复几何

孙天阳

2023 年 1 月 12 日

目录

Chapter 1

复流形

1 代数准备

定义 1.1. 复线性空间

定义 1.2. 线性映射，反线性映射

定义 1.3. 用反线性的同构来定义复共轭空间. 然后再说这个是具体实现. 设 V 是一个复向量空间，定义其复共轭空间 $\overline{V}$ 如下

(1) $\overline{V}$ 与 V 有相同的 Abel 群

(2) $\lambda * v := \bar{\lambda} \cdot v$. 其中 $*$ 表示 $\overline{V}$ 中的数乘，$\cdot$ 表示 V 中的数乘.

可以验证 $\overline{V}$ 在上述定义下成为复线性空间. 定义

$$\iota\colon V \longrightarrow \overline{V}, \quad v \longmapsto v.$$

因为 $\iota(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot v = \bar{\lambda} * v = \bar{\lambda} * \iota(v)$，所以 ι 是反线性的. 应该这样理解复共轭空间的定义：$\overline{V}$ 不过是 V 的复共轭空间的一个具体表现形式，任何与 $\overline{V}$ 线性同构，即 V 到它有一个反线性的双射的线性空间，都可以被视为 V 的复共轭空间.

定义 1.4. 设 V 是一个实线性空间. V 上的一个复结构是指一个映射 $J \in \mathrm{End}(V)$ 满足 $J^2 = -\mathrm{Id}_V$.

给定 V 上的一个复结构 J，我们可以赋予 V 一个复线性空间结构. 因为 V 已经是一个实线性空间，因此要想知道 V 如何是一个复线性空间，我们只需要知道 i 如何乘在 V 中的元素上. 定义

$$\mathrm{i}v := J(v)$$

可以验证 V 成为一个复向量空间，记作 V_J. 反之，每个复向量空间都决定其底空间上的一个复结构.

设 V 是实线性空间，J 是 V 上的复结构.

例子 1.5. $-J$ 也是 V 上的复结构，且 $V_{-J} = \overline{V_J}$.

例子 1.6. 定义 V^* 上的复结构如下，仍记作 J，

$$J\colon V^* \longrightarrow V^*, \quad \alpha \longmapsto J(\alpha)$$

其中 $J(\alpha)(v) := \alpha(J(v))$.

定义 1.7. 设 V 是实线性空间，定义 $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

复化的向量空间上有共轭映射.

命题 1.8. 复化与张量积的交换性

命题 1.9. 复化与外积的交换性

设 V 是实线性空间，J 是 V 上的复结构，则 J 自然诱导 $V_{\mathbb{C}}$ 上的一个复结构

$$J\colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad v \otimes z \longmapsto J(v) \otimes z.$$

J 的最小多项式为 x^2+1，没有重根，因此 $V_{\mathbb{C}}$ 有直和分解

$$V_{\mathbb{C}} \cong V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

其中 $V^{1,0}$ 和 $V^{0,1}$ 分别代表 J 的以 i 和 $-\mathrm{i}$ 为特征值的特征子空间.

命题 1.10. (V, J) 与 $V^{1,0}$ 自然同构

命题 1.11. *wedge* 的分解.

注记. 有一些书很讨厌是这样的.

引理 1.12.

$$\bigwedge^{n}(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=0}^{n}\left(\bigwedge^{k} V \otimes \bigwedge^{n-k} W\right).$$

https://math.stackexchange.com/questions/822470/exterior-power-commutes-with-direct-sum

2 复流形与全纯向量丛

定义 2.1. 复流形

命题 2.2. 复流形有一个自然的近复结构.

设 M 是 n 维复流形. 设 $p \in M$，考虑 p 处 M 作为实流形的切空间 $T_p^{\mathbb{R}}M$. 他有复结构. 对它复化，复化后的空间有分解，

定义 2.3. 全纯向量丛

参考文献

- 石亚龙复几何第 1 章
- GTM275 第 7.1 节
- G-H 第 0 章第 5 节
- Hatcher 向量丛和 K 理论
- 陈省身第 3 章第 1 节

例子 2.4. 全纯切丛

例子 2.5. 全纯余切丛

3 近复结构和 (p, q) 型微分形式

定义 3.1. 近复结构

引理 3.2. 复矩阵的实行列式等于它的复行列式的模长的平方

引理 3.3. 有近复结构的流形是可定向的

注记. 偶维数，可定向，不一定有近复结构，比如 S^4.

Chapter 2

层论

1 集合的层

定义 1.1. 设 X 是拓扑空间. X 上的一个集合的层是指到 X 的一个局部同胚 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$.

命题 1.2. 设 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$ 是局部同胚，则 π 是开映射.

证明. 任给 $\mathscr{S}$ 中开集 U，要证 $\pi(U)$ 是 X 中开集. 任取 $q \in \pi(U)$，能找到一个原像 $p \in U$. 因为 π 是局部同胚，按定义存在 p 的开邻域 V 满足 $\pi(V)$ 是 X 中开集且 π 限制在 V 上是同胚. 因为 $U \cap V \subset V$ 是开集，所以 $\pi(U \cap V)$ 是开集. 且 $q = \pi(p) \in \pi(U \cap V) \subset \pi(U)$. □

命题 1.3. 设 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$ 是局部同胚，则茎 $\mathscr{S}_x := \pi^{-1}(x)$ 是闭集，且其子空间拓扑为离散拓扑.

定义 1.4. 设 $(\mathscr{S}', \pi'), (\mathscr{S}, \pi)$ 是 X 上的层. 称连续映射 $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 是层同态如果下列图表交换.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \mathscr{S} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

命题 1.5. 设 $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 是层同态，则 φ 也是局部同胚.

容易看出恒等映射是层同态，层同态的复合还是层同态. 因此 X 上的层构成一个范畴.

例子 1.6. 设 M 是一个赋予离散拓扑的集合，那么 $\pi\colon X \times M \to X$ 是 X 上的层.

例子 1.7. 设 $Y \subset X$. 则 $\pi\colon \pi^{-1}(Y) \to Y$ 是 Y 上的层. 其中 Y 和 $\pi^{-1}(Y)$ 都赋予子空间拓扑.

定义 1.8. 称 $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ 是 $\mathscr{S}$ 的子层，如果 $\pi\colon \mathscr{T} \to X$ 是 X 上的层.

命题 1.9. $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ 是 $\mathscr{S}$ 的子层当且仅当 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{S}$ 中的开集.

例子 1.10. 设 $(\mathscr{S}', \pi'), (\mathscr{S}, \pi)$ 是 X 上的层. 我们定义

$$\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}' := \bigcup_{x \in X} \mathscr{S}_x \times \mathscr{S}'_x$$

在其上赋予 $\mathscr{S} \times \mathscr{S}'$ 的子空间拓扑，则 $\tilde{\pi}\colon \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}' \to X$ 是 X 上的层.

例子 1.11.

2 Čech 上同调

Chapter 3

Kähler 流形