知道非线性怎么样.

构造 *Lypnouv* 函数，

$$L(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$$

我要求一些系数 abc 使得满足应用定理的条件.

$$\dot{L}(x,y,z)=\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}$$

$$2ax((\epsilon x+2y)(z+1))+2by(-x+\epsilon y)(z+1)$$

$$\epsilon(2ax^2+2by^2)(z+1)+(4a-2b)xy(z+1)-2cz^4$$

当 $\epsilon=0$ 时，取 a=1，b=2，c=1

$$\dot{L}=-z^4\leqslant 0$$

$\Rightarrow (0,0,0)$ 是非线性稳定的.

当 $\epsilon<0$ 时，

$$\dot{L}(x,y,z)=\varepsilon(2x^2+4y^2)-2z^4<0$$

故 $(0,0,0)$ 是渐近稳定的. □

6.3 平面上的动力系统，奇点与极限环

考虑平面上的动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y)\end{cases}$$

$X(x,y),Y(x,y)$ 是平面上的连续函数.

为什么要考虑平面上的动力系统，因为对于高维的动力系统，我们可以两两组合考虑多个平面上的动力系统

消去 t，得到 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{Y(x,y)}{X(x,y)}$

先来考虑线性系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

若 A 是非退化的，则称 $(0,0)$ 为初等奇点，否则，称之为高阶奇点. 令 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ 则原方程变为

$$T\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=AT\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

不妨设 A 是 Jordan 标准形. 即 A 为以下三种之一

1. $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\1 & \mu\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

1. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

   $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = \mu y \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x} \Rightarrow y = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

   (a) $\lambda = \mu, y = C|x|$，还要判断一下稳定性

   (b) λ, μ 同号

      i. $|\frac{\mu}{\lambda}| > 1$

Part II

偏微分方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3) \\
&= \mathrm{d}x_1 \boldsymbol{i} + \mathrm{d}x_2 \boldsymbol{j} + \mathrm{d}x_3 \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

又有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \mathrm{d}u_1 \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} + \mathrm{d}u_2 \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} + \mathrm{d}u_3 \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3} \\
&= \mathrm{d}u_1 h_1 \boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}u_2 h_2 \boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}u_3 h_3 \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

我们仅限于讨论 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 构成右手正交基.

$$x_1 = r\cos\theta \tag{6.5}$$

$$x_2 = r\sin\theta \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta) \tag{6.8}$$

$$h_r = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right| = 1 \tag{6.9}$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}\right| = r \tag{6.10}$$

$$e_r = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{6.11}$$

$$e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{6.12}$$

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi \tag{6.14}$$

$$x_2 = r \sin\theta \sin\varphi \tag{6.15}$$

$$x_3 = r \cos\theta \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta) \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0) \tag{6.19}$$

$$h_r = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right| = 1 \tag{6.20}$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}\right| = r \tag{6.21}$$

$$h_\varphi = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\right| = r\sin\theta \tag{6.22}$$

$$e_r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{6.23}$$

$$e_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \tag{6.24}$$

$$e_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \tag{6.25}$$

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

如果我有一个定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的函数 u，那么我既可以将其视为 $u(x_1,x_2,x_3)$，又可以将其视为 $u(r,\theta,\varphi)$

其梯度具有统一的表达形式

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x_1}e_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}e_2+\frac{\partial u}{\partial x_3}e_3=\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}e_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}e_\varphi$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial r}=\nabla_{\mathbb{R}^3}u\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \tag{6.27}$$

好像隐隐抓住一点,想证明比如拉普拉斯算子在球坐标下的表达式的时候绝对绝对不是从(6.27)出发带进去验算的，但是具体计算 u_r 的时候我们确实是按(6.27)这样计算的. 那么问题来了，如果不是用(6.27)直接去验证，那么我们是如何得到拉普拉斯算子在球坐标下的表达式的呢？是不是应该将 u_r 视为一个抽象的没有显示表达的符号？

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \theta}=\nabla_{\mathbb{R}^3}u\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \tag{6.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \varphi}=\nabla_{\mathbb{R}^3}u\cdot\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \tag{6.29}$$

我们知道，每个方向导数都可以表示为梯度与某个向量的点乘，反之，梯度与一个向量的点乘代表着一个方向导数. 因此，上面的式子告诉我们，$\dfrac{\partial u}{\partial r}$ 其实是 u 一个方向导数，只不过在不同的点所取的那个方向也是不同的，而 $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}$ 就代表该点处 r 增长的方向. 选取合适的坐标系，能够凸显出一个量所满足的微分方程的某种对称性.

同时我隐隐有一种感觉，x_1,x_2,x_3 这组坐标的角色似乎是特殊的，不管我们讨论什么坐标，其实都还是在 x_1,x_2,x_3 这组坐标的框架下进行讨论的.

$$e_r=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\Big/\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right| \tag{6.30}$$

$$e_\theta=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}\Big/\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}\right| \tag{6.31}$$

$$e_\varphi=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\Big/\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\right| \tag{6.32}$$

Chapter 7

传输方程

7.1 常系数传输方程

7.1.1 特征线法

最简单的偏微分方程是常系数传输方程

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty),$$

其中 b 是 $\mathbb{R}^n$ 常向量中的常向量.

什么样的函数 u 是方程的解？一个重要的观察是，u 沿某个特定方向的方向导数为零. 固定点 $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$，定义

$$z(s) := u(x_0 + sb, t + s) \quad s \in \mathbb{R}.$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} z(s) = \nabla u(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = 0$$

对任意 s 恒成立. 也就是说，对任意点 (x, t)，我们沿着方向 $(b, 1)$ 看过去，u 都是一个常值函数. 因此如果我们知道每一条与 $(b, 1)$ 平行的线上的 u 在某点处的值，我们就知道了它在 $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 上每点处的值.

7.1.2 初值问题

为了明确起见，让我们考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) & (7.1\text{a}) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}\,. & (7.1\text{b}) \end{cases}$$

其中 $b \in \mathbb{R}^n$ 和 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是已知的，问题是如何计算 u. 像之前那样给定一点 (x, t)，以 $(b, 1)$ 为方向的穿过 (x, t) 的直线可以被参数化为 $(x + sb, t + s), s \in \mathbb{R}$. 当 $s = -t$ 时，这条直线与平面 $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ 相交，交点为 $(x - tb, 0)$. 因为 u 在这条线上为常值并且 $u(x - tb, 0) = g(x - tb)$，我们推出

$$u(x, t) = g(x - tb) \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0.$$

可以看出 $\dfrac{b}{|b|}$ 代表波的传播方向，$|b|$ 表示波的传播速度.

7.2 非线性传输方程

Chapter 8

波动方程

8.1 达朗贝尔公式、波的传播

从本节开始我们将讨论弦振动方程的各类定解问题.

如果所考察的物体长度很长，而所需知道的又只是在较短时间内且离边界较远的一段物体的运动情况，那么边界条件的影响就可以忽略不计，从而可将定解问题归结为如下初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (8.1a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (8.1b) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & (8.1c) \end{cases}$$

由叠加原理，我们可以将它分解为一个自由振动的初值问题和一个强迫振动的初值为零的初值问题的叠加

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = 0 & (8.2a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (8.2b) \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) & (8.2c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = f(x,t) & (8.3a) \\ u(x,0) = 0 & (8.3b) \\ \partial_t u(x,0) = 0 & (8.3c) \end{cases}$$

8.1.1 全直线上的自由振动与达朗贝尔公式

例 8.1.1. 利用线性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y,$$

$$\eta = x + \lambda_2 y$$

将方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

变为下面形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

解.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=1, \frac{\partial \xi}{\partial y}=\lambda_1, \frac{\partial \eta}{\partial x}=1, \frac{\partial \eta}{\partial y}=\lambda_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}=\lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}$$

所以有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

代入得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(A+2\lambda_1 B+\lambda_1^2 C)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}2(A+(\lambda_1+\lambda_2)B+\lambda_1\lambda_2 C)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(A+2\lambda_2 B+\lambda_2^2 C)=0$$

欲变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$$

只需令

$$A+2\lambda_1 B+\lambda_1^2 C=0, A+2\lambda_2 B+\lambda_2^2 C=0$$

□

具体到我们的情况，对于无边界的自由振动，我们可以解得其通解为

$$u(x,t)=F(x-at)+G(x+at) \tag{8.4}$$

其中 F 和 G 是任意两个可微的单变量函数，它们的具体形式可由初始条件(8.1b)和(8.1c)解出，最后得到达朗贝尔公式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{ds} \tag{8.5}$$

注记. 值得一提的是，达朗贝尔公式是能够描述 $t<0$ 时的情况的.

8.1.2 延拓法处理半直线带有某种边值条件的自由振动问题

例 8.1.2.

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0 \quad 0 < x < +\infty, t > 0 & (8.6a)\\
u(x,0) = \varphi(x) & (8.6b)\\
\partial_t u(x,0) = \psi(x) & (8.6c)\\
u(0,t) = 0 & (8.6d)
\end{cases}
$$

解. 其实呢，不管怎么延拓，按理来说，这个方程都应该是有解的. 所以说你的延拓的目的其实是找一个合适的延拓来方便你求解. 拿这道题来说，我们就希望能找到一个延拓使得 $u(0,t) = 0$ 这个条件被自动地满足. 用书上的话来说就是："如何将在 $x \geqslant 0$ 上已给的初始数据延拓为整个直线 $-\infty < x < \infty$ 上的函数，使得用延拓后的函数作初值的柯西问题，其解在 $x = 0$ 处恒为零".

假设我们已经延拓好了，那么我们就能够用达朗贝尔公式写出解，这个解显然依赖于延拓的方式，我们让这个解去满足题目中的边值条件，便能够得到我们应该往延拓上加的限制.

延拓 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，延拓后的函数仍记为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$. 由达朗贝尔公式，以 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 作初值的柯西问题的解为

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

要使 $U(0,t) = 0$ 恒成立，就应当满足

$$\frac{1}{2}\left(\varphi(at) + \varphi(-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \equiv 0$$

为此，只要将 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 作奇延拓即可. □

问题. 话说半直线类型的是否必须带有某种边值条件？不然的话，岂不是任何一种延拓都可以满足了？那样的话，应该会得到不同的解吧.

例 8.1.3. 求解

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad x > 0, t > 0 & (8.7a)\\
u(x,0) = \varphi(x) & (8.7b)\\
u_t(x,0) = 0 & (8.7c)\\
(u_x - ku_t)(0,t) = 0 & (8.7d)
\end{cases}
$$

其中 k 为正常数.

解. 对 $\psi(x)$ 作零延拓，记 $\varphi(x)$ 延拓后的函数为 $\Phi(x)$.

由 D'Alember 公式，

$$
\begin{cases}
U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 & (8.8a)\\
U(x,0) = \Phi(x) & (8.8b)\\
U_t(x,0) = 0 & (8.8c)
\end{cases}
$$

的解为

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\right]$$

我们要构造 Φ，使得

$$(U_x - kU_t)(0,t) = 0$$

即

$$(ka+1)\Phi'(-at) = (ka-1)\Phi'(at), t > 0$$

$$\Phi'(x) = \frac{ka-1}{ka+1}\Phi'(-x), x < 0$$

$$\Phi(x) = \frac{1-ka}{ka+1}\Phi(-x) + C$$

$$\Phi(0) = \frac{1-ka}{ka+1}\Phi(0) + C \Rightarrow C = \frac{2ka}{ka+1}\varphi(0)$$

所以

$$U(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] & x \geqslant at \\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \frac{1-ka}{ka+1}\varphi(at-x) + \frac{2ka}{ka+1}\varphi(0)\right] & 0 \leqslant x < at \end{cases}$$

□

8.1.3 齐次化原理解强迫振动但初值为零的初值问题

考虑强迫振动情形的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (8.9a) \\ u(x,0) = 0 & (8.9b) \\ u_t(x,0) = 0 & (8.9c) \end{cases}$$

由导出弦振动方程的过程可知，自由项 $f(x,t)$ 表示时刻 t 时在位置 x 处单位质量所受的外力，而 u_t 表示速度.

把时段 $[0,t]$（t appears here! 事实上写为 t_0 更好！）分成若干小的时段 $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$，在每个小的时段 Δt_j 中，$f(x,t)$ 可以看作与 t 无关，从而以 $f(x,t_j)$ 来表示. 在时段 Δt_j 中自由项所产生的速度改变量为 $f(x,t_j)\Delta t_j$. 把这个速度改变量看作是在时刻 $t = t_j$ 时的初始速度，它所产生的震动可以由下面的齐次方程带非齐次初始条件的初值问题来描述：

$$\begin{cases} \tilde{W}_{tt} - a^2\tilde{W}_{xx} = 0 \qquad t > t_j & (8.10a) \\ \tilde{W}(x,t_j) = 0 & (8.10b) \\ \tilde{W}_t(x,t_j) = f(x,t_j)\Delta t_j & (8.10c) \end{cases}$$

其解记为 $\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$. 按叠加原理，自由项 $f(x,t)$ 所产生的总效果可以看成事无数个这种顺式作用所产生的效果的叠加. 这样，定解问题的解 $u(x,t)$ 应表示成

$$u(x,t) = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{l} \tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j) \tag{8.11}$$

注记. 上面的内容基本是我照抄书的，但是课本在这里有一处容易让人发生误会的细节处理得不好. 上面我们绝不是得到了整个解 $u(x,t)$ 的全部表达式，甚至也不是 $u(x,t)$ 在某个区间 $[0,T]$ 上的解的表达式，而是应理解为 $u(x,t)$ 在特定的时刻 t 时的波形，这个 t 就是我前面说写成 t_0 更好的那个

t. 原因如下：我之前说过，达朗贝尔公式是能够描述 $t<0$ 时的情况的，按照我们上面的推导，应该是每到一个时间 t_j，都会有一个新的贡献 $\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$ 增添进来，而在 $t<t_j$ 时，$\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$ 是不应该发挥作用的，如若将 (8.11) 理解为对 $[0,t]$ 成立，就不对了. 而因为达朗贝尔公式对于 $t<0$ 是有意义的，所以你硬要把右侧理解为是若干个函数的叠加，然后对 $[0,t]$ 都有定义那也不是不可以，但按这种方式得到的和函数并不是我们想要的解 $u(x,t)$，只有一点处的值吻合罢了. 虽然说书上没把这里写清楚，但是等到下面写出 u 的积分的表达式的时候还是很清晰的——t 不仅出现在了被积函数中，还出现在了积分上限上，这正意味着只有 $t_j<t$ 的 $\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$ 才能被允许发挥作用.

由于(8.10)为线性方程，所以 $\tilde{W}$ 与 Δt_j 成正比，如果记 $W(x,t;\tau)$ 为齐次方程的定解问题

$$\begin{cases} W_{tt}-a^2W_{xx}=0 \quad t>\tau & (8.12a)\\ W(x,\tau)=0 & (8.12b)\\ W_t(x,\tau)=f(x,\tau) & (8.12c)\end{cases}$$

的解，则

$$\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)=\Delta t_j W(x,t;t_j)$$

于是定解问题(8.9)的解可表示为

$$u(x,t)=\lim_{\Delta t_j\to 0}\sum_{j=1}^{l}W(x,t;t_j)\Delta t_j=\int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.13}$$

对每一个 τ，为写出 $W(x,t,\tau)$ 的具体表达式，在初值问题(8.12)中作变换 $t'=t-\tau$. 相应地，(8.12)化为

$$\begin{cases} W_{t't'}-a^2W_{xx}=0 \quad t'>0 & (8.14a)\\ W(x,0)=0 & (8.14b)\\ W_{t'}=f(x,\tau) & (8.14c)\end{cases}$$

的形式，于是利用达朗贝尔公式，就得其解为

$$W(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-at'}^{x+at'}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi \tag{8.15}$$

再代入(8.13)就得到所考察的初值问题(8.9)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{8.16}$$

例 8.1.4. 试用齐次化原理导出平面非齐次波动方程

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t)$$

在齐次初始条件

$$\begin{cases} u(x,y,0)=0 & (8.17a)\\ u_t(x,y,0)=0 & (8.17b)\end{cases}$$

下的求解公式.

解. 先在这个情境下证明齐次化原理：

若 $W(x,y,t;\tau)$ 为

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2(W_{xx} + W_{yy}) & (8.18a) \\ W(x,y,\tau;\tau) = 0 & (8.18b) \\ W_t(x,y,\tau;\tau) = f(x,y,\tau) & (8.18c) \end{cases}$$

的解，则 $u(x,y,t) = \int_0^t W(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau$ 即为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t) & (8.19a) \\ u(x,y,0) = 0 & (8.19b) \\ u_t(x,y,0) = 0 & (8.19c) \end{cases}$$

的解. 验证如下：

1. $u(x,y,0) = \int_0^0 W(x,t,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0$

2. $u_t(x,y,t) = W(x,y,t;t) + \int_0^t W_t(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t W_t(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau$

   $u_t(x,y,0) = \int_0^0 W_t(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0$

3. $u_{tt}(x,y,t) = W_t(x,y,t;t) + \int_0^t W_{tt}(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau$

   其中 $W_t(x,y,t;t) = f(x,y,t)$

   $\int_0^t W_{tt}\mathrm{d}\tau = \int_0^t a^2(W_{xx} + W_{yy})\mathrm{d}\tau = a^2(u_{xx} + u_{yy})$

   齐次化原理得证！

   由式子(8.74)，再结合时间平移，我们有

$$W(x,y,t;\tau) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi} \frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)}{\sqrt{(a(t-\tau)^2) - r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{8.20}$$

进而

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi} \frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{8.21}$$

□

8.1.4 混合问题例题

例 8.1.5. 求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x & (8.22a) \\ u(x,0) = 0 & (8.22b) \\ u_t(x,0) = \sin x & (8.22c) \end{cases}$$

解. 利用叠加原理，题中初值问题可以分解为下面两个初值问题：

$$I\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & (8.23a) \\ v(x,0) = 0 & (8.23b) \\ v_t(x,0) = \sin x & (8.23c) \end{cases}$$

$$II\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = t\sin x & (8.24a) \\ w(x,0) = 0 & (8.24b) \\ w_t(x,0) = 0 & (8.24c) \end{cases}$$

而且有

$$u = v + w$$

由 D'Alembert 公式，I 的解为

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin\xi \mathrm{d}\xi = \sin x \sin t$$

为了解 II，我们利用 Duhamel 原理，

$$w(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 $W(x,t;\tau)$ 时初值问题

$$\begin{cases} W_{tt} - W_{xx} = 0 & (8.25a) \\ W(x,\tau) = 0 & (8.25b) \\ W_t(x,\tau) = \tau\sin x & (8.25c) \end{cases}$$

的解. 在该初值问题中作变换 $t' = t - \tau$，由 D'Alember 公式可得

$$W(x,t;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin\xi \mathrm{d}\xi = \frac{\tau}{2}\left(\cos(x-t+\tau) - \cos(x+t-\tau)\right)$$

所以

$$w(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = t\sin x - \sin x\sin t$$

故原初值问题的解为

$$u(x,t) = t\sin x.$$

□

8.2 初边值问题的分离变量法

考虑第一类边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < l, t > 0 & (8.26a) \\
u(x,0) = \varphi(x) & (8.26b) \\
u_t(x,0) = \psi(x) \quad 0 < x < l & (8.26c) \\
u(0,t) = 0 & (8.26d) \\
u(l,t) = 0 \qquad\quad t > 0 & (8.26e)
\end{cases}
$$

我们假设方程(8.26a)有变量分离形式的非平凡解

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{8.27}$$

代入方程(8.26a)得到

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

由于在该式中，左边仅是 t 的函数，右边仅是 x 的函数，左右两端要想相等，只有等于同一常数才可能，记此常数为 $-\lambda$，其值待定，这样我们就得到了两个常微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{8.28}$$

和

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{8.29}$$

首先考虑(8.29)，可以由原方程的边值条件得到它的初值

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0, \forall t > 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$

$$u(l,t) = 0 \Rightarrow X(l)T(t) = 0, \forall t > 0 \Rightarrow X(l) = 0.$$

故

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (8.30a) \\
X(0) = 0 & (8.30b) \\
X(l) = 0 & (8.30c)
\end{cases}
$$

当 $\lambda \leqslant 0$ 时，(8.30)只有平凡解.

当 $\lambda > 0$ 时，有通解

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

由 $X(0) = 0$ 得到 $C_1 = 0$.

由 $X(l) = 0$ 得到 $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$，要想得到非平凡解，就必须

$$\sqrt{\lambda}l = k\pi \Rightarrow \lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2, k = 1, 2, \cdots$$

这样就得到固有函数系

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, k = 1, 2, \cdots \tag{8.31}$$

将固有值 λ_k 代入(8.28)，得到

$$T''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0. \tag{8.32}$$

其通解为

$$T_k(t) = A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t, \tag{8.33}$$

其中 A_k, B_k 是待确定的常数.

这样，就得到了方程的满足齐次边界条件的下列分离变量形式的特解

$$U_k(x,t) = X_k(t)T_k(t) = \left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x, k = 1, 2, \cdots$$

注记. *在此时令 $t = 0$，观察到这样的单个的解是不可能满足关于 $t = 0$ 时刻的边值条件的.*

构造级数解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{8.34}$$

注记. *注意到变量分离形式的解叠加后不再是变量分离形式的解.*

此时让我们暂且停一下，回过头来看看 $u(x,t)$ 需要满足的条件

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u(0,t) = 0 & \\ u(l,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

首先是 $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0$. 虽说叠加之前的单个变量分离的解是满足它的，但是级数解就不一定了. 按照我们数分学过的知识，必须得要求它关于 x 和 t 都能逐项求两阶导，这样的话才能保证级数解仍满足这样的条件. 还是根据数分的知识，能逐项求导的一个充分条件是一致收敛，而级数解是否一致收敛显然与 A_k, B_k 的选取有关，而 A_k, B_k 的选取又显然与 $\varphi(x), \psi(x)$ 有关.

注记. *这给了我们学习数分一致收敛性和逐项求导的动机.*

下面适当选择 A_k 与 B_k 以满足边界条件(8.26b)和(8.26c)

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{ak\pi}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x)$$

我们需要保证这个级数的收敛性，那么需要 A_k 和 B_k 足够好，那么就需要我们的初值提的足够好.

若 $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$ 且

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0$$

，则??的解存在

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(\frac{k\pi}{l}x)dx$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)$$

且由(8.34)给出.

8.2.1 Sturm-Liouville 边值问题

考虑边值问题

$$\begin{cases} y''(x) + (\lambda + q(x))y(x) = 0 \quad 0 < x < 1 & (8.35a) \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 & (8.35b) \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0 & (8.35c) \end{cases}$$

注记. 观察到我们之前讨论的是 $q(x) = 0, \alpha = 0, \beta = 0$ 的特殊情况.

若存在 λ_0 使得初值问题(8.35)有非零解 $y = \varphi_0(x)$，则称 λ_0 为该方程的特征值，称 φ_0 为从属于特征值 λ_0 的特征函数.

注记. 我希望能有一个方程的特征值与特征函数的一般的定义.

考虑由(8.35a)和(8.35b)得到的初值问题

$$\begin{cases} y''(x) + (\lambda + q(x))y(x) = 0 \quad 0 < x < l & (8.36a) \\ y(0) = \sin\alpha & (8.36b) \\ y'(0) = \cos\alpha & (8.36c) \end{cases}$$

注记. 虽然(8.36a)和(8.36b)仅仅是满足初值条件(8.35b)的一组特解,但是注意到其他的解都可以由(8.36)乘上一个常数得到，因此我们并没有丧失一般性.

初值问题(8.36)一定存在解 $\varphi(x,\lambda)$. 现在要考虑的问题是，什么样的 λ 能够使得 $y = \varphi(x,\lambda)$ 还满足(8.35c)

$$\varphi(1,\lambda)\cos\beta - \varphi'(1,\lambda)\sin\beta = 0 \tag{8.37}$$

作极坐标换元，令

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\sin(\theta(x,\lambda)) & (8.38a) \\ \varphi'(x,\lambda) = \rho(x,\lambda)\cos(\theta(x,\lambda)) & (8.38b) \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \rho(x,\lambda) = \sqrt{[\varphi(x,\lambda)]^2 + [\varphi'(x,\lambda)]^2} & (8.39a) \\ \theta(x,\lambda) = \arctan\dfrac{\varphi(x,\lambda)}{\varphi'(x,\lambda)} & (8.39b) \end{cases}$$

$$\theta' = \cos^2\theta + (\lambda + q(x))\sin^2\theta$$

$$\varphi(1,\lambda)\cos\beta - \varphi'(1,\lambda)\sin\beta = 0$$

$\Rightarrow$

$$\theta(1,\lambda) = \beta + k\pi$$

$\Rightarrow$

$$\theta(0,\lambda) = \alpha + j\pi$$

引理 8.2.1. 对任意的 $k = 0, 1, \cdots$，

$$\theta(1,\lambda) = \beta + k\pi$$

有且只有一个根 λ_k，并且当 $k \to \infty$，$\lambda_k \to \infty$

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to \infty$$

引理 8.2.2. 对于每一个特征值 λ_n，(8.35)有且只有一个线性无关的特征函数.

证明. 假设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是 λ_n 的特征函数，则

$$\varphi(0)\cos\alpha - \psi'(0)\sin\alpha = 0$$

$$\psi(0)\cos\alpha - \psi'(0)\sin\alpha = 0$$

将 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 看成未知函数，有非零解，推出系数行列式为零，也就是 Wronsky 行列式在 0 处的取值为零，进而线性相关. □

令 $\varphi_n = \varphi(x, \lambda_n)$，则有下面的引理

引理 8.2.3. 特征函数系 $\{\varphi_n(x) | n = 0, 1\cdots\}$ 在区间 $[0,1]$ 上组成一个正交系，即

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} \delta_k > 0 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

证明. 当 $n \neq 0$ 时，令 $f(x) = \begin{vmatrix} \varphi_n & \varphi_k \\ \varphi_n' & \varphi_k' \end{vmatrix}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \varphi_n(-\lambda_k - q)\varphi_k - \varphi_k(-\lambda_n - q)\varphi_n = (\lambda_n - \lambda_k)\varphi_n(x)\varphi_k(x)$$

从 0 到 1 积分，

$$f(1) - f(0) = (\lambda_n - \lambda_k)\int_0^1 dx$$

然而利用上一个引理中的证明的技巧可证 $f(0) = f(1) = 0$

又因为 $\lambda_n \neq \lambda_k$，所以 $\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi(_k)(x)dx = 0$ □

定理 8.2.1. 全体特征函数 $\{\varphi_k | k = 0, 1, \cdots\}$ 构成 $L^2([0,1])$ 中的完备正交系.

例 8.2.1. $\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0, 0 < x < l \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x & 0 < x < L \\ \dfrac{h}{l-L}(l-x) & L < x \leqslant l \end{cases} \\ \partial_t u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \forall t > 0 \end{cases}$

解. $\Big\{ \ \ldots$

令 $u(t,x) = T(t) = X(x)$

$$T''(t)X(x) - a^2 T(t)X''(x) = 0 \Rightarrow$$

□

例 8.2.2. $\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ -\partial_x u + a_0 u = 0 & x = 0, t > 0 \\ \partial_x u + a_l u = 0 & x = l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$

证明. 分离变量，基本操作. 故

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ -X'(0) + a_0 X(0) = 0, X'(l) + a_l X(l) = 0 \end{cases} \tag{8.40}$$

由 SL 理论，存在一列正特征值.

令

$$X(x) = C\cos(\sqrt{\lambda}x) + D\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(x) = -C\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + D\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

由 $x = 0$ 的边值条件，得

$$-D\sqrt{\lambda} + a_0 C = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{\sqrt{\lambda}}{a_0}D$$

由 $x = l$ 的边值条件，得

$$-C\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda L} + D\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + a_l(C\cos\sqrt{\lambda}l + D\sin\sqrt{\lambda}l) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{\lambda} + a_l\frac{\sqrt{\lambda}}{a_0})\cos\sqrt{\lambda}l + (a_l - \frac{\lambda}{a_0})\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

- 若 $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$，则 $\sqrt{\lambda}l = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

  故 $a_l a_0 = \lambda = (\dfrac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{l})^2$，此时给题目将上一个条件让这个东西不可能成立

- 把 cos 除过去，

  $$\tan(\sqrt{\lambda}l) = \frac{(a_0 + a_l)\sqrt{\lambda}}{\lambda - a_0 a_l}$$

  这是一个关于 λ 的方程，由 SL 理论，我们知道它一定有无穷多解. 令该方程的解为 λ_n，则有

  $$\left(\frac{(n-1)\pi}{l}\right)^2 < \lambda_n < \left(\frac{(n-1)\pi}{l}\right)^2$$

  则

  $$X_n(x) = C_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x) + D_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$$

  带入关系 $C_n = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_0}D_n$，并且直接略去常数 D_n

  $$X_n(x) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0}\cos(\sqrt{\lambda_n}x) + \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$$

$$T''(t) + a^2\lambda_n T(t) = 0$$

$$T(t) = A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t)$$

故 $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(a\sqrt{\lambda_N}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t))X_n(x)$ 带入初值条件 $u(x,0) = \varphi(x)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x)$$

由于 $X_n, n \leqslant$ 是 $L^2([0,L])$ 中完备的正交集，故

$$A_k \int_0^l |X_k(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) \mathrm{d}x$$

由 $\partial_t u(x,0) = \psi(x)$

$$\sum_0^{\infty} B_n a\sqrt{\lambda_n} X_n(x) = \psi(x)$$

$$B_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \frac{\int_0^l \psi(x) X_n(x) \mathrm{d}x}{\int_0^l |X_n(x)|^2 \mathrm{d}x}$$

故原方程的解

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) X_n(x)$$

□

注记. 我们的分离变量法只能在 $(0,l)$ 之间，因为 R 上谱是连续谱

例 8.2.3.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = f & (8.41a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (8.41b) \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) & (8.41c) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & (8.41d) \end{cases}$$

先看 $f=0$ 的情况，

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi}{l}x, k=1,2,\cdots$$

把 u,f,φ,ψ 全按这个基展开

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, k=1,2,\cdots \tag{8.42}$$

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, k=1,2,\cdots \tag{8.43}$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi}{l}x, \varphi_k\in\mathbb{R}, k=1,2,\cdots \tag{8.44}$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi}{l}x, \psi_k\in\mathbb{R}, k=1,2,\cdots \tag{8.45}$$

将方程(8.42)和(8.43)带入到方程(8.41a)，得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t)+a^2(\frac{k\pi}{l})^2T_k(t)\right)\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{8.46}$$

同理可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{8.47}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(0)\sin\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{8.48}$$

由对应系数相等，我们得到

$$\begin{cases} T_k''(t)+a^2(\frac{k\pi}{l})^2T_k(t)=f_k(t) & (8.49a)\\ T_k(0)=\varphi_k & (8.49b)\\ T_k'(0)=\psi_k & (8.49c)\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum\left[\varphi_k\cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right)+\frac{l}{ak\pi}\psi_k\sin\left(\frac{ak\pi}{l}t\right)+\frac{l}{ak\pi}\int_0^t\sin\left(\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)\right)f_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

8.2.2 非齐次方程，非齐次边界

例 8.2.4.

$$\begin{cases} \partial_t^2u-a^2\partial_x^2u=f & (8.50a)\\ u(x,0)=\varphi(x) & (8.50b)\\ \partial_tu(x,0)=\psi(x) & (8.50c)\\ u(0,t)=\mu_1(t) & (8.50d)\\ u(l,t)=\mu_2(t) & (8.50e)\end{cases}$$

首先要变成齐次边界. 令

$$U(x,t)=u(x,t)-\left[\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)\right)\right]$$

这个构造还是很容易想到的，它和淑芬中想把定义在 $[a,b]$ 上的函数 f 的端点处的值变成 0 的构造是一样的.

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - a^2\partial_x^2 U = f(x,t) - \left[\mu_1'' + \dfrac{x}{l}(\mu_2'' - \mu_1'')\right] = F(x,t) & (8.51a) \\ U(x,0) = \varphi(x) - \left(\mu_1(0) + \dfrac{x}{l}\left(\mu_2(0) - \mu_1(0)\right)\right) & (8.51b) \\ \partial_t U(x,0) = \psi(x) - \left(\mu_1'(0) + \dfrac{x}{l}\left(\mu_2'(0) - \mu_1'(0)\right)\right) & (8.51c) \\ U(0,t) = 0 & (8.51d) \\ U(l,t) = 0 & (8.51e) \end{cases}$$

8.2.3 分离变量法例题

例 8.2.5 (P24,1-3-1(2)). 用分离变量法求解

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < l & (8.52a) \\ u(0,t) = 0 & (8.52b) \\ u_t(l,t) = 0 & (8.52c) \\ u(x,0) = \frac{h}{l}x & (8.52d) \\ u_t(x,0) = 0 & (8.52e) \end{cases}$$

证明. 我们先求出题中方程的非平凡的特解

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

将上式代入原方程，得

$$X(x)T''(t) - a^2X''(x)T(t) = 0$$
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

由边界条件可知 $X(0) = X'(l) = 0$. 讨论可知只能有 $\lambda > 0$，于是

$$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

由 $X(0) = 0$ 知 $C_1 = 0$，再由 $X'(l) = 0$ 知

$$\sqrt{\lambda}l = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

所以特征值为

$$\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{2l}\right)^2\pi^2, k = 0,1,2\cdots$$

将 λ_k 代入关于 t 的方程 $T''(t) + \lambda_k a^2T(t) = 0$ 中，可得其通解为

$$T_k(t) = A_k\cos\frac{2k+1}{2l}\pi at + B_k\sin\frac{2k+1}{2l}\pi at, k = 0,1,2,\cdots$$

下面我们决定 A_k, B_k 以使

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{2k+1}{2l}\pi at + B_k\sin\frac{2k+1}{2l}\pi at\right)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$$

满足原方程的初值条件. 由初值条件，应有

$$\begin{cases} \frac{h}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{2k+1}{2l}\pi x & (8.53a) \\ 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2l}\pi a B_k \sin \frac{2k+1}{2l}\pi x & (8.53b) \end{cases}$$

因此

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{h}{l}x \sin \frac{2k+1}{2l}\pi x \mathrm{d}x = \frac{8h}{(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k$$

$$B_k = 0, k = 0, 1, 2, \cdots$$

所以

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{2k+1}{2l}\pi a t \sin \frac{2k+1}{2l}\pi x$$

□

例 8.2.6 (P24,1-3-5). 用分离变量法求下面问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = b \sinh x & (8.54a) \\ u(0,t) = 0 & (8.54b) \\ u(l,t) = 0 & (8.54c) \\ u(x,0) = 0 & (8.54d) \\ u_t(x,0) = 0 & (8.54e) \end{cases}$$

解.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \sin \frac{k\pi}{l}x$$

其中

$$B_k(\tau) = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l b \sinh \xi \sin \frac{k\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi = \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2 + l^2}\frac{2bl \sinh l}{a}$$

所以

$$\begin{aligned} &\int_0^t B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ =&\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2 + l^2}\frac{2bl \sinh l}{a}\int_0^t \sin \frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ =&\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2 + l^2}\frac{2bl \sinh}{a}\frac{l}{2\pi a}\left(1 - \cos \frac{k\pi a}{l}t\right) \\ =&\frac{2bl^2 \sinh l}{a^2\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k^2\pi^2 + l^2)}\left(1 - \cos \frac{k\pi a}{l}t\right) \end{aligned}$$

故

$$u(x,t) = \frac{2bl^2 \sinh l}{a^2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k^2\pi^2 + l^2)}\left(1 - \cos \frac{k\pi a}{l}t\right) \sin \frac{k\pi}{l}x$$

□

例 8.2.7 (P24,1-3-6). 用分离变量法求下面问题的解

$$\begin{cases} u_{tt}+2bu_t=a^2u_{xx} & (8.55a)\\ u(0,t)=0 & (8.55b)\\ u(l,t)=0 & (8.55c)\\ u(x,0)=\frac{h}{l}x & (8.55d)\\ u_t(x,0)=0 & (8.55e)\end{cases}$$

解. 令

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入方程及边值条件，得

$$\frac{T''+abT'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$
$$X(0)=X(l)=0$$

边值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (8.56a)\\ X(0)=X(l)=0 & (8.56b)\end{cases}$$

有特征值 $\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k=1,2,\cdots$，以及相应的特征函数

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi}{l}x, k=1,2,\cdots$$

将 λ_k 代入关于 t 的方程 $T''(t)+2bT'(t)+\lambda a^2T(t)=0$ 中，得

$$T_k''(t)+2bT_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)T(t)=0$$

该常系数线性齐次二阶 ODE 的特征方程是

$$\lambda^2+2b\lambda+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2=0$$

解得

$$\lambda=-b\pm\sqrt{b^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}$$

当 $b>\frac{k\pi a}{l}$ 即 $k<\frac{bl}{\pi a}$ 时，通解为

$$T_k(t)=\mathrm{e}^{-bt}\left(A_k\cosh\mu_kt+B_k\sinh\mu_kt\right),$$

其中 $\mu_k=\sqrt{b^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}$ □

8.3 高维波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t) & (8.57a)\\ u(x,0) = \varphi(x) & (8.57b)\\ u_t(x,0) = \psi(x) & (8.57c)\end{cases}$$

8.3.1 齐次方程，dim=3，球平均法

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = 0 & (8.58a)\\ u(x,0) = \varphi(x) & (8.58b)\\ u_t(x,0) = \psi(x) & (8.58c)\end{cases}$$

球坐标换元，(8.58a)变为

$$\partial_t^2 u - a^2(\partial_r^2 u + \frac{2}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} u) = 0 \tag{8.59}$$

两边同时在 S^2 上积分，可得

$$\int_{S^2}\partial_t^2 u\mathrm{d}\omega - a^2\left(\int_{S^2}\partial_r^2 u\mathrm{d}\omega + \frac{2}{r}\int_{S^2}\partial_r u\mathrm{d}\omega + \frac{1}{r^2}\int_{S^2}\Delta_{S^2} u\mathrm{d}\omega\right) = 0 \tag{8.60}$$

而

$$\int_{S^2}\Delta_{S^2} u\mathrm{d}\omega = 0 \tag{8.61}$$

所以(8.60)变为

$$\int_{S^2}\partial_t^2 u\mathrm{d}\omega - a^2\int_{S^2}\partial_r^2 u\mathrm{d}\omega + \frac{2a^2}{r}\int_{S^2}\partial_r u\mathrm{d}\omega = 0 \tag{8.62}$$

令

$$\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r} u(x,t)\mathrm{d}S(x) \xlongequal{x=ry} \frac{1}{4\pi}\int_{S_1} u(ry,t)\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} u(r\boldsymbol{\omega},t)\mathrm{d}\omega \tag{8.63}$$

代入(8.62)，得到

$$\partial_t^2\tilde{u} - a^2\partial_r^2\tilde{u} + \frac{2a^2}{r}\partial_r\tilde{u} = 0 \tag{8.64}$$

这是一维的，但是我们还是不会解，因为我们只会解形如

$$\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0$$

的方程，因此我们试图通过变换把 $\dfrac{2a^2}{r}\partial_r\tilde{u}$ 这一项搞没.

令

$$v = r^{-\sigma}\tilde{u}, \tilde{u} = r^{\sigma} v$$

则有

$$\partial_t^2\tilde{u} = r^{\sigma}\partial_t^2 v$$

$$
\begin{aligned}
\partial_r \tilde{u} &= \partial_r(r^\sigma v) = \sigma r^{\sigma-1} v + r^\sigma \partial_r v \\
\partial_r^2 \tilde{u} &= \partial_r(\sigma r^{\sigma-1} v + r^\sigma \partial_r v) \\
&= \sigma(\sigma-1) r^{\sigma-2} v + \sigma r^{\sigma-1}\partial_r v + \sigma r^{\sigma-1}\partial_r v + r^\sigma \partial_r^2 v
\end{aligned}
$$

代入方程(8.64)，整理得，

$$
r^\sigma \partial_t^2 v - a^2\left[\sigma(\sigma+1) r^{\sigma-2} v + 2(\sigma+1) r^{\sigma-1}\partial_r v + r^\sigma \partial_r^2 v\right] = 0 \tag{8.65}
$$

观察到若令 $\sigma=-1$，即 $v=r\tilde{u}$，可同时消去 v 项和 $\partial_r v$ 项，得到

$$
\partial_t^2 v - a^2 \partial_r^2 v = 0, r \geqslant 0 \tag{8.66}
$$

对 $\tilde{u}$ 及其初值做偶延拓

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(-r) &= \tilde{u}(r) \\
\tilde{\varphi}(-r) &= \tilde{\varphi}(r) \\
\tilde{\psi}(-r) &= \tilde{\psi}(r)
\end{aligned}
$$

我们得到了实直线上的波方程！

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 v - a^2 \partial_r^2 v = 0 & (8.67\text{a}) \\
v(r,0) = r\tilde{\varphi}(r) & (8.67\text{b}) \\
\partial_t v(r,0) = r\tilde{\psi}(r) & (8.67\text{c})
\end{cases}
$$

由达朗贝尔公式，

$$
v(r,t) = \frac{1}{2}\left((r-at)\tilde{\varphi}(r-at) + (r+at)\tilde{\varphi}(r+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at} s\tilde{\psi}(s)\mathrm{d}s \tag{8.68}
$$

接下来我们原路返回

$$
\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{2r}\left((r-at)\tilde{\varphi}(r-at) + (r+at)\tilde{\varphi}(r+at)\right) + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at} s\tilde{\psi}(s)\mathrm{d}s \tag{8.69}
$$

接下来希望从 $\tilde{u}(r,t)$ 得到 $u(x,t)$. 一般来说，这是比较困难的.

回忆 $\tilde{u}(r,t)$ 的定义

$$
\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} u(r\boldsymbol{\omega}, t)\mathrm{d}\omega
$$

我们注意到有 $\tilde{u}(0,t) = u(\mathbf{0},t)$.

现要计算 $\tilde{u}(0,t)$，虽然我们得到了上面的显式表达式(8.69)，但是注意到 r 在分母上，计算极限比较困难.

考虑

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(0,t) &= \partial_r(r\tilde{u}(r,t))\Big|_{r=0} \\
&= \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(-at) - at\tilde{\varphi}'(-at) + \tilde{\varphi}(at) + at\tilde{\varphi}'(at)\right] + \frac{1}{2a}\left[at\psi(at) + at\psi(-at)\right] \\
&= \tilde{\varphi}(at) + at\tilde{\varphi}'(at) + t\tilde{\psi}(at) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\varphi(at\omega)\mathrm{d}\omega + \frac{t}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S^2}\varphi(atw)\mathrm{d}w + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\psi(at\omega)\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\varphi(at\omega)\mathrm{d}\omega\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\psi(at\omega)\mathrm{d}\omega$$

接下来我们断言，任意一点 $u(x_0, t)$ 的值，都可以转化为另一个满足三维齐次波动方程但初值不同的 ξ 的 $\xi(0, t)$.

事实上，只要令 $\xi(x, t) = u(x + x_0, t)$ 即可.

$$\begin{aligned} u(x_0, t) = \xi(0, t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\varphi(x_0 + at\omega)\mathrm{d}\omega\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\psi(x_0 + at\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B(x_0, at)}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B(x_0, at)}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

为了熟悉和理解变量代换的过程中到底发生了什么事情，我决定算一些简单的例子.

比如说，考虑

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}x$$

其中 f 是一个单变量函数.

令 $tx=y$，则 $x=\frac{1}{t}y, \mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}y$

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\int_0^t f(y)\mathrm{d}y$$

如果说被积函数是关于 d 后面的那个东西的函数，那么第一个积分中被积函数是 $g(x)=f(tx)$，第二个积分中被积函数是 $f(y)$，因此在变量代换前后被积函数发生了改变.

但是注意，在这个过程中，f 本身作为一个函数是没有发生改变的，意思是说将第一个积分中的 tx 的整体看作自变量，第二个积分中的 y 看作自变量，只要自变量的输入相同，f 的输出也就相同.

另一个变化是积分区域发生了改变. 但是，当第二个积分中 y 遍历积分区域 0 到 t 时，和第一个积分中 x 遍历积分区域 0 到 1 时，f 其实都遍历了自己的取值范围 0 到 t.

唔唔唔！我好像搞清了自己过去的一个极端错误的想法，我过去以为，变量代换前后，发生的事情是，我们有一个三维欧氏空间，然后 f 定义在它上面，当在单位球面上积分时，参与进运算的就是 f 在单位球面上的值，当在半径为 r 的球面上进行积分时，参与进运算的就是 f 在半径为 r 的球面上的值，但按照我上面的论述，这个观点显然是错误的，变量代换前后，参与积分的 f 的取值是相同的！我这里说的“参与积分”，是指从一个比较朴素的观点来理解第一型曲面积分，即把 f 理解为分布在曲面上的质量面密度，第一型曲面积分就是每个点处的面密度乘上该点处的面积再求和. 而在变量代换前后，点与点之间具有一一对应的关系，对应的点处的面密度仍是相同的，这就是我所谓的“参与积分”的 f 的值没有发生改变的意思. 那么什么发生不同了呢？是每个点的面积，我猜这就是所谓的测度，可惜我暂时不懂测度论，给不了更严密的解释，不过大概就是这么回事，正因为如此，我们才需要在上面的积分变换前后乘上一个常数 $\frac{1}{t}$，这就是变量代换前后面积伸缩的一个比例系数. 而一般的情况下，我们知道应该乘的是变换的 Jacobi 行列式，而在每点处的 Jacobi 行列式是可以不同的. 在我们这里的情况中，因为是一个伸缩变换，所以它是均匀的，所以不同点处的那个比例系数是相同的. 而对于球坐标换元，不同点处的那个比例系数就是不同的 $r^2\sin\theta$.

再稍微总结一下就是从 f 的视角来看积分区域是没变的，但是跟 f 乘的那个东西变了，反映在曲面积分上就是我们写出来的参数表示是不同的，而在单变量的情况下似乎这种想法是看不太出来的，因为这个时候认为自变量取值范围发生改变是比较自然的.

所以说变量代换所作用的对象应该理解为整个空间，它是对整个空间的一个变换，而不应该理解为空间没动，积分区域发生改变.

唉，这些本该是在数分 A2 中想明白的事.

8.3.2 齐次方程，dim=2，降维法

现在我们研究二维波动的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (8.70a) \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y) & (8.70b) \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y) & (8.70c) \end{cases}$$

我们可利用上面关于三维波动方程柯西问题的求解结果来解决二维波动方程的柯西问题.

如果三维波动方程

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{zz}) & (8.71a) \\ \tilde{u}(x,y,z,0) = \varphi(x,y) & (8.71b) \\ \tilde{u}_t(x,y,z,0) = \psi(x,y) & (8.71c) \end{cases}$$

的柯西问题的解 $\tilde{u}(x,y,z,t)$ 是一个与自变量 z 无关的函数，则它所满足的方程和初始条件就自动地化为二维波动方程的柯西问题.

利用解三维波动方程柯西问题的泊松公式，得到

$$\tilde{u}(x,y,z,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{\partial B(p,at)} \varphi \mathrm{d}S\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{\partial B(p,at)} \psi \mathrm{d}S \tag{8.72}$$

注记. 书上有一句话写得比较令人迷惑，“由于 φ 及 ψ 都是和 z 无关的函数，因此在球面上的积分可以化为它在平面上的投影上的积分”，窃以为，我们总是可以以 x,y 作参数来将这个曲面积分化为二重积分，只不过这里由于 φ 及 ψ 都是和 z 无关的函数所以导致原来的被积函数和新的被积函数的形式没有发生变化罢了.

注意到球面上的面积微元 $\mathrm{d}S$ 和它的投影的面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 之间成着如下的关系：

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}S \cdot \cos\gamma$$

其中 γ 为这两个面积微元法向方向间的夹角，而

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{at} \tag{8.73}$$

这样，(8.72)就变为

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,y,z,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{\partial B(p,at)} \varphi \mathrm{d}S\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{\partial B(p,at)} \psi \mathrm{d}S \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2\pi a^2 t}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant(at)^2} \frac{at\varphi}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi a^2 t}\iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant(at)^2} \frac{at\psi}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

极坐标换元并整理得

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\theta, y\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r + \int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+r\cos\theta, y\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right] \tag{8.74}$$

例 8.3.1. 用降维法导出平面非齐次波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t)$$

在齐次初始条件

$$\begin{cases} u(x,y,0) = 0 & (8.75\text{a}) \\ u_t(x,y,0) = 0 & (8.75\text{b}) \end{cases}$$

下的求解公式.

解. 唉！首先要用齐次化原理推导三维非齐次波动方程在齐次初始条件下的求解公式. 在这里我们不加验证地给出如下结果：若 $W(x,y,z,t;\tau)$ 是

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2(W_{xx} + W_{yy} + W_{zz}) & (8.76\text{a}) \\ W(x,y,z,t;\tau) = 0 & (8.76\text{b}) \\ W_t(x,y,z,t;\tau) = f(x,y,z,\tau) & (8.76\text{c}) \end{cases}$$

的解，那么 $u(x,y,z,t) = \displaystyle\int_0^t W(x,y,z,t;\tau)\mathrm{d}\tau$ 就是

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t) & (8.77\text{a}) \\ u(x,y,z,0) = 0 & (8.77\text{b}) \\ u_t(x,y,z,0) = 0 & (8.77\text{c}) \end{cases}$$

的解.

根据泊松公式，有

$$w(x,y,z,t;\tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)} \iint_{\partial B(p,a(t-\tau))} f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\mathrm{d}S \tag{8.78}$$

因此

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \iint_{\partial B(p,a(t-\tau))} f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau \tag{8.79}$$

由于 u 与 z 无关，f 与 ζ 无关，所以我们有

$$u(x,y,t) = \frac{2}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \leqslant a^2(t-\tau)^2} f(\xi,\eta,\tau) \frac{a(t-\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}} \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau \tag{8.80}$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \iint_{r^2 \leqslant a^2(t-\tau)^2} \frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \tag{8.81}$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau \tag{8.82}$$

□

8.3.3 非齐次方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2\Delta u = f & (8.83\text{a}) \\ u(x,0) = \varphi & (8.83\text{b}) \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) & (8.83\text{c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2 \Delta u = f & (8.84a) \\ u(x,0) = 0 & (8.84b) \\ \partial_t u(x,0) = 0 & (8.84c) \end{cases}$$

令

$$u(x,t) = \int_0^t W(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.85}$$

其中

$$\begin{cases} \partial_t^2 W - a^2 \Delta W = - & (8.86a) \\ & (8.86b) \end{cases}$$

令 $\tilde{t} = t - \tau$，$\tilde{W}(x,\tilde{t}) = W(x,\tilde{t}+\tau)$

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}^2 \tilde{W} - a^2 \Delta \tilde{W} = 0 & (8.87a) \\ \tilde{W}(x,0) = 0 & (8.87b) \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{W}(x,0) = f(x,\tau) & (8.87c) \end{cases}$$

$$\tilde{W}(x,\tilde{t}) = \frac{1}{4\pi a^2 \tilde{t}} \int_{\partial B(x_0,at)} f(\sigma,\tau)\mathrm{d}\sigma \tag{8.88}$$

$$W(x,t) = \tilde{W}(x,t-\tau) = \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int_{\partial B(x_0,at)} f(\sigma,\tau)\mathrm{d}\sigma \tag{8.89}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \int_{\partial B(x_0,at)} f(\sigma,\tau)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau \tag{8.90}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{B(x_0,at)} \frac{f(\sigma,\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}V \tag{8.91}$$

8.4 第七次习题课

例 8.4.1. *1.* 推导球坐标下的拉普拉斯算子 Δ

2. 证明

$$\int_{S^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\mathrm{d}S=0$$

证明. 1. 复杂的公式往往只需要简洁的推导.

$$\begin{aligned}\nabla^2 f&=\frac{1}{h_r h_\theta h_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta h_\phi}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_r h_\phi}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{h_r h_\theta}{h_\phi}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right]\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right]\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\int_{S^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\mathrm{d}S\\&=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right)\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}}_{I_1}+\underbrace{\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}}_{I_2}+\underbrace{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}}_{I_3}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1=&2\pi\int_0^\pi\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\\=&2\pi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial\theta}\\=&2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\\=&-2\pi\int_0^\pi\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\\I_2=&2\pi\int_0^\pi\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\\I_3=&\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\=&\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_0^{2\pi}\int_0^\pi\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\=&0\end{aligned}$$

□

例 8.4.2. 假定

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=0 & (8.92\text{a})\\u(x,0)=\varphi(x) & (8.92\text{b})\\u_t(x,0)=\psi(x) & (8.92\text{c})\end{cases}$$

(a) 对(8.92)作变量替换使其变成

$$
\begin{cases}
v_{tt} - \Delta v = 0 & (8.93\text{a}) \\
v(x,0) = \tilde{\varphi}(x) & (8.93\text{b}) \\
v_t(x,0) = \tilde{\psi}(x) & (8.93\text{c})
\end{cases}
$$

(b) 说明为了找(8.92)的解，我们只用找(8.93)的解.

例 8.4.3. 定义

$$
f(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r\varphi(r,\phi,\theta)\sin\theta \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta
$$
$$
g(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r\psi(r,\phi,\theta)\sin\theta \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta
$$

8.5 波动方程解的衰减估计

8.5.1 dim=3

仅在 $a=1$ 的情况下进行讨论.

$$u(x,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)+\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

命题 8.5.1.

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{C}{t} \tag{8.94}$$

证明. 我们断言，要想证明上述命题，只需要证明

$$|u(0,1)|\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x)|\mathrm{d}x\right) \tag{8.95}$$

下面分两步走，第一步在假定(8.95)正确的前提下推导(8.94)，第二步证明(8.95)

1. 令

$$v(x,t;\lambda,x_0)=u\left(\frac{x+x_0}{\lambda},\frac{t}{\lambda}\right)$$

特别地有

$$v(0,1)=u\left(\frac{x_0}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right)$$

v 满足

$$\begin{cases}v_{tt}-a^2\Delta v=0\\ v(x,0)=u\left(\dfrac{x+x_0}{\lambda},0\right)=\varphi\left(\dfrac{x+x_0}{\lambda}\right)=0\\ v_t(x,0)=\dfrac{1}{\lambda}\psi\left(\dfrac{x+x_0}{\lambda}\right)\end{cases}$$

由(8.95)有，

$$\begin{aligned}|v(0,1)|&\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{1}{\lambda}\nabla\psi\left(\frac{x+x_0}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\lambda}\left|\psi(x)\right|\mathrm{d}x\right)\\&=C\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{1}{\lambda^2}(\nabla\psi)\left(\frac{x+x_0}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\lambda}\left|\psi(x)\right|\mathrm{d}x\right)\\&\xlongequal{y=\frac{x+x_0}{\lambda}}C\left(\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi(y)|\mathrm{d}y+\lambda^2\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(y)|\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{t_0},x_0=\dfrac{y_0}{t_0}$
由任意性得证.

2.

$$u(0,1)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)}\psi(x)\mathrm{d}S(x)$$

接下来做一些虽然错误但具有启发性的计算，我们的目的是将上面关于 ψ 的曲面积分写成关于 ψ 和 $\nabla\psi$ 的体积分，我们的工具是散度定理.

$$\int_{B(0,1)}\mathrm{div}\left(\psi(x)\frac{\vec{x}}{|x|}\right)\mathrm{d}x=\int_{\partial B(0,1)}\psi(x)\frac{\vec{x}}{|x|}\cdot\vec{x}\mathrm{d}S(x)=\int_{\partial B(0,1)}\psi(x)\mathrm{d}S(x)$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{B(0,1)} \operatorname{div}\left(\psi(x)\frac{\vec{x}}{|x|}\right)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{B(0,1)} \left|\nabla\psi(x)\cdot\frac{\vec{x}}{|x|}\right| + \left|\left(\nabla\cdot\frac{\vec{x}}{|x|}\right)\psi(x)\right|\mathrm{d}x \\
&= \int_{B(0,1)} \left|\nabla\psi(x)\cdot\frac{\vec{x}}{|x|}\right| + \left|\frac{n-1}{|x|}\psi(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\int_{B(0,1)} |\nabla\psi(x)| + |\psi(x)|\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

上面的计算存在的问题是

(a) $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 在原点处是没有定义的；

(b) $\dfrac{n-1}{|x|}$ 在原点附近是爆掉.

该如何补救呢？这需要我们认识到 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 在上面的计算中究竟发挥了怎样的作用. 我们实际上只利用了，在 $\partial B(0,1)$ 上 $\psi(x)\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 与单位外法向 $\vec{x}$ 的点乘正是 $\psi(x)$. 我们希望在保留这点好处的同时，摒弃掉 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 在原点附近的不好.

我们还需要认识到，散度定理其实是一件非常神奇的事情，它告诉我们，只要两个向量场在有界区域的边界附近的值一致，那么不管它们在区域内部的值多么不同，它们的散度在整个区域内部的积分的值都相等. 这种只依赖于边界附近的值的特性，促使我们选择一个函数，它在 $\partial B(0,1)$ 附近和 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 取值完全相同，并且在内部尤其原点处比 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 温和得多. 用这样的函数代替 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 进行上面的计算，我们就继承了好的地方，摒弃了坏的地方.

令 $\chi(\rho)\in C^{\infty}((\frac{1}{2},2)), \xi\equiv 1 \quad near \quad \rho=1$

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leqslant 1} \operatorname{div}\left(\chi(x)\psi(x)\frac{x}{|x|}\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_{S^2} \chi(x)\psi(x)\frac{x}{|x|}\cdot x\mathrm{d}S \\
=&\int_{S^2} \psi(x)\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{8.96}
$$

故

$$
\begin{aligned}
|u(0,1)| &\leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{|x|\leqslant 1} |\operatorname{div}\left(\chi(x)\psi(x)\frac{x}{|x|}\right)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\left(\int |\psi(x)|\mathrm{d}x + \int |\nabla\psi(x)|\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}
\tag{8.97}
$$

□

8.5.2 dim=2

$$
u=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r+\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right]
$$

由于 φ,ψ 都具有紧支集,那么对于任意的 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$,存在 $R_{(x_0,y_0)}$,使得 $\mathrm{supp}\varphi\subset B(x_0,y_0,R_{(x_0,y_0)})$, $\mathrm{supp}\psi\subset B(x_0,y_0,R_{(x_0,y_0)})$

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right|\\
&\xlongequal{at\geqslant R(x_0,y_0)\text{时}}\left|\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right|\\
&\leqslant\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\psi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\
&\leqslant\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}M\frac{r}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\
&=2\pi M\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{r}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}r\\
&\leqslant 2\pi M\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{R(x_0,y_0)}{\sqrt{a^2t^2-R^2(x_0,y_0)}}\mathrm{d}r\\
&=\frac{2\pi MR^2(x_0,y_0)}{\sqrt{a^2t^2-R^2(x_0,y_0)}}\\
&\sim\frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right|\\
&\xlongequal{at\geqslant R(x_0,y_0)\text{时}}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right|\\
&=\left|\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}2a^2tr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right|\\
&\leqslant a^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}tr\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\
&\leqslant a^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}M\frac{tr}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\
&=2\pi Ma^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{tr}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\\
&\leqslant 2\pi Ma^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{tR(x_0,y_0)}{(a^2t^2-R^2(x_0,y_0))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\\
&=\frac{2\pi Ma^2R^2(x_0,y_0)t}{(a^2t^2-R^2(x_0,y_0))^{\frac{3}{2}}}\\
&\sim\frac{1}{t^2}
\end{aligned}
$$

注记. 上面的估计是逐点的，不是一致的，可以证明以 $t^{-\frac{1}{2}}$ 的速度一致地衰减.

8.6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

8.6.1 非齐次项为零

$$u_{tt}-\Delta u=0$$

两边同乘 u_t，得到

$$u_t u_{tt}-u_t\Delta u=0$$

易验证有

$$\begin{aligned}
u_t u_{tt} &= \frac{1}{2}\partial_t u_t^2 \\
u_t\Delta u &= \sum_{i=1}^{3} u_t u_{x_i x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[\partial_{x_i}(u_t u_{x_i})-u_{x_i t}u_{x_i}\right] && \text{分部积分} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left[\partial_{x_i}(u_t u_{x_i})-\frac{1}{2}\partial_t u_{x_i}^2\right] \\
\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\partial_t u_{x_i}^2 &= \frac{1}{2}\partial_t\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2 \\
&= \frac{1}{2}\partial_t|\nabla u|^2 \\
\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}(u_t u_{x_i}) &= \operatorname{div}(u_t u_{x_1},u_t u_{x_2},u_t u_{x_3}) \\
&= \operatorname{div}(u_t\nabla u)
\end{aligned}$$

则有

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)-\operatorname{div}(u_t\nabla u)=0$$

记能量密度

$$e_u=\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2$$

$$\partial_t e_u-\operatorname{div}(u_t\nabla u)=0 \tag{8.98}$$

Case1:$\mathbb{R}^3$

将(8.98)在 $\mathbb{R}^3$ 上进行积分，得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t e_u\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\operatorname{div}(u_t\nabla u)\mathrm{d}x=0$$

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^3}e(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\operatorname{div}(u_t\nabla u)\mathrm{d}x=0 \tag{8.99}$$

由散度定理

$$\int_{\mathbb{R}^3}\operatorname{div}\left(u_t\nabla u\right)\mathrm{d}x=\int_{\emptyset}u_t\left(\nabla u\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S=0$$

因此有

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} e(u)\mathrm{d}x = 0 \tag{8.100}$$

记

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} e(u)\mathrm{d}x \tag{8.101}$$

则由(8.100)有

$$E(t) = E(0) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right)\mathrm{d}x \tag{8.102}$$

Case2:Ω

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (8.103a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (8.103b) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & (8.103c) \\ u(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t} = 0 & (8.103d) \end{cases}$$

将(8.98)在 Ω 上进行积分，得到

$$\int_\Omega \partial_t e_u \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}(u_t\nabla u)\mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega e_u \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}(u_t\nabla u)\mathrm{d}x = 0$$

记

$$E_u(t) = \int_\Omega e_u(x,t)\mathrm{d}x$$

由散度定理得

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u_t\nabla u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u_t(\nabla u\cdot\vec{n})\mathrm{d}S$$

由已知条件，$u(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t} = 0$，也就是任意选定 $x_0\in\partial\Omega$，$u(x_0,t)$ 在 t 的方向上取值恒为常值 0，因此关于 t 求偏导当然为零，即 $u_t(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t} = 0$. 又由于 $\nabla u\cdot\vec{n}$ 是有界量，所以上式为零，进而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_u(t) = 0$$

因此

$$E_u(t) = E_u(0) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right)\mathrm{d}x$$

注记. 稍微总结一下上面两种情况就是，当非齐次项为零的时候，如果我们考虑 $\mathbb{R}^3$ 内的能量，那么它是守恒的；如果我们考虑某个开集 Ω 内的能量，若 $u(x,t)$ 限制在 $\partial\Omega$ 上恒为零，那么能量也是守恒的.

利用能量守恒定律证明解的唯一性

定理 8.6.1. *波动方程初边值问题*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u\big|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)} = 0 \end{cases}$$

的解存在则唯一.

证明. 设 u_1, u_2 是两个解，令 $w = u_1 - u_2$，则

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \\ w(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t} = 0 \end{cases}$$

由能量守恒定律，有

$$E_w(t) = E_w(0) = 0$$

这推出

$$w_t = 0, w_{x_i} = 0$$

所以有

$$w(x,t) = w(x,0) = 0$$

即

$$u_1 \equiv u_2.$$

□

8.6.2 非齐次项不为零

$E_u(t)$ 的估计

考虑非齐次的波方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & (8.104a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (8.104b) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & (8.104c) \\ u\big|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)} = 0 & (8.104d) \end{cases}$$

在(8.104a)两边同乘 u_t，可得

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) - \mathrm{div}(u_t\nabla u) = fu_t$$

将上式在 Ω 上积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_u(t)=\int_\Omega fu_t\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\frac{1}{2}\left(f^2+u_t^2\right)\mathrm{d}x\leqslant E_u(t)+\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x$$

即

$$E_u'(t)-E_u(t)\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x$$

左右同乘 e^{-t}，得到

$$\left(E_u(t)\mathrm{e}^{-t}\right)'\leqslant\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-t}$$

两边从 0 到 t 积分得，

$$E_u(t)\mathrm{e}^{-t}-E_u(0)\leqslant\int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$$

移项整理得

$$\begin{aligned}E_u(t)\leqslant&\mathrm{e}^t\left[E_u(0)+\int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\right]\\\leqslant&\mathrm{e}^t\left[E_u(0)+\int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right]&&\mathrm{e}^{-s}<1,0<s<t\\\leqslant&\mathrm{e}^T\left[E_u(0)+\int_0^T\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right]\\=&\mathrm{e}^T\left(E_u(0)+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)\\=&\mathrm{e}^T\left(E_u(0)+\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)\\\leqslant&\mathrm{e}^T\left(E_u(0)+\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)\end{aligned}$$

$\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$ 的估计

设

$$E_0(t)=\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t)=&\int_\Omega 2uu_t\mathrm{d}x\\\leqslant&\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+\int_\Omega u_t^2\mathrm{d}x\\\leqslant&E_0(t)+E_u(t)\\\leqslant&E_0(t)+\mathrm{e}^T\left(E_u(0)+\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t)-E_0(t)\leqslant\mathrm{e}^T\left(E_u(0)+\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)$$

注意到上式右侧已经是一个与 t 无关的常数，记为 C.
两侧同乘 e^{-t}，得到

$$\left(E_0(t)\mathrm{e}^{-t}\right)'\leqslant C\mathrm{e}^{-t}$$

从 0 到 t 进行积分，得

$$E_0(t)\mathrm{e}^{-t} - E_0(0) \leqslant C\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$$

移项整理得

$$\begin{aligned} E_0(t) \leqslant & \mathrm{e}^t \left(E_0(0) + C\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\right) \\ \leqslant & \mathrm{e}^t \left(E_0(0) + C\right) \\ \leqslant & \mathrm{e}^T \left[E_0(0) + \mathrm{e}^T \left(E(u(0)) + \|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)\right] \\ \leqslant & \mathrm{e}^{2T} \left(E_0(0) + E(u(0)) + \|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right) \end{aligned}$$

利用能量估计证明解的稳定性

定理 8.6.2. *波动方程(**??**)的解 $u(x,t)$ 在下述意义下关于初值 φ,ψ 和非齐次项 f 是稳定的.*

对 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\eta > 0$，只要 $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2,f_1,f_2$ 满足

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \eta, \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \eta$$

$$\|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2\| \leqslant \eta, \|f_1 - f_2\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leqslant \eta$$

则以 φ_1,ψ_1 为初值，f_1 为非齐次项的解 u_1 和以 φ_2,ψ_2 为初值，f_2 为非齐次项的解 u_2 的差在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上满足

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon, \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon$$

$$\|\partial_t u_1 - \partial_t u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon$$

证明. 令 $w = u_1 - u_2$，则

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = f_1 - f_2 & (8.105\mathrm{a}) \\ w(x,0) = \varphi_1 - \varphi_2 & (8.105\mathrm{b}) \\ \partial_t w(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x) & (8.105\mathrm{c}) \\ w(x,0)|_{\partial\Omega} = 0 & (8.105\mathrm{d}) \end{cases}$$

由能量估计，

$$\begin{aligned} & \int_\Omega w^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{2}w_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2\mathrm{d}x \\ \leqslant & C_T\left(\int_\Omega w^2(x,0)\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{2}w_t^2(x,0) + \frac{1}{2}|\nabla w(x,0)|^2\mathrm{d}x + \|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right) \\ = & C_T\left(\int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)^2\mathrm{d}x + \int\left(\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2|^2\right)\mathrm{d}x + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right) \\ \leqslant & C_T\left(\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \eta^2\right) \\ \leqslant & \varepsilon \end{aligned}$$

□

接下来要做的事情用一句话概括就是，初态具有的能量等于末态具有的能量加上过程中流失的能量. 恕在下暂时画不出来锥台的图. 我们记锥台的底面为 B，锥台的顶为 T，锥台的侧面为 K.

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

$$u_t u_{tt} - u_t \Delta u = 0$$

将上式在锥台内进行体积分，注意，锥台是三维空间加上一维时间总共四维空间中的一个几何体.

$$\int_{\text{锥台}} u_t u_{tt} - u_t \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

如前变形得

$$\int_{\text{锥台}} \partial_t e(u) - \operatorname{div}(u_t \nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{\text{锥台}} \operatorname{div}_{t,x}(e(u), -u_t \nabla u) = 0$$

由散度定理得

$$\int_{B\cup T\cup K} (e(u), -u_t \nabla u)\cdot \vec{n}\mathrm{d}S = 0$$

易知 B 的单位外法向是 $(-1,0,0,0)$，T 的单位外法向是 $(1,0,0,0)$，所以有

$$\int_B -e(u)(x,0)\mathrm{d}x + \int_T e(u)(x,t)\mathrm{d}x + \int_K (e(u), -u_t\nabla u)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = 0$$

侧面的表达式为

$$\varphi(x,t) = -|t-t_0|^2 + |x-x_0|^2$$

那么单位外法向为

$$\vec{n} = \frac{\nabla_{x,t}\varphi}{|\nabla_{x,t}\varphi|} = \pm\left(-\frac{t-t_0}{\sqrt{2}|t-t_0|}, \frac{x-x_0}{\sqrt{2}|x-x_0|}\right)$$

所以有

$$\int_B -e(u)(x,0)\mathrm{d}x + \int_T e(u)(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_K e(u) + (-u_t\nabla u)\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S = 0$$

而

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_K e(u) + (-u_t\nabla u)\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_K u_t^2 + |\nabla u|^2 - 2u_t\nabla u\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_K \left(u_t - \frac{x-x_0}{|x-x_0|}\cdot\nabla u\right)^2 + \left(|\nabla u|^2 - (\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\cdot\nabla u)^2\right)\mathrm{d}S\\
\geqslant&0
\end{aligned}$$

记

$$Flux(0,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_K e(u) + (-u_t\nabla u)\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S$$

则有

$$\frac{1}{2}\int_B \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right)(0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_T \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right)(t)\mathrm{d}x + Flux(0,t)$$

8.7 习题

1. 解方程

(1)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & t > 0, x > 0 & (8.106a) \\ u(x,0) = x & x \geqslant 0 & (8.106b) \\ u_t(x,0) = 0 & x \geqslant 0 & (8.106c) \\ u(0,t) = t^2 & t \geqslant 0 & (8.106d) \end{cases}$$

解. 将初值条件延拓为 $u(x,0) = \Phi(x), u_t(x,0) = \Psi(x)$，由达朗贝尔公式，

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(s)\mathrm{d}s$$

$$u(0,t) = \frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \Psi(s)\mathrm{d}s = t^2, t \geqslant 0$$

不妨对 $\Psi(x)$ 作零延拓，此时上式变为

$$\Phi(-at) = 2t^2 - at, t \geqslant 0$$

因此当 $x < 0$ 时，令

$$\Phi(x) = \frac{2}{a^2}x^2 + x$$

所以最后结果为

$$u(x,t) = \begin{cases} x & x \geqslant at \\ \dfrac{1}{a^2}x^2 + \left(1 - \dfrac{2t}{a}\right)x + t^2 & x < at \end{cases}$$

□

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2xt & t > 0, x \in \mathbb{R} & (8.107a) \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} & (8.107b) \\ u_t(x,0) = \sin 2x & x \in \mathbb{R} & (8.107c) \end{cases}$$

解. 拆成两个方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} & (8.108a) \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} & (8.108b) \\ u_t(x,0) = \sin 2x & x \in \mathbb{R} & (8.108c) \end{cases}$$

由达朗贝尔公式，

$$u(x,t) = \frac{(x-at)^2 + (x+at)^2}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin 2s\mathrm{d}s = x^2 + a^2t^2 + \frac{1}{2a}\sin 2x \sin 2at$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2xt & t > 0, x \in \mathbb{R} & (8.109a) \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} & (8.109b) \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} & (8.109c) \end{cases}$$

由齐次化原理，考虑

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0 \quad t > \tau, x \in \mathbb{R} & (8.110a) \\ W(x,\tau) = 0 & (8.110b) \\ W_t(x,\tau) = 2x\tau & (8.110c) \end{cases}$$

解得

$$W(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} 2s\tau \mathrm{d}s = -2x\tau^2 + 2xt\tau$$

那么

$$u(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}xt^3$$

所以最终结果为

$$u(x,t) = \frac{1}{3}xt^3 + x^2 + a^2t^2 + \frac{1}{2a}\sin 2x \sin 2at$$

□

2. 求解三维波方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^3 - \{0\} & (8.111a) \\ u(x,0) = 0 & (8.111b) \\ u_t(x,0) = 0 & (8.111c) \\ \lim\limits_{r\to 0} 4\pi r^2 u_r(r,t) = g(t) & (8.111d) \end{cases}$$

的轴对称解 $u = u(r,t)$，其中 g 满足 $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.

3. 设 a,b,h,l 为正常数，并且 $b < l$. 用分离变量法求如下初边值问题的形式解 $u = u(x,t)$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad t > 0, 0 < x < l & (8.112a) \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{h}{b}x & 0 \leqslant x \leqslant b \\ \dfrac{h}{l-b}(l-x) & b \leqslant x \leqslant l \end{cases} & (8.112b) \\ u_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < l & (8.112c) \\ u(0,t) = 0 & (8.112d) \\ u(l,t) = 0 & (8.112e) \end{cases}$$

证明. 设有非平凡解

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入得

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

考虑

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

当 $\lambda < 0$ 时，通解为

$$X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

代入初值条件解得 $C_1 = C_2 = 0$，这是平凡解.

当 $\lambda = 0$ 时，通解为

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

代入初值条件解得 $C_1 = C_2 = 0$，这是平凡解.

当 $\lambda > 0$ 时，通解为

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

代入初值条件解得 $C_1 = 0, \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \cdots$

得到一组基

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, k = 1, 2, \cdots$$

将得到的 λ_k 代入到 $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$ 中，得

$$T''(t) + a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

解得

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t$$

构造

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{l}x\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)$$

代入初值条件有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \begin{cases} \frac{h}{b}x & 0 \leqslant x \leqslant b \\ \frac{h}{l-b}(l-x) & b \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

$$B_k = 0, k = 1, 2, \cdots$$

□

4. 设 $u = u(x,t)$ 是如下初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f_x(x) & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(x,0) = h(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

的光滑解，其中 f, g, h 都是光滑函数且满足 $h(0) = h(1) = 0$.

1. 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \left(u_x^2 + u_t^2\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f_x(x)u_t\mathrm{d}x$$

证明.

$$u_tu_{tt} - u_tu_{xx} = f_x(x)u_t$$

对 x 在 $[0,1]$ 上积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 (u_t)^2\mathrm{d}x - \int_0^1 u_tu_{xx}\mathrm{d}x = \int_0^1 f_x(x)u_t\mathrm{d}x$$

分部积分，得

$$\int_0^1 u_tu_{xx}\mathrm{d}x = (u_tu_x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_{tx}u_x\mathrm{d}x$$

□

6. 设 $u = u(x,t)$ 为三维波方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u(x,0) = f \\ u_t(x,0) = g & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解，其中 $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. 定义

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t(x,t)|^2\mathrm{d}x, t > 0$$

$$P(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x u(x,t)|^2\mathrm{d}x, t > 0$$

证明：

1. $K(t) + P(t)$ 是关于 $t > 0$ 的常值函数.

   证明. 在 $u_{tt} - \Delta u = 0$ 两侧同乘 u_t，得到

   $$u_t\frac{\partial u_t}{\partial t} - u_t\Delta u = \frac{1}{2}\partial_t(u_t)^2 - u_t\Delta u = 0$$

   在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，得到

   $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} u_t\Delta u\mathrm{d}x = 0$$

   分部积分，得

   $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_t \cdot \nabla u\mathrm{d}x = 0$$

   而

   $$\nabla u_t \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n u_{tx_i}u_{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\partial_t(u_{x_i})^2 = \frac{1}{2}\partial_t|\nabla u|^2$$

   因此上式变为

   $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\mathrm{d}x = 0$$

   得证！ □

2. $$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K(t)\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t$$

Chapter 9

热传导方程 (扩散方程)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & (9.1a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (9.1b) \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = \mu(x,t) & (9.1c) \end{cases}$$

9.1 分离变量法

注记. 拉普拉斯算子配上迪利克雷边值只有在**有界**区域上才有离散谱，这样才能用分离变量法

9.1.1 dim=1

例 9.1.1. 用分离变量法求解如下的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad t > 0, 0 < x < l \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = 0 \\ (u_x + hu)(l,t) = 0 \end{cases}$$

其中 h 为正常数.

证明. 令

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

把它代入方程，得到

$$XT' = a^2 X'' T,$$

即

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

这等式只有在两边均等于常数时才成立. 令此常数为 $-\lambda t$，则有

$$T' + \lambda a^2 T = 0,$$

$$X'' + \lambda X = 0.$$

$X(x)$ 应当满足边界条件

$$X(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0.$$

1. 当 $\lambda \leqslant 0$ 时，只有平凡解 $X \equiv 0$.

2. 当 $\lambda > 0$ 时，

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

利用边界条件 $X(0)=0$，得 $A=0$. 于是由第二个边界条件得到

$$B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

为使 $X(x)$ 为非平凡解，λ 应满足

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

即 λ 应是下述超越方程的正根：

$$\tan\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.$$

令 $v = \sqrt{\lambda}l$，则上式变为

$$\tan v = -\frac{v}{lh}.$$

作图知，该方程有可列无穷多个正根 $v_k > 0 (k = 1, 2, \cdots)$，满足 $(k - \frac{1}{2})\pi < v_k < k\pi$. 因此存在着无穷多个固有值

$$\lambda_k = \left(\frac{v_k}{l}\right)^2, k = 1, 2, \cdots$$

及相应的固有函数

$$X_k(x) = B_k \sin\sqrt{\lambda_k}x = B_k \sin\frac{v_k}{l}x, k = 1, 2, \cdots$$

把 $\lambda = \lambda_k$ 代入到关于 T 的方程，可解得

$$T_k(t) = C_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}, k = 1, 2, \cdots$$

构造级数形式的解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

下面来决定常数 A_k，使得它满足初值条件

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

为确定系数 A_k，须先证明固有函数系 $\{X_k\} = \left\{\sin\sqrt{\lambda_k}x\right\}$ 在 $[0, l]$ 上正交. 设固有函数 X_n 和 X_m 分别对应于不同的固有值 λ_n 和 λ_m，即

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0, X_m'' + \lambda_m X_m = 0.$$

以 X_m 和 X_n 分别乘上面第一式和第二式，得到

$$X_m X_n'' + \lambda_n X_m X_n = 0,$$

$$X_nX_m'' + \lambda_m X_m X_n = 0.$$

两式相减后在 $[0,l]$ 上积分，有

$$\int_0^l X_mX_n'' - X_nX_m''\mathrm{d}x + (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_nX_m\mathrm{d}x = 0.$$

结合边界条件，有

$$\int_0^l X_mX_n'' - X_nX_m''\mathrm{d}x = (X_nX_m' - X_mX_n')\Big|_0^l = 0.$$

因此

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_nX_m\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $\lambda_n \neq \lambda_m$，我们得到固有函数系的正交性

$$\int_0^l X_nX_m\mathrm{d}x = \int_0^l \sin\sqrt{\lambda_n}x\sin\sqrt{\lambda_m}x\mathrm{d}x = 0, n \neq m.$$

记

$$\begin{aligned}
M_k &= \int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_k}x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^l \frac{1-\cos 2\sqrt{\lambda_k}x}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{l}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_k}l}{4\sqrt{\lambda_k}} \\
&= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}}{\sin^2\sqrt{\lambda_k}+\cos^2\sqrt{\lambda_k}} \\
&= \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_k}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_k}l} \\
&= \frac{l}{2} - \frac{-\dfrac{v_k}{lh}}{2\dfrac{v_k}{l}\left(1+\dfrac{v_k^2}{l^2h^2}\right)} \\
&= \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_k)}
\end{aligned}$$

于是

$$A_k = \frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\mathrm{d}\xi.$$

得到形式解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

□

例 9.1.2 (dim=1)**.**

$$\begin{cases}
u_t = a^2u_{xx} + f(x,t) & 0 < x < l, t > 0 \quad (9.2a)\\
u(x,0) = \varphi(x) & 0 \leqslant x \leqslant l \quad (9.2b)\\
u_x(0,t) = 0 & (9.2c)\\
u_x(l,t) = 0 & (9.2d)
\end{cases}$$

注记. x 的取值范围的等号与不等号，貌似还有点讲究.

解. 考虑对应的齐次方程

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{9.3}$$

设

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{9.4}$$

代入方程(9.3)，得到

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \tag{9.5}$$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{9.6}$$

先考虑

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (9.7a) \\ X'(0) = 0 & (9.7b) \\ X'(l) = 0 & (9.7c) \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时，解得

$$X(x) = C_1 x + C_2 \tag{9.8}$$

代入初值(9.7b)和(9.7c)，得

$$X(x) = C \tag{9.9}$$

当 $\lambda > 0$ 时，解得

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \tag{9.10}$$

则

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \tag{9.11}$$

代入初值(9.7b)和(9.7c)，得

$$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X'(l) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = k\pi \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2\cdots$$

将上述两种情况合并，我们得到固有函数系

$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x, k = 0, 1, 2\cdots \tag{9.12}$$

将 $u(x,t), f(x,t), \varphi(x)$ 在这组完备正交基下分解，得到

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{9.13}$$

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{9.14}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{9.15}$$

其中

$$f_k(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\mathrm{d}x & k=0 \quad (9.16a)\\ \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x & k>0 \quad (9.16b)\end{cases}$$

$$\varphi_k=\begin{cases}\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x & k=0 \quad (9.17a)\\ \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x & k>0 \quad (9.17b)\end{cases}$$

带入到方程(9.2a)和(9.2b)得到

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}g_k'(t)\cos\frac{k\pi}{l}x+\sum_{k=0}^{\infty}a^2g_k(t)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\cos\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x & (9.18a)\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}g_k(0)\cos\frac{k\pi}{l}x=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\cos\frac{k\pi}{l}x & (9.18b)\end{cases}$$

对应系数相等，有

$$\begin{cases}g_k'(t)+\left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2 g_k(t)=f_k(t) & (9.19a)\\ g_k(0)=\varphi_k & (9.19b)\end{cases}$$

解得

$$g_k(t)=\exp\left(-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t\right)\varphi_k+\int_0^t\exp\left(-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2(t-s)\right)f_k(s)\mathrm{d}s \tag{9.20}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{9.21}$$

□

9.1.2 圆形域

例 9.1.3 (圆形域上的热传导方程).

$$\begin{cases}\partial_t u=\Delta u & (9.22a)\\ u(x,0)=\varphi(x) & (9.22b)\\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0 & (9.22c)\end{cases}$$

其中 $\Omega=\left\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2<1\right\}$，$u$ 定义在 $\overline{\Omega}$ 上.

解. 令

$$u(\mathbf{x},t)=X(\mathbf{x})T(t) \tag{9.23}$$

则

$$X(\mathbf{x})T'(t)=\Delta X(\mathbf{x})T(t) \tag{9.24}$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{\Delta X}{X}=-\lambda \tag{9.25}$$

先考虑

$$\begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0 & (9.26a) \\ X(x)\big|_{|\mathbf{x}|=1} = 0 & (9.26b) \end{cases}$$

用极坐标 (r, θ)，得到

$$\partial_r^2 X + \frac{1}{r}\partial_r X + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 X + \lambda X = 0 \tag{9.27}$$

令

$$X(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{9.28}$$

则

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \lambda R\Theta = 0 \tag{9.29}$$

式子两边同除 $R(r)\Theta(\theta)$，整理得

$$\frac{r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu \tag{9.30}$$

先考虑

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0 & (9.31a) \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) & (9.31b) \end{cases}$$

当 $\mu < 0$ 时，易验证无法满足条件(9.31b).
当 $\mu = 0$ 时，可写出通解为

$$\Theta(\theta) = C_1\theta + C_2 \tag{9.32}$$

要想以 2π 为周期，Θ 只能是常值函数 C.
当 $\mu > 0$ 时，可写出通解为

$$\Theta(\theta) = A\cos\sqrt{\mu}\theta + B\sin\sqrt{\mu}\theta \tag{9.33}$$

要想让 Θ 以 2π 为周期，2π 必须是它的最小正周期 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ 的正整数倍.
所以 $\mu = 1^2, 2^2, \cdots$
再转到

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \mu)R = 0 \tag{9.34}$$

现在它是

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0 \tag{9.35}$$

为了将它变为贝塞尔方程，作变量代换

$$r = c^{-1}\rho \tag{9.36}$$

则

$$R_r = cR_\rho, R_{rr} = c^2R_{\rho\rho} \tag{9.37}$$

代入得

$$\rho^2R'' + \rho R' + \left(\frac{\lambda\rho^2}{c^2} - n^2\right)R = 0 \tag{9.38}$$

取 $c=\sqrt{\lambda}$，得到

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(\rho^2 - n^2\right) R = 0 \tag{9.39}$$

$$\begin{cases} \rho^2\tilde{R}'' + \rho\tilde{R}' + (\rho^2 - n^2)\tilde{R} = 0 & (9.40a) \\ \tilde{R}(\sqrt{\lambda}) = 0 & (9.40b) \end{cases}$$

$$\tilde{R}(\rho) = J_n(\rho)$$

由贝塞尔函数理论，我们知道 $J_n(\rho)$ 有无穷多个非负简单零点 $\mu_1^n, \mu_2^n \cdots$，所以 $\sqrt{\lambda} = \mu_m^n, \lambda_m = (\mu_m^n)^2$

$$R(r) = \tilde{R}(\rho) = J_n(\mu_m^n r)$$

再转到

$$T'(t) + (\mu_m^n)^2 T(t) = 0 \tag{9.41}$$

解得

$$T(t) = \exp\left(-(\mu_m^n)^2 t\right) \tag{9.42}$$

设

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-(\mu_m^n)^2 t\right) J_n(\mu_m^n r)(A_m^n \cos n\theta + B_m^n \sin n\theta) \tag{9.43}$$

带入到初值条件(9.22b)，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} J_n(\mu_m^n r)(A_m^n \cos n\theta + B_m^n \sin n\theta) = \varphi(x) \tag{9.44}$$

“计算”得，

$$A_m^n = \varphi_m^n, B_m^n = \psi_m^n \tag{9.45}$$

注记. 理论上能够进行这样的计算的原因是

1. $\cos n\theta, \sin n\theta$ 是 $L^2(0,2\pi)$ 中的完备正交系.

2.
$$\int_0^1 x J_n(\mu_m^n x) J_n(\mu_k^n x) \mathrm{d}x = \delta_{mk}$$

□

9.1.3 习题

例 9.1.4. 用分离变量法求解热传导方程的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0, 0<x<1 & (9.46a) \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0<x\leqslant\frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases} & & (9.46b) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t>0 & (9.46c) \end{cases}$$

证明. 第一步，看是否是有限区间，若是有限区间，则可以考虑用分离变量法求解.

第二步，看边值类型.

设

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

则有

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$
$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

考虑

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (9.47\text{a}) \\ X(0) = 0 & (9.47\text{b}) \\ X(l) = 0 & (9.47\text{c}) \end{cases}$$

解得非平凡解

$$X_k(x) = \sin k\pi x, \lambda = k^2\pi^2, k = 1, 2, \cdots$$

再考虑

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

解得

$$T_k(t) = \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t}$$

因此可设

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x$$

由初值条件有

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x = \varphi(x)$$

□

例 9.1.5 (P56,2-2-6). 半径为 a 的半圆形平板，其表面绝热，在板的圆周边界上保持常温 u_0，而在直径边界上保持常温 u_1，求圆板稳恒状态的温度分布.

证明. □

9.2 柯西问题

9.2.1 解的导出

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

关于 x 作 Fourier 变换，可得

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + 4\pi^2 a^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

注记. 这样我们就消灭掉了所有关于 x 的偏导，就把 PDE 变成了 ODE！

左右同乘 $\exp(4\pi a^2|\xi|^2 t)$，得到

$$\left(\hat{u}(\xi,t)\exp(4\pi a^2|\xi|^2 t)\right)' = \exp(4\pi a^2|\xi|^2 t)\hat{f}(\xi,t)$$

从 0 到 t 进行积分，得

$$\hat{u}(\xi,t)\exp(4\pi a^2|\xi|^2 t) - \hat{u}(\xi,0) = \int_0^t \exp(4\pi a^2|\xi|^2\tau)\hat{f}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau$$

整理得

$$\hat{u}(\xi,t) = \exp\left(-4\pi^2 a^2|\xi|^2 t\right)\hat{\varphi}(\xi) + \int_0^t \exp\left(-4\pi^2 a^2|\xi|^2(t-\tau)\right)\hat{f}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau$$

作 Fourier 逆变换，得到

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left(-4\pi^2 a^2|\xi|^2 t\right)\right) * \varphi(x) + \int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left(-4\pi^2 a^2|\xi|^2(t-\tau)\right)\right) * f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\pi|x|^2} &\to \mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2} \\ \mathrm{e}^{-\pi|\delta x|^2} &\to \delta^{-n}\mathrm{e}^{-\pi|\delta^{-1}\xi|^2} \\ \delta^n\mathrm{e}^{-\pi|\delta x|^2} &\to \mathrm{e}^{-\pi|\delta^{-1}\xi|^2} \end{aligned}$$

取

$$\delta^2 = \frac{1}{4\pi a^2 t}$$

则有

$$\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right) \to \exp\left(-4\pi^2 a^2|\xi|^2 t\right)$$

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}\right)\varphi(y)\mathrm{d}y \\ &+ \int_0^t \frac{1}{(4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

9.2.2 解的性质

无限传播速度

若 $f \equiv 0$，则

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}\right) \varphi(y) \mathrm{d}y$$

若 φ 具有紧支集，并且在它的支集上大于零. 那么由上式可以看到，对任意的 $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$，都有 $u(x,t) > 0$，这意味着热的无限传播速度！

基本解

称

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$$

为热传导方程的基本解（Fundamental solution）. 任意的解都可以写成基本解与初值条件卷积的形式

$$u(x,t) = (K_t * \varphi)(x).$$

9.3 极值原理，定解问题解的唯一性和稳定性

如果物体的边界温度及其初始温度都不超过某值 M，而且物体内部没有热源，则这物体内就不可能产生大于 M 的温度.

注记. 热传导方程的边值条件有点像大物实验里的控温仪，我就能让时刻 t 时边界处的值是我给定的值.

定义

$$R_T = \{(x,t) : \alpha \leqslant x \leqslant \beta, 0 \leqslant t \leqslant T\}$$
$$\Gamma_T = [\alpha, \beta] \times \{t = 0\} \cup \{x = \alpha\} \times [0, T] \cup \{x = \beta\} \times [0, T]$$

定理 9.3.1 (极值原理)**.** 设 $u(x,t)$ 在矩形 R_T 上连续，且在其内部 R_T° 满足热传导方程

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$

则 u 在抛物边界 Γ_T 达到最大值和最小值.

证明. 只证 u 可以在 Γ_T 上达到最大值. 对于最小值的情形，只需要考虑 $-u$，它满足相同的热传导方程，其最大值对应着 u 的最小值.

用反证法，假设 u 不能在 Γ_T 上达到最大值.

则

$$m := \max_{\Gamma_T} u < M := \max_{R_T} u$$

1. 设 $u(x,t)$ 在点 $(x_0, t_0) \in R_T^\circ$ 达到最大值，则该点的一阶偏导数等于零，二阶偏导数**小于等于**零，即

$$u_t(x_0, y_0) = 0, u_x(x_0, t_0) = 0,$$
$$u_{tt}(x_0, t_0) \leqslant 0, u_{xx}(x_0, t_0) \leqslant 0.$$

注记. 在这里我们没能导出矛盾. 没能导出矛盾的原因是，虽然 u 在内部取到最大值要求了 $u_t - u_{xx}\big|_{(x_0,t_0)} \geqslant 0$，但是由于 u 满足 Laplace 方程，有 $u_t - u_{xx}\big|_{(x_0,t_0)} = 0$，大于等于零和等于零并不矛盾. 这让我们想到，如果给 u 增添一个修正项，使得新得到的函数仍在内部取得最大值，但不再满足 Laplace 方程，最好有 $v_t - v_{xx} < 0$，这样我们就能够导出矛盾. 我们能这样做的原因是边界上的最大值**严格**小于内部的最大值，因此它们之间有一段差，这段差就允许了我们的操作.

增添一个什么样的修正项好呢？首先越简单越好.

增添一个关于 x 的一阶项肯定是不行的，求两次导之后就没了，还是满足 Laplace 方程；考虑构造关于 x 的两阶项，对于两阶项，它恒正或恒负，正的求两次导后还正，负的求两次导后还负，按照我们的要求，我们应该希望它求两次导后还正，这样减去后就负了.

接下来还要希望加上这项后，仍能有边界上的最大值小于内部的最大值，重申一遍，我们能这样做的原因是边界上的最大值**严格**小于内部的最大值，因此它们之间有一段差，这段差就允许了我们的操作.

你要是想加一个开口向上的二次项，那肯定对称轴那里值没动，离对称轴越远值涨的越多. 那么，边界点增加的值肯定比内部点增加的值更多，但没关系，由于我们是一个有限区间，所以

边界到对称轴的距离是有界的，大不了就是区间长度，我们总可以通过调整二次项前面的系数，将边界上增加的值压低到小于 M 与 m 的差，这样就保证了增添这一项之后仍然在内部取到最大值.

有一点需要注意，之前内部的最大值点在加上修正项之后不一定仍是最大值点，但是这没有关系. 其实我只需要知道内部存在一个点大于边界上的所有点就好了，这样就说明了能在内部取到最大值.

如果增添一个关于 t 的项呢?

先考虑一阶项，它的系数肯定得是负的，这是为了让 $v_t - v_{xx}$ 在矩形内部严格小于零；一阶项不恒正也不恒负，我们将零点也选在之前的内部最大值点处，那么有一侧的效果是让值减小，另一侧的效果是让值增大，让值减小的那一侧肯定就不用考虑了，仍满足边界值小于之前的内部最大值点的值，让值增大的那一侧，只要我们依旧调整一次项前边的系数，使它增得不会太厉害就好了. 这样看来增添一个关于 t 的项似乎也无不可啊!

令

$$v = u + \frac{M-m}{4L^2}(x-x_0)^2, L = \beta - \alpha.$$

在抛物边界 Γ_T 上，

$$|v(x,t)| \leqslant m + \frac{M-m}{4} = \frac{M+3m}{4} < M$$

在内部

$$v(x_0,t_0) = M$$

因此

$$\max_{\Gamma_T} v(x,t) < v(x_0,t_0) \leqslant \max_{R_T} v$$

所以可以断定 v 在内部取得矩形上的最大值.

设 v 在 $(x_1,t_1) \in R_T^\circ$ 达到最大值，则有

$$v_t(x_1,t_1) = 0, v_{xx}(x_1,t_1) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow \left(v_t - a^2 v_{xx}\right)\big|_{(x_1,t_1)} \geqslant 0$$

但

$$v_t - a^2 v_{xx} = u_t - a^2 u_{xx} - a^2\frac{M-m}{2L^2} = -a^2\frac{M-m}{2L^2} < 0$$

矛盾!

2. 设 $u(x,t)$ 在点 $(x_0,t_0) \in [\alpha,\beta] \times \{T\}$ 处达到最大值，则

$$u_t(x_0,t_0) \geqslant 0, u_x(x_0,t_0) = 0, u_{xx}(x_0,t_0) \leqslant 0$$

$\square$

定理 9.3.2 (Dirichlet 边值，唯一性和稳定性). 热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f & 0 < x < l \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

在区域 R_T 上解是唯一的，而且连续依赖于在 Γ_T 上给定的初、边值条件.

证明.

1. 唯一性

   如果 u_1, u_2 是两个不同的解，令 $w = u_1 - u_2$，则 w 满足的方程是

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \\ w(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \\ w(0,t) = 0 & 0 \leqslant t \leqslant T \\ w(l,t) = 0 & 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

   在 $R_T = [0,l] \times [0,T]$ 上用极值原理，可得 $w(x,t)$ 在 R_T 上的最大值和最小值都在抛物边界上取到.

   由于 $w\big|_{\Gamma_T} = 0$，所以 w 在 R_T 上恒为零.

2. 稳定性

   如果 $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} |\varphi(x)| + \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} (|\mu_1(t)| + |\mu_2(t)|) < \varepsilon$，则由极值原理，

$$\max_{R_T} u(x,t) = \max_{\Gamma_T} u(x,t) < \varepsilon$$

   类似

$$\min_{R_T} u(x,t) > -\varepsilon$$

$$|u(x,t)| < \varepsilon, \forall (x,t) \in R_T$$

□

定理 9.3.3 (Robin 边值，唯一性和稳定性). 热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ (u_x + hu)(l,t) = \mu_2(t) & h > 0 \end{cases}$$

在区域 R_T 上解是唯一的，而且连续依赖于在 Γ_T 上给定的初、边值条件.

证明.

1. 唯一性

   只要证明

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ (u_x + hu)(l,t) = 0 \end{cases}$$

   只有零解.

   设存在非零解 u 在 R_T 上能达到正的最大值或负的最小值，若不然，最大值非正且最小值非负，这迫使 u 就是零解.

   不失一般性，我们假设它能达到正的最大值，由极值原理，这个正的最大值能够在抛物边界 Γ_T 上达到.

   由于在 $\{x=0\}\times[0,T]\cup[0,l]\times\{t=0\}$ 上 $u\equiv 0$，所以这个最大值只能在某点 $(l,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$ 处达到，因此

$$u_x(l,t_0) \geqslant 0.$$

   但这就推出 $(u_x+hu)(l,t_0)>0$，与 $(u_x+hu)(l,t_0)=0$ 矛盾！5

2. 稳定性

   设 u 在 R_T 上达到正的最大值，则存在 $(x_0,t_0)\in\Gamma_T$ 使得 u 在 (x_0,t_0) 的值就是 u 在 R_T 上的最大值.

   (a) $(x_0,t_0)\in\{x=0\}\times[0,T]\cup[0,l]\times\{t=0\}$，则 $M=\max\left\{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant L}\varphi(x), \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_1(t)\right\}$

   (b) $(x_0,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$ 则 $u_x(x_0,t_0)\geqslant 0$，故 $hu(x_0,t_0)\leqslant\mu_2(t)$ 故 $u(x,t)\leqslant u(x_0,t_0)\leqslant \dfrac{1}{h}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_2(t)$

$$\forall(x,t)\in R_T, u(x,t)\leqslant\max\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant L}\varphi(x), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_1(t), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{\mu_2(t)}{h}\right\}$$

□

定理 9.3.4 (唯一性和稳定性，Neumann 边值). 热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f \quad 0<x<l, h>0 & (9.48a) \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad 0<x<l & (9.48b) \\ u(0,t) = \mu_1(t) & (9.48c) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) & (9.48d) \end{cases}$$

证明.

1. 唯一性

只要证明

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, h > 0 \quad (9.49a) \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < l \quad (9.49b) \\ u(0,t) = 0 & \quad (9.49c) \\ u_x(l,t) = 0 & \quad (9.49d) \end{cases}$$

只有零解.

令 $\tilde{u}(x,t) = w(x)u(x,t)$，其中 $w(x) = l + 1 - x$ 则

$$\begin{aligned} u &= \frac{\tilde{u}}{w} \\ u_t &= \frac{\tilde{u}_t}{w} \\ u_x &= \frac{\tilde{u}_x}{w} - \frac{w_x \tilde{u}}{w^2} = \frac{\tilde{u}_x}{w} + \frac{\tilde{u}}{w^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(l,t) &= \tilde{u}_x + \tilde{u} = 0 \\ u_{xx} &= \frac{\tilde{u}_{xx}}{w} + \frac{2\tilde{u}_x}{w} + 2\frac{\tilde{u}}{w^3} \\ \frac{\tilde{u}_t}{w} - a^2 \left(\frac{\tilde{u}_{xx}}{w} + \frac{2\tilde{u}_x}{w^2} + 2\frac{\tilde{u}}{w^3} \right) &= 0 \\ \tilde{u}_t - a^2 \tilde{u}_{xx} &= \frac{2a^2}{w}\tilde{u}_x + \frac{2a^2}{w^2}\tilde{u} \qquad (9.50) \end{aligned}$$

注记. 要用证明极值原理的过程

令

$$v = \mathrm{e}^{-\lambda t}\tilde{u}, \tilde{u} = e^{\lambda t} v$$

代入得

$$e^{\lambda t}(\lambda v + v_t) - a^2 e^{\lambda t} v_{xx} = \frac{2a^2 e^{\lambda t} v_x}{w} + \frac{2a^2 e^{\lambda t} v}{w^2} \qquad (9.51)$$

整理得

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = \dfrac{2a^2}{w} v_x + (\dfrac{2a^2}{w^2} - \lambda) v & (9.52a) \\ v(x,0) = 0 & (9.52b) \\ v(0,t) = 0 & (9.52c) \\ (v + v_x)(l,t) = 0 & (9.52d) \end{cases}$$

断言，如果 v 在 (x_0,t_0) 达到 R_T 上的正的最大值，那么 $(x_0,t_0) \in \Gamma_T$
下证断言. 若不然，设 v 在 $(x_0,t_0) \in R_T^\circ$ 达到最大值.
取 $\lambda > 2a^2$，则 $\dfrac{2a^2}{(l+1-x)^2} \leqslant 2a^2 < \lambda$，于是

$$-a^2 v_{xx} = \left(\frac{2a^2}{w^2} - \lambda \right) v(x_0,t_0) < 0$$

矛盾！断言得证.

如果 $(x_0,t_0)\in[0,l]\times\{t=0\}\cup\{x=0\}\times[0,T]$

若 $(x_0,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$，$v_x(x_0,t_0)\geqslant 0\Rightarrow(v_x+v)(x_0,t_0)>0$，矛盾.

类似可证

$$\min_{R_T} v=0$$

故 $v\equiv 0$，$\tilde{u}\equiv 0$，$u\equiv 0$ □

定理 9.3.5. 柯西问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f & -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$$

在有界函数类中解是唯一的，而且连续依赖于初值条件.

证明.

1. 唯一性

   只要证明

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 & -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=0 \\ |u(x,t)|\leqslant 2B,\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T] \end{cases}$$

   只有零解.

   $\forall(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times[0,T]$，要证 $u(x_0,t_0)=0$ $\forall L>0$, 令 $R_{t_0}=[x_0-L,x_0+L]\times[0,t_0]$

   构造 v 是(**??**)的解. 且 $v|_{\Gamma_{t_0}}\geqslant u|_{\Gamma_{t_0}}$

   观察到可以直接写出一个解

$$a^2t+\frac{x^2}{2}$$

   进而有

$$v(x,t)=C\left(a^2t+\frac{(x-x_0)^2}{2}\right)$$

   也是解

   则

$$v(x,0)=C\frac{(x-x_0)^2}{2}\geqslant 0\Rightarrow C>0$$
$$v(x_0-l,t)=C(a^2t+\frac{L^2}{2})\geqslant 2B$$

   $C\dfrac{L^2}{2}\geqslant 2B$ 取 $v(x,t)=\dfrac{4B}{L^2}\left(a^2t+\dfrac{(x-x_0)^2}{2}\right)$ 于是，$v-u$ 也是方程的解并且 $(v-u)|_{\Gamma_{t_0}}\geqslant 0$

   在 R_{t_0} 上对 $v-u$ 用极值原理，可得

$$\min_{R_{t_0}}=\min_{\Gamma_{t_0}}(v-u)\geqslant 0$$

   故 $v\geqslant u\text{in } R_{t_0}$

   类似地，对 $v+u$ 再用一次上述过程，可知

$$\min_{R_{t_0}}(v+u)=\min_{\Gamma_{t_0}}(v+u)\geqslant 0$$

故 $u \geqslant -v$

因此 $|u(x,t)| \leqslant v(x,t)$

取 (x,t) 就是 (x_0,t_0)，则

$$|u(x_0,t_0)| \leqslant \frac{4B}{L^2}a^2t_0 \leqslant \frac{4Ba^2T}{L^2}, \forall L > 0$$

再让 $L \to \infty$，则 $u(x_0,t_0) = 0$ 由任意性，

$$u \equiv 0$$

2. 稳定性

取

$$v(x,t) = \frac{4B}{L^2}\left(a^2t + \frac{(x-x_0)^2}{2}\right) + \varepsilon$$

例 9.3.1 (谷超豪第三版 P67,3). 导出初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ (u_x + hu)(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 在 $R_T : \{0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l\}$ 中满足的估计.

$$u(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda T}\max\left(0, \max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t), \frac{1}{h}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)\right), \frac{1}{\lambda}\max_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)\right),$$

其中 $\lambda > 0$ 为任意正常数.

证明. 根据提示，作变换 $v = \mathrm{e}^{-\lambda t}u$，即 $u = \mathrm{e}^{\lambda t}v$.

v 是初边值问题

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = \mathrm{e}^{-\lambda t}f - \lambda v \\ v(0,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t) \\ (v_x + hv)(l,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t) \\ v(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解.

下证

$$v(x,t) \leqslant \max\left(0, \max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t), \frac{1}{h}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)\right), \frac{1}{\lambda}\max_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)\right).$$

设 v 在矩形 R_T 上的某点 (x_0,y_0) 处达到矩形上的最大值.

若 $v(x_0,t_0) \leqslant 0$，那么已经成立 $v(x,t) \leqslant 0$.

下面在 $v(x_0,t_0) > 0$ 的前提下讨论 (x_0,t_0) 的位置.

1. 当 $(x_0,t_0) \in [0,l] \times \{t = 0\}$

$$v(x_0,t_0) = \max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x)$$

$$v(x,t) \leqslant v(x_0,t_0) = \max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x), \forall\ (x,t) \in R_T$$

2. 当 $(x_0,t_0)\in\{x=0\}\times[0,T]$

$$v(x_0,t_0)=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t)$$

$$v(x,t)\leqslant v(x_0,t_0)=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t),\forall\ (x,t)\in R_T$$

3. 当 $(x_0,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$，有

$$v_x(l,t_0)\geqslant 0$$

又对任意 $(x,t)\in\{x=l\}\times[0,T]$，有

$$(v_x+hv)(l,t)\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)$$

所以有

$$v(l,t_0)\leqslant\frac{1}{h}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)$$

$$v(x,t)\leqslant v(l,t_0)\leqslant\frac{1}{h}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)$$

4. 当 $(x_0,t_0)\in R_T^{\circ}\cup[0,l]\times\{t=T\}$

有

$$v_t(x_0,t_0)\geqslant 0,v_{xx}(x_0,t_0)\leqslant 0$$

$$(\mathrm{e}^{-\lambda t}f-\lambda v)(x_0,t_0)=(v_t-a^2v_{xx})(x_0,t_0)\geqslant 0$$

$$v(x,t)\leqslant v(x_0,t_0)\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}f\right)(x_0,t_0)\leqslant\frac{1}{\lambda}\max_{R_T}\mathrm{e}^{-\lambda t}f$$

命题得证！ □

注记. 这道题目和我们之前证明唯一性与稳定性都不一样，因为不管是唯一性还是稳定性，你考虑的函数所满足的方程的非齐次项都为零，这样我们才能够使用极值原理（事实上，$f<0$ 也可以）. 所以我们这里绝不是用极值原理来证明.

首先，暂不考虑提示给的变换，我们直接看看能做些什么. 放眼望去，有关 $\varphi(x),\mu_1(t),\mu_2(t)$ 的估计都是我们熟悉的，在有极值原理的时候，我们知道一定在抛物边界上取到最大值，然后用这三个东西控一下就好了；然而，今天我们没有极值原理，这就意味着最大值还有可能出现在矩形的内部或矩形的上边那条边，这种情况该怎么控呢？这正是本题非常值得我们学习的地方，通过作一个变换 $u=\mathrm{e}^{\lambda t}v$，给满足的方程凭空增添出一项 λv，这样我们就希望建立起 v 与 f 的关系，毕竟他们已经出现在了同一个等式中.

我们再来看一下 $u(x,t)$ 的上界估计，当 λ 很小的时候，虽然此时前几项的值都很小，但是 $\dfrac{1}{\lambda}\max\limits_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)$ 的值会炸掉；当 λ 很大时，虽然 $\dfrac{1}{\lambda}\max\limits_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)$ 的值变小的，但是前面的值又炸了，而我们总是取这几项之中的最大值的，这意味着我们必须找一个合适的 λ 来获得比较优的估计.

9.4 能量方法

考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \quad (9.53a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (9.53b) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = g(x,t) & (9.53c) \end{cases}$$

要说明解的唯一性，只要证明

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (9.54a) \\ u(x,0) = 0 & (9.54b) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 & (9.54c) \end{cases}$$

只有零解.

在(9.54a)两侧同乘 u，得到

$$uu_t - u\Delta u = 0 \tag{9.55}$$

其中

$$uu_t = \frac{1}{2}\partial_t u^2$$

$$u\Delta u = \sum_{i=1}^{n} uu_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(uu_{x_i}) - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}u_{x_i} = \mathrm{div}(u\nabla u) - |\nabla u|^2$$

所以(9.55)变为

$$\frac{1}{2}\partial_t u^2 - \mathrm{div}(u\nabla u) + |\nabla u|^2 = 0 \tag{9.56}$$

将该式在 Ω 上进行积分，得到

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u)\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{9.57}$$

由散度定理有

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u)\mathrm{d} = \int_{\partial\Omega} u\nabla u \cdot \vec{n}\mathrm{d}S$$

由于 $u\big|_{\partial\Omega} = 0$，所以上面的积分为零.

所以(9.57)变为

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{9.58}$$

定义

$$E(t) := \int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{9.59}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant 0 \tag{9.60}$$

所以有

$$E(t) \leqslant E(0) = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \tag{9.61}$$

唯一性得证！

事实上，我们有

$$E(t) + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s = E(0) \tag{9.62}$$

□

9.5 第九次习题课

例 9.5.1. 考虑薛定谔方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \Delta u = 0 & (9.63\text{a}) \\ u(0,x) = u_0(x) & (9.63\text{b}) \end{cases}$$

1. 模仿热方程 Chapter2.3 方法求解线性齐次薛定谔方程的解.
2. 利用齐次化原理，求解
$$\begin{cases} \mathrm{i}u + \Delta u = f(x,t) & (9.64\text{a}) \\ u(0,x) = u_0(x) & (9.64\text{b}) \end{cases}$$
3. $M(u) := \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \mathrm{d}x$ 为质量
$$E(u) := \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \mathrm{d}x$$
证明 $M(u), E(u)$ 是守恒量.
4. $$|u(x,t)| \leqslant |t|^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u| \mathrm{d}x$$

例 9.5.2 (P35.6)**.** 齐次化原理解二维线性波动方程. 先证一下齐次化原理

若 $W(x,t,t;\tau)$ 为

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2(w_{xx} + w_{yy}) & (9.65\text{a}) \\ W(x,y,\tau) = 0 & (9.65\text{b}) \\ W_t(x,t,\tau) = f(x,y,t) & (9.65\text{c}) \end{cases}$$

则

$$u(x,y,t) = \int_0^t W(x,y,\tau)\mathrm{d}\tau$$

即为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t) & (9.66\text{a}) \\ u(x,y,t) = 0 & (9.66\text{b}) \\ u_t(x,y,0) = 0 & (9.66\text{c}) \end{cases}$$

上面这部分是需要验证的. □

由 *P32(4.40)* 式子，结合时间平移，有

$$W(x,y,t,\tau) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{a(t=\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2}}$$

例 9.5.3 (衰减估计)**.**

证明. 对固定的点 (x_0, y_0), 由 (4.40)，我们可以写出波动方程的解

$$u(x_0,y_0,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\partial t \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

只知道逐点是衰减的，但是不是一致地衰减的. □

f 粗糙，想得到一个光滑的 $\tilde{f}$，

构造一列光滑函数 f_n，按某个意义逼近 f.

下面设 f, g，其中 f 可积，g 光滑，可以证明 $f * g$ 也是光滑的.

$$\begin{aligned}
&\frac{(f*g)(x+\varepsilon)-(f*g)(x)}{\varepsilon} \\
=&\frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x+\varepsilon-y)\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y}{\varepsilon} \\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)g(x+\varepsilon-y)-g(x-y)}{\varepsilon}\mathrm{d}y \\
=&\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g'(x-y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

归纳，所以 $(f*g)(x)$ 光滑.

9.6 解的渐进性态

9.7 倒向唯一性

$$E(u) = \int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = -2\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

定理 9.7.1 (倒向唯一性). 设 $u_1, u_2 \in C^2(\Omega \times [0,T])$ 是方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (9.67\text{a}) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = g(x,t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T & (9.67\text{b}) \end{cases}$$

且 $u_1 \equiv u_2$ 对于 $(x,y) \in \Omega \times t = T$，则 $u_1 \equiv u_2$ 对于 $(x,y) \in \Omega \times t = 0$

证明. 只要证明

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & (9.68\text{a}) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 & (9.68\text{b}) \\ u(x,T) = 0 & (9.68\text{c}) \end{cases}$$

则 $u(x,0) \equiv 0$.

令 $E(t) = \displaystyle\int |u|^2 \mathrm{d}x$

则 $E'(t) = 2\displaystyle\int u u_t \mathrm{d}x = 2\int u\Delta u \mathrm{d}x = -2\int |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$

$$u\Delta u = \mathrm{div}(u\nabla u) - |\nabla u|^2$$

$$E(T) - E(0) = -2\int_0^T \int |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$E''(t) = -4\int \nabla u \nabla u_t \mathrm{d}x = 4\int \Delta u u_t \mathrm{d}x = 4\int |\Delta u|^2 \mathrm{d}x$$

$$E'(t) = 2\int u\Delta u \mathrm{d}x \leqslant 2\left(\int u^2 \mathrm{d}x\right)^2 \left(\int |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E'(t)^2 \leqslant E(t)E''(t)$$

要证 $E(t) \equiv 0, \forall t \in [0,T)$

否则，存在 $[T_1, T_2] \subset [0,T]$，使得 $t \in [T_1, T_2)$，$E(t) > 0$ 但 $E(T_2) = 0$

$$\frac{E'(t)}{E(t)} \leqslant \frac{E''(t)}{E'(t)}$$

令 $f(t) = \log E(t)$, 则 $f'(t) = \dfrac{E'(t)}{E(t)}$，$f''(t) = \dfrac{E''(t)}{E(t)} - \dfrac{E'(t)^2}{E(t)^2} = \dfrac{E''(t)E(t) - E'(t)^2}{E(t)^2} \geqslant 0$

故 $f(t)$ 是凸函数，故 $f((1-\tau)T_1 + \tau T_2) \leqslant (1-\tau)f(T_1) + \tau f(T_2)$

$$E((1-\tau)T_1 + \tau T_2) \leqslant E(T_1)^{1-\tau} E(T_)^\tau = 0$$

所以 $E(t) \equiv 0, \forall t \in [T_1, T_2]$ □

Chapter 10

调和方程 (位势方程)

Laplace 方程：$\Delta u = 0$

Poisson 方程：$\Delta u = f$

为了求解 Poisson 方程，通常还要提适当的边值条件. 这样的边值条件通常分为以下三类：

1. 第一边值条件：已知函数 u 在区域边界 $\partial\Omega$ 上的值，即

$$u(x) = g(x), x \in \partial\Omega.$$

   这一类边值条件亦称为 Dirichlet 边值条件，相应的边值问题也成为第一边值问题或 Dirichlet 边值问题.

2. 第二边值条件：已知函数 u 在区域边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数，即

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x), x \in \partial\Omega.$$

   这一类边值条件亦称为 Neumann 边值条件，相应的边值问题也称为第二边值问题或 Neumann 边值问题.

3. 第三边值条件：已知函数 u 和其在区域边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数的一个线性组合，即

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u(x) = g(x), x \in \partial\Omega, \alpha(x) > 0.$$

   相应的边值问题也称为第三边值问题.

10.1 基本解的导出

One good strategy for investigating any partial differential equation is first to identify some explicit solutions and then,provided the PDE is linear,to assemble more complicated solutions out of the specific ones previously noted.Furthermore,in looking for explicit solutions,it is often wise to restrict attention to classes of functions with certain symmetry properties.Since Laplace's equation is invariant under rotations,it consequently seems advisable to search first for radial solutions,that is,functions of $r = |x|$.

我们假设 Laplace 方程有解形如

$$u(x) = v(r), r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

经简单计算有

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{r} \\ u_{x_i} &= v'(r)\frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i} &= v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \end{aligned}$$

因此 u 满足 Laplace 方程当且仅当 u 满足

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0 \tag{10.1}$$

即

$$\begin{gathered} \left(r^{n-1}v'(r)\right)' = 0 \\ v'(r) = \frac{C}{r^{n-1}} \end{gathered}$$

因此有

$$\begin{cases} v(r) = C_1 \log r + C_2 & n = 2 \\ v(r) = C_1 \dfrac{1}{r} + C_2 & n = 3 \end{cases} \tag{10.2}$$

出于某种原因，我们将系数确定为

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & n = 2 \\ \dfrac{1}{4\pi|x|} & n = 3 \end{cases} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\mathrm{d}y \\ &=: I_\varepsilon + J_\varepsilon \end{aligned} \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon| &= |\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\mathrm{d}y| \\ &\leqslant \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)||\Delta_x f(x-y)|\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{10.5}$$

下面对 $|\Delta_x f(x-y)|$ 进行估计.

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta_x f(x-y)|}{\|D^2 f\|} &\leqslant \frac{|f_{x_1x_1}(x-y) + f_{x_2x_2}(x-y) + f_{x_3x_3}(x-y)|}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |f_{x_ix_j}(x-y)|^2}} \\ &\leqslant \frac{|f_{x_1x_1}(x-y)| + |f_{x_2x_2}(x-y)| + |f_{x_3x_3}(x-y)|}{\sqrt{|f_{x_1x_1}(x-y)|^2 + |f_{x_2x_2}(x-y)|^2 + |f_{x_3x_3}(x-y)|^2}} \\ &\leqslant \sqrt{3} \end{aligned}$$

所以有

$$|I_\varepsilon| \leqslant \sqrt{3}\left\|D^2 f\right\| \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\mathrm{d}y$$

当 $n=2$ 时，有

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)|\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi}\int_{B(0,\varepsilon)}|\log|y||\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} r|\log r|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\varepsilon} -r\log r\mathrm{d}r \\
&= -\left(\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^{\varepsilon} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^2\log\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2 \\
&\leqslant C\varepsilon^2|\log\varepsilon|
\end{aligned}$$

当 $n=3$ 时，有

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)|\mathrm{d}y &= \frac{1}{4\pi}\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{|y|}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{r}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

总而言之，

$$I_\varepsilon\to 0,\text{when }\varepsilon\to 0$$

个人认为上面这步实际上是在验证反常可积.

对于 J_ε，由于奇性的部分已经被我们挖掉了，所以可以放心大胆地用分部积分把求导放到 $\Phi(y)$ 身上了.

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_x f(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_y f(x-y)\mathrm{d}y \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)\mathrm{d}y+\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\frac{\partial f}{\partial n}(x-y)\mathrm{d}S(y) \\
&=: K_\varepsilon+L_\varepsilon
\end{aligned}$$

其中 n 表示 $\partial B(0,\varepsilon)$ 的指向**内部**的单位法向量.

$$\begin{aligned}
|L_\varepsilon| &= |\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\frac{\partial f}{\partial n}(x-y)\mathrm{d}S(y)| \\
&\leqslant \int_{\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)||\frac{\partial f}{\partial n}(x-y)|\mathrm{d}y \\
&= \int_{\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)||Df\cdot n|\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_{\partial B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)||Df|\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\leqslant \|Df\| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \mathrm{d}y$$

其中 $|\Phi(y)|$ 在 $\partial B(0,\varepsilon)$ 上是常值函数，当 $n=2$ 时，

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \mathrm{d}y = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon \mathrm{d}y = \varepsilon \log \varepsilon$$

当 $n=3$ 时，

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \mathrm{d}y = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathrm{d}y = \varepsilon$$

因此有

$$L_\varepsilon \to 0, \text{when } \varepsilon \to 0$$

我们继续对 K_ε 进行分部积分，得到

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Delta\Phi(y) f(x-y) \mathrm{d}y - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(y) f(x-y) \mathrm{d}S(y) \\ &= -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(y) f(x-y) \mathrm{d}S(y) \end{aligned}$$

当 $n=2$ 时，

$$\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} \frac{x_i}{|x|}$$

$$D\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2}$$

$$n = -\frac{x}{|x|}$$

$$D\Phi(x) \cdot n = \frac{1}{2\pi|x|}$$

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \mathrm{d}S(y) \to -f(x) \text{ as } \varepsilon \to 0$$

当 $n=3$ 时，

$$\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|^2} \frac{x_i}{|x|}$$

$$D\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{|x|^3}$$

$$n = -\frac{x}{|x|}$$

$$D\Phi(x) \cdot n = \frac{1}{4\pi|x|^2}$$

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) \mathrm{d}S(y) \to -f(x) \text{ as } \varepsilon \to 0$$

综上所述，有

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

10.2 Green 公式与 Green 函数

本节要求解有界区域上 Poisson 方程的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \quad (10.6a) \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \quad (10.6b) \end{cases}$$

设 $u \in C^2(\bar{U})$ 是任意函数.

固定 $x \in U$，选取 $\varepsilon > 0$ 足够小使得 $B(x,\varepsilon) \subset U$.

在区域 $V_\varepsilon := U - B(x,\varepsilon)$ 上对函数 $u(y)$ 与函数 $\Phi(y-x)$ 用 Green 第二公式，得到

$$\int_{V_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)\mathrm{d}y = \int_{\partial V_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\mathrm{d}S(y) \tag{10.7}$$

而对于 $y \neq x$ 有 $\Delta\Phi(y-x) = 0$，因此 $\int_{V_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y-x) = 0$.

由与之前同样的计算可得，

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(y-x)\mathrm{d}S(y) \to u(x), \text{as } \varepsilon \to 0$$

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\mathrm{d}S(y) \to 0, \text{as } \varepsilon \to 0$$

因此令(10.7)中 $\varepsilon \to 0$，我们得到

$$u(x) = \int_{\partial U} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(y-x)\mathrm{d}S(y) - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)\mathrm{d}y \tag{10.8}$$

根据上式，只要我们知道了 Δu 在 U 内，$u, \dfrac{\partial u}{\partial n}$ 在 ∂U 上的取值，我们就可以解出 u.

但对于带有边值条件的泊松问题，我们是不知道 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 在 ∂U 上的取值的.

为了消掉含有 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ 的项，我们想对每个 x 考虑一个修正函数 $\phi^x = \phi^x(y)$.

在 U 上对函数 u 和函数 ϕ^x 再用 Green 第二公式，得到

$$\int_U u(y)\Delta\phi^x(y) - \phi^x(y)\Delta u(y)\mathrm{d}y = \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial n}(y) - \phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\mathrm{d}S(y) \tag{10.9}$$

为了达到我们的目的，显然要要求 $\Delta\phi^x = 0$ 并且 $\phi^x\big|_{\partial U} = \Phi(y-x)$. 如果能够找到一个显式解 $\phi^x(y)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta\phi^x = 0 & \textit{in } U \quad (10.10a) \\ \phi^x = \Phi(y-x) & \textit{on } \partial U \quad (10.10b) \end{cases}$$

式(10.9)就变为

$$\int_U \phi^x\Delta u(y)\mathrm{d}y + \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial\phi^x(y)}{\partial n} - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\mathrm{d}S(y) = 0 \tag{10.11}$$

将(10.11)与(10.8)合并，我们就得到

$$u(x) = -\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\mathrm{d}S(y) - \int_U G(x,y)\Delta u(y)\mathrm{d}y \tag{10.12}$$

其中 $G(x,y) := \Phi(y-x) - \phi^x(y)$.

注记. *在证明 $G(x,y)=G(y,x)$ 之前，x 与 y 的地位是不太一样的，x 是应每次首先选定的一个点，之后 $G(x,y)$ 变成关于 y 的一个函数. 我们关于 $G(x,y)$ 知道什么呢？*

1. *除了 $y=x$ 这一点，$\Delta_y G(x,y)=0$.*

2. *对于固定的 x，$G(x,y)$ 在边界的限制上为零.*

定理 10.2.1.

$$G(x,y)=G(y,x)$$

证明. 令 $v(z)=G(x,z), w(z)=G(y,z)$，我们要证明 $w(x)=v(y)$.

在 $U-[B(x,\varepsilon)\cup B(y,\varepsilon)]$ 上对 $w(z),v(z)$ 用 Green 第二公式，得到

$$\int_{U_\varepsilon} w\Delta v - v\Delta w \mathrm{d}x = \int_{\partial U_\varepsilon} w\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S$$

由于 $\Delta v=0(z\neq x), \Delta w=0(z\neq y)$，$w=v=0$ on ∂U，所以

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial n}w - \frac{\partial w}{\partial n}v\mathrm{d}S(z) = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial n}v - \frac{\partial v}{\partial n}w\mathrm{d}S(z)$$

对于左边这部分，w 是好函数，而 v 会爆掉，而 $v(z)$ 又其实分为两部分 $\Phi(z-x)$ 和 $\phi^x(z)$，会导致 $v(z)$ 在 x 处爆掉的其实是 $\Phi(z-x)$ 这部分，但爆掉的这部分又是我们熟悉的东西，因此我们分而治之.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial n}w - \frac{\partial w}{\partial n}v\mathrm{d}S(z) &= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\Phi(z-x)-\phi^x(z)\right)w - \frac{\partial w}{\partial n}(\Phi(z-x)-\phi^x(z))\mathrm{d}S(z)\\
&= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(z-x)}{\partial n}w - \frac{\partial w}{\partial n}\Phi(z-x)\mathrm{d}S(z)\\
&= w(x)
\end{aligned}$$

同样的方法可以计算出右侧的值为 $v(y)$，得证. □

10.2.1 Green 函数的求法

半空间

三维球

二维圆

10.3 调和函数的性质

10.3.1 平均值性质

定义 10.3.1. 若 $u \in C(\Omega)$

(1) 称 u 满足平均值性质，如果

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y), \forall B(x,r) \subset \Omega$$

(2) 称 u 满足第二平均值性质，如果

$$u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{B(x,r)} u(y) \mathrm{d}y, \forall B(x,r) \subset \Omega$$

注记. 上面两个性质是彼此等价的.

若 (1) 成立，即

$$4\pi r^2 u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y)$$

两边对 r 从 0 到 ρ 进行积分，得到

$$\int_0^\rho 4\pi r^2 u(x) \mathrm{d}r = \int_0^\rho \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y) \mathrm{d}r$$

$$\frac{4}{3}\pi \rho^3 u(x) = \int_{B(x,\rho)} u(y) \mathrm{d}y$$

若 (2) 成立，即

$$\begin{aligned} r^3 u(x) &= \frac{3}{4\pi} \int_{B(x,r)} u(y) \mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_0^r \int_{\partial B(0,\rho)} u(y) \mathrm{d}S(y) \mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

两边求导，可得

$$3r^2 u(x) = \frac{3}{4\pi} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y)$$

定理 10.3.1. 若 $u\in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内调和，则 u 满足平均值性质.

证明. 任取 $B(x,r)\subset\Omega$

$$\begin{aligned}
0&=\int_{B(x,r)}(\Delta u)(y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u}{\partial n}(y)\mathrm{d}S(y)\\
&\xlongequal{y=x+r\omega}\int_{\partial B(0,1)}\frac{\partial u}{\partial n}(x+r\omega)r^2\mathrm{d}S(\omega)\\
&=r^2\int_{\partial B(0,1)}(\omega\cdot\nabla u)(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)\\
&=r^2\int_{\partial B(0,1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)\\
&=r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{\partial B(0,1)}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)
\end{aligned}$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{\partial B(0,1)}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)=0$$

进而有

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,1)}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)&=\int_{\partial B(0,1)}u(x)\mathrm{d}S(\omega)\\
&=4\pi u(x)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
u(x)&=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)\\
&\xlongequal{x+r\omega=y}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)
\end{aligned}$$

□

注记. 真要从 u 调和证明 u 满足平均值性质，我觉得上面的证明不太好想，不太容易想到调和这个条件的用法是对 Δu 进行积分. 我觉得比较好想的是，要证 u 满足平均值性质，只需要证

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

关于 r 是常数. 但由于 r 出现在了被积区域上，不太容易求导，所以我们先进行下换元 $y=x+rz$ 得到

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\mathrm{d}S(x+rz)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\mathrm{d}S(z)$$

对 r 进行求导得，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\mathrm{d}S(z)\right)\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)}(\nabla u)(x+rz)\cdot z\mathrm{d}S(z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{4\pi}\int_{B(0,1)}\Delta u(x+rz)\mathrm{d}z\\
&=0
\end{aligned}
$$

因此平均值性质得证！事实上，我们得到了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)\right)=\frac{1}{4\pi r^3}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\mathrm{d}y$$

例 10.3.1. 设 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $u\in C^2(B(0,1))\cap C(\overline{B(0,1)})$ 并且满足

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } B(0,1)\\ u(x)=x_2^2 & \text{on } \partial B(0,1)\cap\{x_2\geqslant 0\}\\ u(x)=x_2 & \text{on } \partial B(0,1)\cap\{x_2<0\}\end{cases}$$

求 $\displaystyle\int_{B(0,\frac{1}{2})}u(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解.

$$\int_{B(0,\frac{1}{2})}u(x)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2u(0)$$

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(0,1)}u(x)\mathrm{d}S(x)$$

$$\int_{\partial B(0,1)}u(x)\mathrm{d}S(x)=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}-2$$

因此

$$\int_{B(0,\frac{1}{2})}u(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}$$

□

定理 10.3.2. 若 $u\in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内满足平均值性质，那么 u 是调和的.

证明. 考虑到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)\right)=\frac{1}{4\pi r^3}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\mathrm{d}y$$

若 u 满足平均值性质，则上式左侧为零.

由 x,r 的任意性，易从 $\Delta u(x_0)\neq 0$ 导出矛盾. □

定理 10.3.3. 若 $u\in C(\Omega)$ 在 Ω 内满足平均值性质，则 u 是光滑的.

证明. 令 $\eta\in C_c^{\infty}(B(0,1))$，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\eta(x)\mathrm{d}x=1$，$\eta(x)=\eta(|x|)$

对 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\eta(x)\mathrm{d}x=1$ 进行变量代换 $x=\dfrac{y}{\varepsilon}$，得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}\eta(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\eta(\frac{y}{\varepsilon})\mathrm{d}\frac{y}{\varepsilon}=\int_{\mathbb{R}^3}\eta(\frac{y}{\varepsilon})\frac{1}{\varepsilon^3}\mathrm{d}y=1$$

受到上面启发，我们考虑一族函数 $\varphi_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon^3}\varphi(\dfrac{x}{\varepsilon})$.

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{B(x,\varepsilon)}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon\int_{\partial B(x,r)}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon\int_{\partial B(x,r)}\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)4\pi r^2u(x)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}u(x)\int_0^\varepsilon 4\pi r^2\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}u(x)\int_0^\varepsilon\int_{\partial B(0,r)}\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}u(x)\int_{B(0,\varepsilon)}\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}V \\
&= u(x)
\end{aligned}
$$

□

注记. *1.* 上面暂时还没考虑定义域的问题，但是这是需要考虑的，之后再补.

2. η_ε 构成一族好核，我们知道，连续函数与好核的卷积可以一致逼近与它本身. 事实上，对于可积函数，好核与它的卷积也几乎处处收敛于它本身，并且这个收敛也是一致的. 我们这里 u 是连续函数，所以好核与它的卷积一致逼近于它本身，但是因为 u 还满足平均值性质，所以我们可以说的更强，u_ε 在它自身的定义域上就等于 u!

定理 10.3.4 (强极值原理)**.** 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集，$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 是 Ω 上的调和函数，则

(1) $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大（小）值一定在边界 $\partial\Omega$ 上达到，即

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(2) 如果 Ω 是连通的，且存在 $x_0\in\Omega$ 使得调和函数 $u(x)$ 在 x_0 点达到 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大（小）值，则 u 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数.

证明. 略. □

注记. 如果只有定理 10.3.4 中结论 (1) 成立，我们通常称之为弱极值原理.

推论 10.3.1. 用强极值原理证明方程

$$
\begin{cases}
\Delta u = f & \text{in } \Omega \\
u(x) = g(x) & \text{on } \partial\Omega
\end{cases}
$$

经典解的唯一性.

证明. 假设有两个解 $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$，考虑 $w = u_1 - u_2$，w 满足的方程是

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & in\ \Omega & (10.13a) \\ w(x) = 0 & on\ \partial\Omega & (10.13b) \end{cases}$$

由弱极大值原理知 $w \equiv 0\ in\ \bar{\Omega}$.

经典解的唯一性得证！ □

下面我们利用平均值公式来推导出关于调和函数所有偏导数的估计，然后以此来证明调和函数是解析函数.

命题 10.3.1 (梯度估计). 设 u 在 $B(x_0, R)$ 内是调和的，则有

证明. 由 u 调和显然有 u_{x_i} 也调和.

$$\begin{aligned}
|u_{x_i}(x_0)| &= \left| \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{B(x_0,R)} u_{x_i}(y)\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{\partial B(x_0,R)} u\nu_i \mathrm{d}S(y) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{\partial B(x_0,R)} |u| \mathrm{d}S(y) \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha(n)R^n} n\alpha(n)R^{n-1} \max_{\partial B(x_0,R)} |u| \\
&= \frac{n}{R} \max_{\partial B(x_0,R)} |u| \\
&= \frac{n}{R} \max_{\overline{B(x_0,R)}} |u|
\end{aligned}$$

注记. 由强极值原理容易得到上面这里是等号，不过我暂时还没有看出闭包上的模的最大值比边界上的模的最大值好用在哪里……

□

推论 10.3.2. $\mathbb{R}^3$ 上的上、下有界的调和函数是常数.

证明. 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数且 $m \leqslant u(x) \leqslant M$.

对 $u - m$ 在 $B(x_0, R)$ 应用梯度估计，可得

$$|Du(x_0)| = D(u-m)(x_0) \leqslant \frac{n}{R}|(u-m)(x_0)| \leqslant \frac{n}{R}(|M| + |m|) \to 0 as R \to \infty$$

故 $Du(x_0) = 0$，因此 $u = const$. □

命题 10.3.2 (高阶偏导数估计). 设 $u \in C(\bar{B})$ 在 $B_R = B(x_0, R)$ 内调和，则对任意的多重指标 $\alpha, |\alpha| = k$，有

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{n^m \mathrm{e}^{m-1} m!}{R^m} \max_{\overline{B(x_0,R)}} |u|$$

证明.

注记. 我们要如何对 u 的高阶偏导数用 u 进行估计呢？我们在之前已经得到了对 u 的一阶偏导数用 u 进行的估计，注意到高阶偏导数总可以写为一个低阶偏导数再求一次偏导，因此我们可以得到对高阶偏导数用低一阶偏导数进行的估计，显然就可以归纳下去了.

证明中需要注意的一个问题是，比如我要对二阶偏导数进行估计，那就是先用一阶偏导数估二阶偏导数，再用 u 估一阶偏导数，这个过程中会选取两次 R，显然不管我们怎么选取这两个 R，我们都能得到正确的估计. 我们的目的是得到尽可能优的估计，然而我们并不知道如何选取两个 R 的比例才能使得估计最优，因此我们不妨待定系数，最后确定这个比例.

当 $k=1$ 时，在之前的命题的证明中，我们得到了

$$|u_{x_i}(x_0)| \leqslant \frac{n}{R} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

当 $k=2$ 时，我们使用上面的估计，并选取球半径为 $(1-\theta)R$，得到

$$|u_{x_ix_j}(x_0)| \leqslant \frac{n}{(1-\theta)R} \max_{B(x_0,(1-\theta)R)} |u_{x_i}|$$

注记. 想继续往下写的时候,就意识到了为什么之前对一阶偏导数的估计最后要把结果写成 $\max\limits_{B(x_0,R)} |u|$ 而不是 $\max\limits_{\partial B(x_0,R)} |u|$. 这两者由极值原理实际上是等价的, 之所以我们选择前者而不是后者是因为前者表述起来更方便. 不妨先用 $\max\limits_{\partial B(x_0,R)} |u|$，看看我们能够得到什么吧.

$$|u_{x_ix_j}(x_0)| \leqslant \frac{n}{(1-\theta)R} \max_{\partial B(x_0,(1-\theta)R)} |u_{x_i}|$$

下一步就是估计 $\max\limits_{\partial B(x_0,(1-\theta)R)} |u_{x_i}|$，然而我们不知道谁是 max，因此我们选择估计 $\partial B(x_0,(1-\theta)R)$ 上的所有 $|u_{x_i}|$.

请你在脑海中想象一个半径为 $(1-\theta)R$ 的球面，考虑其上的一点，该点处 $|u_{x_i}|$ 的值能被以该点为球心，θR 为半径的球面上的 $|u|$ 的最大值限制住. 现在你让这个点遍历球面，此时与该点相对应的那个球面扫出的是一个球壳，内径为 $(1-2\theta)R$，外径为 R，当然上述几何图形建立在 $1-\theta>\theta$ 的基础上，当 $\theta \geqslant 1-\theta$ 时，我们得到的直接就是以 R 为半径的闭球. 等我们需要去取 θ 的时候，你会看到实际上是第二种情况.

因此，或许是为了形式统一，或许是为了表述方便，我们用整个闭球而不用球面.

$$|u_{x_ix_j}(x_0)| \leqslant \frac{n}{(1-\theta)R}\frac{n}{\theta R} \max_{B(x_0,R)} |u|$$

当 θ 取 $\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{(1-\theta)\theta}$ 有最小值 $\frac{2^2}{1^1}=4$. 因此

$$|u_{x_ix_j}(x_0)| \leqslant \frac{2^2}{1^1}\frac{n^2}{R^2} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

下面考虑更高阶的情况，

$$|u_{x_ix_jx_k}(x_0)| \leqslant \frac{n}{(1-\theta)R} \max_{B(x_0,(1-\theta)R)} |u_{x_ix_j}| \leqslant \frac{n}{(1-\theta)R}\frac{2^2}{1^1}\frac{n^2}{(\theta R)^2} \max_{B(x_0,R)} |u|$$

当 $\theta=\frac{2}{3}$ 时，$\frac{1}{(1-\theta)\theta^2}$ 有最大值 $\frac{3^3}{2^2}$. 因此

$$|u_{x_ix_jx_k}(x_0)| \leqslant \frac{3^3}{1^1}\frac{n^3}{R^3} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

现在规律已经很明显了！我们有理由猜测

$$|D^{\alpha}u(x_0)| \leqslant \left(\frac{kn}{R}\right)^k \max_{B(x_0,R)} |u|$$

并利用归纳法轻松给出证明. □

定理 10.3.5. 调和函数是解析的.

证明. 对任意 $x \in \Omega$，存在 $R > 0$ 使得 $B(x_0, R) \subset \Omega$，

对任意 $h < R$，由 Taylor 展开，

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^i u\right](x) + R_m(h)$$

$$R_m(h) = \frac{1}{m!}\left[()\right]$$

□

10.3.2 B.Harnock 不等式及应用

定理 10.3.6 (Harnack 不等式). 对于 Ω 中的任意紧集 K，存在常数 $C = C(\Omega, K)$，使得对于 Ω 中的任意非负调和函数，有

$$\frac{1}{C}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y), \forall x, y \in K$$

证明. 设 $R = \dfrac{1}{4}\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$.

任取 $x \in K$，则有 $B(x, 4R) \subset \Omega$.

> The intuitive idea is that since K is a positive distance away from $\partial\Omega$, there is “room for the averaging effects of Laplace;s equation to occur”.

考虑一点 $y \in B(x, R)$，有 $B(y, R) \subset B(x, 2R)$，由平均值性质

$$u(x) = \frac{3}{4\pi(2R)^3}\int_{B(x,2R)} u(z)\mathrm{d}z \geqslant \frac{3}{4\pi(2R)^3}\int_{B(y,R)} u(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{8}u(y)$$

上式中的大于等于号用到了 u 非负的条件.

用半径为 R 的开球覆盖 K，由有限覆盖定理，存在有限个球覆盖 K，设这有限个球的数目为 N.

任取 K 中的两点 x, y，可以在上述 N 个球中，选出若干个球，使得它们的并是连通的并且包含 x, y，在每个球内重复上述过程，就有

$$u(x) \geqslant \frac{1}{C}u(y)$$

得证！ □

注记. 首先注意到，对于一个给定的调和函数 u，它在紧集 K 上能取到最大值和最小值，进而都是有限值，因此值与值之间一定是可以互相比较的，这是平凡的. 而 Harnack 不等式论述的是对于任意的非负调和函数，存在一个相同的 C，这是不平凡的.

命题 10.3.3 (三维球上的 Harnack 不等式). 设 u 在 $B(x_0,R)$ 内调和，且 $u \geqslant 0$，则

$$\frac{R}{R+r}\frac{R-r}{R+r}u(x_0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R}{R-r}\frac{R+r}{R-r}u(x_0)$$

其中 $r=|x-x_0|<R$

证明. 结合 Poisson 公式易证. □

推论 10.3.3. 若 u 是 $\mathbb{R}^3$ 上的上有界或下有界的调和函数，则 u 是常数.

定理 10.3.7 (可去奇点定理). 设 u 在 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 内调和且满足

$$u(x)=\begin{cases} o\left(\log|x|\right) & \dim=2 \\ o\left(\dfrac{1}{x}\right) & \dim=3 \end{cases} \text{ as } |x|\to 0,$$

则可在原点处定义 u 的值，使得 $u\in C^2(B(0,R))$ 且 u 在 $B(0,R)$ 内调和.

证明. 只证 $n=3$ 的情形.

令 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v=0 & \text{in } B(0,R) & (10.14\text{a}) \\ v=u & \text{on } \partial B(0,R) & (10.14\text{b}) \end{cases}$$

v 的存在性是由球上的泊松公式保证的.

v 的有界性是由极值原理保证的

注记. 我认为这里有一个有助于加深对该定理理解的观察是，即使 u 在原点处的值爆掉了，不满足定理的条件，我也总可以找出这样一个 v，使得它在边界处的值与 u 相同，并且在球内是调和的.

另一个观察是，v 满足的方程的解事实上是唯一的，但是这并不能使我们直接说明 $u\equiv v$，因为 u 满足的方程实际上是

$$\Delta u=0 \text{ in } B(0,R)\setminus\{0\}$$

但我们要证明的是 v 在 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 上恒等于 u，如果确实如此，我们就可以把 v 在 0 处的值定义为 u 在 0 处的值.

这就给我一个冲动去挖掉原点处的一个半径任意小的一个闭球，如果我能证明在挖掉之后的区域内解是唯一的，我就能证明 $u\equiv v$ on $B(0,R)\setminus\{0\}$.

但我们遇到的困难是，我们不知道 u 与 v 在 $\partial B(0,\delta)$ 上的取值的情况，如果我们知道他俩在 $\partial B(0,\delta)$ 上相等，那就直接可以用极值原理证出来了. 但是！我要是知道他俩在 $\partial B(0,\delta)$ 上相等，其中的 δ 还有任意性，那我还证个锤子啊！所以是不必去幻想知道 u 与 v 在 $\partial B(0,\delta)$ 上相等了.

此外，你有理由相信 u 在原点附近满足的阶数的条件在讨论 $\partial B(0,\delta)$ 上的情况时会发挥重要的作用.

要证两个东西恒等，自然要考虑它们的差. 令 $w=v-u$，它满足

$$\begin{cases} \Delta w=0 & \text{in } B(0,R)\setminus\{0\} & (10.15\text{a}) \\ w=0 & \text{on } \partial B(0,R) & (10.15\text{b}) \end{cases}$$

还是那句话，我要证明的是在 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 上 $w\equiv 0$，我的手段是在 $B(0,R)\setminus B(0,\delta)$ 上运用极值原理，我的困境是我不清楚 w 在 $\partial B(0,\delta)$ 上的情况，我能借助的条件是 u 在原点处满足的估计.

以上便是现阶段我能给出的最大程度的直觉上的理解，下面还是有一些值得学习的技术性的东西的.

设 $W(x)=\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{R}$，则有

$$\begin{cases}\Delta w=0 & \text{in } B(0,R)\backslash\{0\}\\ w=0 & \text{on } \partial B(0,R)\end{cases},$$

$$\lim_{|x|\to 0}\frac{w(x)}{W(x)}=0,$$

也就是说，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $0<|x|\leqslant\delta$，便有

$$\left|\frac{w(x)}{W(x)}\right|<\varepsilon,$$

即

$$-\varepsilon W(x)<w(x)<\varepsilon W(x), x\in B(0,\delta)\backslash\{0\}.$$

注记. 接下来要做的事就是用极值原理把上面这个不等关系推广到 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 上. 不对不对，上面这句话不对，因为你看，假使我们在 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 上有这个不等关系，我们也不可以令 ε 趋于 0 来得到在 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 上 $w(x)\equiv 0$，因为在原点附近 $W(x)$ 是爆掉的. 所以接下来要做的事就是用极值原理把上面这个不等关系推广到 $B(0,R)\backslash B(0,\delta)$ 上.

考虑 $\varepsilon W-w$，它满足

$$\begin{cases}\Delta(\varepsilon W-w)=0 & \text{in } B(0,R)\backslash B(0,\delta)\\ \varepsilon W-w=0 & \text{on } \partial B(0,R)\\ \varepsilon W-w>0 & \text{on } \partial B(0,\delta)\end{cases}$$

由极值原理，在 $B(0,R)\backslash B(0,\delta)$ 上有 $\varepsilon W-w\geqslant 0$.

取定 ε 后，δ 可以任意小（但不能任意大），因此上式在 $B(0,R)$ □

注记. 虽然这个定理叫可去奇点定理，但实际上，并不是说那里有一个奇点；在这个条件下，那里的奇点其实是不存在的. 这个定理实际上是告诉我们如果那里有一个奇点，它的增长速率有一个下界.

10.4 极值原理、第二边值问题的唯一性

10.4.1 $\Delta u \geqslant 0$

Intuitively, subharmonic funcitons are related to convex functions of one variable as follows. If the graph of a convex function and a line intersect at two points, then the graph of the convex function is below the line between those points. In the same way, if the values of a subharmonic function are no larger than the values of a harmonic function on the boundary of a ball, then the values of the subharmonic function are no larger than the values of the harmonic also inside the ball.

定义 10.4.1. *Let G be a subset of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ and let*

$$\varphi : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

be an upper semi-continuous function.Then, φ is called subharmonic if for any closed ball $\overline{B(x,r)}$ of center x and radius r contained in G and every real-valued continuous function h on $\overline{B(x,r)}$ that is harmonic in $B(x,r)$ and satisfies $\varphi(y) \leqslant h(y)$ for all y on the boundary $\partial B(x,r)$ of $B(x,r)$ we have $\varphi(y) \leqslant h(y)$ for all $y \in B(x,r)$.

A function u is called superharmonic if $-u$ is subharmonic.

命题 10.4.1.

1. *A function is harmonic if and only if it is both subharmonic and superharmonic.*
2. *If ϕ is C^2 on an open set G in $\mathbb{R}^n$, then ϕ is subharmonic if and only if one has $\Delta\phi \geqslant 0$ on G.*
3. *The maximum of a subharmonic function cannot be achieved in the interior of its domain unless the function is constant,this is so-called maximum principle.However,the minimum of a subharmonic function can be achieved in the interior of its domain.*
4. *Subharmonic functions make a convex cone, that is, a linear combination of subharmonic functions with positive coefficients is also subharmonic.*
5. *The pointwise maximum of two subharmonic functions is subharmonic.*
6. *The limit of a decreasing sequence of subharmonic functions is subharmonic.*

例 10.4.1. *If f is analytic then $\log|f|$ is subharmonic.More examples can be constructed by using the properties listd above,by taking maxima,convex combinations and limits.*

定理 10.4.1 (次调和函数的弱极值原理)**.** 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是 Ω 上的次调和函数，即

$$\Delta u \geqslant 0 \quad \text{in } \Omega,$$

则有

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\Gamma} u.$$

证明. 令 $v(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$，则 $\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon > 0$

若 $v(x)$ 在 $x_0 \in B_1$ 内部达到最大值，则 $\Delta v \leqslant 0$，矛盾.

因此 v 在边界达到最大值，即

$$\sup_{x\in B_1} v \leqslant \sup_{\partial B_1} v$$

$$\sup_{x\in B_1} u \leqslant \sup_{x\in B_1} v \leqslant \sup_{\partial B_1} v = \sup_{\partial B_1}(u+\varepsilon) = \sup_{\partial B_1} u + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$，则命题得证. □

定理 10.4.2 (最大模估计)**.** 设 $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 是

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \quad (10.16a) \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \quad (10.16b) \end{cases}$$

的解，令 $F = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|, \Phi = \max_{x\in\partial\Omega}|\varphi(x)|$，则存在 $C = C(n,\Omega)$，使得

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant \Phi + CF$$

注记. 我要用弱极值原理来弄它. 弱极值原理告诉我们什么呢？如果你能在边界上控住它的值，那你就能在整个区域上控住它的值. 那首先你要构造的这玩意，就得能在边界上控住他，u 在边界上是谁呢？最大是 Φ，所以你要构造那玩意得带个 Φ. 我要用极值原理，那拉普拉斯之后得大于等于零，u 拉普拉斯完之后是 f，其绝对值最大是 F，因此我想控他的话我构造的东西拉普拉斯完得带 F，很容易想的就是我把 F 放到系数的位置，然后你脑子里得装一些拉普拉斯完之后恒正的东西，最好拉普拉斯完得到的还是常数，如果得到常数不够用也要尽可能地简单，我在拉普拉斯完恒正的东西前加一个负号，就能得到拉普拉斯完恒负的东西. 然后你现在把你想要达成的两个目的想清楚了，在具体构造的时候还要注意不能让两边打架，Φ 对 F 这边影响是很小的，如果你只放一个常数 Φ 的话，拉普拉斯一下他就没了，但是你得考虑你 F 这边构造的项在边界上会不会变成负的东西，最简单的是我给我构造的 F 的部分加上一个常数项来修正，因为常数在拉普拉斯完之后就没了所以对我原来构造 F 的目的没有任何影响，我又能靠这个常数保证 F 部分恒正，不会给 Φ 部分拖后腿. 以上这些都是马后炮，你让我自己去想不见得啥时候能想出来，如果你不先给我讲个极值原理我连要用极值原理去证都想不到.

证明. 不妨设 $\Omega \subset \{x|0 \leqslant x_1 \leqslant d\}$

令 $v(x) = \Phi + \left(\mathrm{e}^{ad} - \mathrm{e}^{ax_1}\right)F$，$a > 1$，则

$$\Delta(u-v) = f + a^2\mathrm{e}^{ax_1}F \geqslant f + F \geqslant 0$$

$$(u-v)|_{\partial\Omega} = \varphi - v|_{\partial\Omega} \leqslant \varphi - \Phi \leqslant 0$$

由弱极值原理，$u - v \leqslant 0$

即 $u(x) \leqslant v(x) = \Phi + \left(\mathrm{e}^{ad} - \mathrm{e}^{ax_1}\right)F \leqslant \Phi + \left(\mathrm{e}^{ad} - 1\right)F \leqslant \Phi + CF$ □

注记. 如何证明自己初步搞懂了这个证明？你再自己写一个辅助函数出来就好了……

$$v(x) = \Phi + (d^2 - x_1^2)F$$

x_1^2，或 $|x|^2$，就是我说的拉普拉斯完恒正还是常数的好东西，常数它简单啊，恒正它好啊，不过之后我们可能会看到常数可能是有局限性的？虽然我们可以在前面加一个 ε 变成可调大小的 $\varepsilon|x|^2$，但是 ε 一般是用来最后趋于零的，有时候还希望拉普拉斯完之后的东西足够大就不行了.

命题 10.4.2 (内部梯度估计)**.** 设 u 在 B_1 内调和，则有

$$\sup_{B_{1/2}} |Du| \leqslant C \sup_{\partial B_1} |u|$$

其中 $C = C(n)$ 是依赖于维数 n 的正的常数.

证明.

$$\partial_1(fg) = f_1 g + f g_1$$

$$\partial_1^2(fg) = f_{11} g + 2 f_1 g_1 + f g_{11}$$

$$\Delta(fg) = (\Delta f) g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + f(\Delta g)$$

$$\Delta(\varphi |Du|^2) = (\Delta \varphi) |Du|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \varphi) \left(\partial_i |Du|^2 \right) + \varphi(\Delta |Du|^2)$$

$$|Du|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

$$\partial_i |Du|^2 = 2 u_1 u_{1i} + 2 u_2 u_{2i} + \cdots + 2 u_n u_{ni} = 2 \sum_{j=1}^{n} u_j u_{ji}$$

$$\Delta(|Du|^2) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i^2 \left(\partial_j u \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(2 \partial_j u \partial_i \partial_j u \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} ()$$

□

引理 10.4.1 (Harnack 不等式)**.** 设 u 是 B_1 上的非负调和函数，则存在 $C = C(n)$，使得

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |D \log u| \leqslant C$$

推论 10.4.1. 设 u 是 B_1 上的非负调和函数，则存在 C 使得

$$u(x_1) \leqslant u(x_2), \forall x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}$$

证明. 设 $u > 0\ in\ B_1$，

$$|\log u(x_1) - \log u(x_2)| =$$

□

命题 10.4.3 (Hopf 引理)**.** 设 $u \in C^2(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$ 是 B_R 上的次调和函数. 若存在 $x_0 \in \partial B_R$ 使得 $u(x)$ 在 x_0 点达到在 $\bar{B}_R$ 上的最大值，且当 $x \in B_R$ 时，有 $u(x) < u(x_0)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$$

注记. Hopf 的证明中用到的辅助函数比证明最大模估计用到的辅助函数是要更难想的，因为我们对这个辅助函数提的要求不一样，最大模估计是要用弱极值原理，因此要去控制住边界处的值，要去控制拉普拉斯；这里我们依旧要用到弱极值原理，那这两个东西依然是要考虑的，Hopf 的证明难在它还有另一个要考虑的地方. 回过头来看，Hopf 的证明实际上是说，如果我满足了定理的条件，那我能给它塞进去一个大于零 $-\varepsilon \dfrac{\partial v}{\partial n}$，其中 v 是我们的辅助函数，

唉，εv 的拉普拉斯必须要大于零，$-\varepsilon\nabla v$ 必须指向外侧，实际上 ε 取正取负是无所谓的，我只要相应地在 v 前填一个负号就好了. 不妨令 ε 是大于零的吧，那也就是说 Δv 要大于等于零，∇v 必须要指向内，这是构造的难点. 于是我们去看我们脑子里的那些辅助函数，首先想的是 $|x|^2$，它的拉普拉斯是正常数 $2n$，这很好；但是它的梯度是 $2\vec{x}$，指向外，这就不行了，并且我们发现似乎并不能通过给他那里放个系数使得拉普拉斯不改变正负而梯度换个指向. 接下来考虑 $\mathrm{e}^{a|x|^2}$，我们会发现它好极了，它的梯度是 $2a\mathrm{e}^{a|x|^2}\vec{x}$，其中 $\mathrm{e}^{a|x|^2}$ 是一个恒正的东西，我们只要让 $a<0$，就可以保证梯度朝里指. 此时我们屏住呼吸去看拉普拉斯，$a<0$ 的时候是否能让拉普拉斯恒正呢？似乎也还不错，只要 a 的绝对值足够大二次方项是能干掉一次项的，但令人心碎的是，在原点处，二次项系数为零，拉普拉斯恒负. 唉，看来这条路也行不通，如果是我的话可能就去继续想新的辅助函数了，但是前辈们在此处做了一个思路的转折，我认为这个思路的转折是很难想到的——既然 0 点处不好，那我干脆挖掉它好了，然后我再论证 w 在内部的那个球面上也是小于零的. 写到这里我认识到了 ε 的作用，其实是无所谓 ε 的，如果仅仅是要求梯度朝里和除去原点处拉普拉斯恒正. 那么 ε 到底在哪里发挥作用呢？我们先来看最终构造的那个辅助函数 $v=\mathrm{e}^{-a|x|^2}-\mathrm{e}^{-aR^2}$，常数项抛掉不看，这个东西离原点越远，它的值越小，而我们的 u，是在边界上取到了最大值，球内是严格小于的，那谁给你的自信，加上一个离原点越远的地方值越小的 v 之后，还能够保持在边界上取最大值的性质呢？正是在 v 前面乘的这个 ε，靠这个 ε，我就可以把 v 搞得任意小，也多亏了 u 在内部的值严格小于 u 的最大值，这样就给了我们一个空间可以把 εv 给他塞进去.

证明. 根据引理的假设，$\frac{\partial}{-}$ 令 $v(x)=\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}-\mathrm{e}^{-x}$，则 $v>0$，且

$$\Delta v=$$

□

总假设是有界的，称 Ω 满足内切球条件如果对于它边界上的任意一点可做一个球包含在 Ω 里面且与 Ω 的边界在 Ω 相切，满足内切球性质.

定理 10.4.3. 设 Ω 具有内切球性质，弱 $u\in C(\bar{\Omega})$ 不恒为常数且调和，在 $x_0\in\Omega$ 取得最大值，则 $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0)>0$

10.4.2 $-\Delta u+c(x)u=f(x)$

在这一小节我们将讨论比位势方程更为一般的方程

$$\mathcal{L}u=-\Delta u+c(x)u=f(x),x\in\Omega. \tag{10.17}$$

在下面的讨论中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集.

当我们考虑方程(10.17)的极值原理时，我们需要假定

$$c(x)\geqslant 0,x\in\Omega.$$

此条件在极值原理的证明中非常重要.

首先我们证明以下一个较强的结论.

定理 10.4.4. 假设 $c(x)\geqslant 0,f(x)<0$，$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 满足方程(10.17). 显然 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值要么是负的，要么是非负的. 如果 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值是非负的，那么不可能在 Ω 上达到，一定是在 $\partial\Omega$ 上达到.

证明. 假设 $u(x)$ 在点 $x_0 \in \Omega$ 达到最大值，则由多元微积分的知识知，$u(x)$ 在 x_0 的梯度向量 $Du(x_0) = 0$，Hessian 矩阵 $D^2u(x_0)$ 是非正定的. 对 Hessian 矩阵 $D^2u(x_0)$ 求迹得到

$$\Delta u(x_0) = \mathrm{tr}(D^2u(x_0)) \leqslant 0.$$

因而，

$$\mathcal{L}u(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) = f(x_0) \geqslant 0$$

这与定理的假设 $f(x_0) < 0$ 矛盾. 上面已经用到了 $c(x) \geqslant 0, u(x_0) \geqslant 0$. $\square$

10.5 那些年我们构造过的辅助函数

x 的模长的平方 $|x|^2$

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\Delta |x|^2 = 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n$$

特点：

1. 它的拉普拉斯是个常数，并且恒正.
2. 它是只关于 x 的模长的函数.
3. 它本身也非负，只在原点处值为零. 半径越大它的值越大.

$\mathrm{e}^{a|x|^2}$

$$\partial_{x_1} \mathrm{e}^{a|x|^2} = 2ax_1 \mathrm{e}^{a|x|^2}$$

$$\partial_{x_1}^2 \mathrm{e}^{a|x|^2} = 2a\mathrm{e}^{a|x|^2} + (2ax_1)^2 \mathrm{e}^{a|x|^2}$$

$$\nabla \mathrm{e}^{a|x|^2} = 2a\mathrm{e}^{a|x|^2} \vec{x}$$

$$\Delta \mathrm{e}^{a|x|^2} = \left(2an + 4a^2|x|^2\right) \mathrm{e}^{a|x|^2}$$

10.6 习题

例 10.6.1 (P77,6)**.**

$$
\begin{cases}
u_{xx}+u_{yy}=0 & (10.18a)\\
u(0,y)=u(a,y)=0 & (10.18b)\\
u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{a} & (10.18c)\\
u(x,b)=0 & (10.18d)
\end{cases}
$$

解.

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda$$

$$
\begin{cases}
X''(x)+\lambda X(x)=0 & (10.19a)\\
X(0)=0 & (10.19b)\\
X(a)=0 & (10.19c)
\end{cases}
$$

$$\int_0^a X''(x)X(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^a F^2\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^a X'(x)^2\mathrm{d}x\leqslant 0$$

$$\lambda\leqslant 0$$

注记. λ 的约定不一样.

综上，$\lambda<0$.

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\lambda>0$$

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

代入初值条件，得到

$$A=0,\sqrt{\lambda}a=k\pi,\lambda=\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$$

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi}{a}x$$

$$G''(y)-\lambda G(y)=0$$

$$G_k(y)=C_k\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}y}+D_k\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}y}$$

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}y}+D_k\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$U(x,0)=\sin\frac{\pi}{a}x$$

$$U(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}(C_k+D_k)\sin\frac{n\pi}{a}x=\sin\frac{\pi}{a}x$$

$$\Rightarrow C_1 + D_1 = 1, C_n + D_n = 0, n \geqslant 2$$

$$U(x,b) = 0$$

$$U(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_k} b} + D_k \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_k} b} \right) \sin \frac{k\pi}{a} x$$

$$C_n = D_n = 0, n \geqslant 2$$

□

Part III

可积系统

Chapter 11

椭圆曲线和 KdV 行波

11.1 椭圆曲线和 Weierstrass$\wp$ 函数

11.1.1 $\wp$ 满足的微分方程

已知 $\wp$ 满足

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - k_1\wp - k_2,$$

问

$$W(z) = a\wp(z; k_1, k_2) + b$$

满足什么微分方程？

反解得 $\wp(z; k_1, k_2) = \dfrac{W(z) - b}{a}$，所以有

$$\left(\frac{W'}{a}\right)^2 = 4\left(\frac{W-b}{a}\right)^3 - k_1\frac{W-b}{a} - k_2.$$

整理得

$$(W')^2 = \frac{4}{a}W^3 - \frac{12b}{a}W^2 + \left(\frac{12b^2}{a} - ak_1\right)W - \frac{4b^3}{a} + abk_1 - a^2k_2.$$

注意到通过合适地选取 a, b, k_1, k_2，上式右侧能够得到 W 的任意三次多项式.

11.2 KdV 方程的行波解

回忆 KdV 方程是

$$u_t = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}.$$

我们已经看到 Weierstrass$\wp$ 函数满足一个非线性常微分方程

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - k_1\wp - k_2.$$

假设 $u(x,t)$ 是 KdV 方程的解，形如

$$u(x,t) = w(x+ct).$$

将之代入 KdV 方程，得到

$$cw' = \frac{3}{2}ww' + \frac{1}{4}w'''.$$

积分，得到

$$cw = \frac{3}{4}w^2 + \frac{1}{4}w'' + \gamma_1.$$

看起来似乎我们不能再进行积分了，因为我们不知道 w 或 w^2 的原函数. 但是，只要在两边乘上一个 w'，即

$$cww' = \frac{3}{4}w^2w' + \frac{1}{4}w''w' + \gamma_1 w',$$

此时便又可以两侧积分，得

$$\frac{c}{2}w^2 = \frac{1}{4}w^3 + \frac{1}{8}(w')^2 + \gamma_1 w + \gamma_2.$$

整理得

$$(w')^2 = -2w^3 + 4cw^2 - 8\gamma_1 w - 8\gamma_2.$$

比较 $W(z) = a\wp(z;k_1,k_2) + b$ 满足的微分方程

$$(W')^2 = \frac{4}{a}W^3 - \frac{12b}{a}W^2 + \left(\frac{12b^2}{a} - ak_1\right)W - \frac{4b^3}{a} + abk_1 - a^2k_2.$$

对应系数，得 $W(z) = -2\wp(z;k_1,k_2) + \dfrac{2c}{3}$ 是解，其中

$$k_1 = \frac{4}{3}(c^2 - 3\gamma_1), \quad k_2 = \frac{8c^3}{27} - \frac{4c\gamma_1}{3} - 2\gamma_2.$$

附录 A

Fourier 变换

A.1 公式

无穷积分与三个群作用之间的关系

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)\mathrm{d}x, \forall h \in \mathbb{R}^n$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \delta^n \int_{\mathbb{R}^n} f(\delta x)\mathrm{d}x, \forall \delta > 0$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathcal{R}(x))\mathrm{d}x, \forall \mathrm{Rotation}$$

Fourier 变换与 Fourier 反变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\mathrm{d}x$$
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi$$

求 Fourier 系数时常用的公式

$$x\sin x\text{的原函数是} - x\cos x + \sin x + C$$

$$x\cos x\text{的原函数是} x\sin x + \cos x + C$$

A.2 Gaussians

定理 A.2.1. 设 $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$，则 $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.

证明. 定义

$$F(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x$$

观察到

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1$$

求导，得

$$\begin{aligned}
F'(\xi) &= -2\pi\mathrm{i}x\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\widehat{f'}(\xi) \\
&= \mathrm{i}(2\pi\mathrm{i}\xi)\hat{f}(\xi) \\
&= -2\pi\xi F(\xi)
\end{aligned}$$

因此 $F(\xi)$ 满足微分方程的初值问题

$$\begin{cases} F'(\xi) + 2\pi\xi F(\xi) = 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

容易解出

$$F(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$$

□

接下来我们考虑 Guassian$f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ 的积分在 dilation 的群作用下的变换

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right)^2\right)\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{\delta}} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{-1/2}\mathrm{e}^{-\pi x^2/\delta}\mathrm{d}x = 1$$

因此，我们考虑这样一族函数

$$\delta^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\pi x^2/\delta}$$