

交换代数

孙天阳

2023 年 2 月 2 日

目录

目录	1
1 概论	2
2 模论初步	4
3 Nakayama 引理	6
4 箭头	7
5 $\text{Hom}(M, N)$	8
6 $M \otimes N$	9
7 换环	12
8 分式化	13
9 局部化	16
10 Noether 环	17
11 Hilbert 基定理	18
12 Atiyah 第一章习题	19

1 概论

(1) What is CA? Basic object?

Study the category of commutative ring, and modules on them.

(2) What is necessary to attend the course?

(a) The theory ring, module, fields (category is not necessary, homological algebra is not needed.)

(b) It is better if you know manifold. (topological space)

(3) Why commutative algebra?

The application of the theory of commutative algebra is MORE important than the theory itself.

Motivation(I): Fermat's Last thm

$$x^p + y^p = z^p, x, y, z \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z} \text{ prime} \implies xyz = 0$$

- $p = 2$. Gauss introduce $\mathbb{Z}[i]$. 需要用到 $\mathbb{Z}[i]$ 的 UFD 性质.

注记. 自己试一下!

- $p = 3$ Euler $\mathbb{Z}[\zeta_3] = \{a + \zeta_3 b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $(\zeta_3)^3 = 1$. $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ 也有 UFD 性质, 所以证明可以推广. 但接下来对一般的 p 不对.

- p regular prime. Kummer $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. FLT holds for regular prime. 有更广泛的一个分解, Kummer 分解. 这是本门课的目的之一.

注记. $(*_p) : x^p + y^p = z^p$, $LHS = \prod_{k=0}^{p-1} (x + \zeta_p^k y)$, $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$

- $p > 2$ Faltings: $(*_p)$ has only finite solutions in the sense of $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$
Algebraic Geometry, Grothendieck 将交换代数融入到代数几何中
- $p > 2$ A. Wiles (Algebraic Geometry and representation theory)

References:

- Introduction to commutative algebra by Atiyah and Macdonald
- Commutative algebra by H. Matsumura 不推荐上来就看
- Commutative Ring theory by H. Matsumura 不涉及代数几何
- 数论 I: Fermat 的梦想和类域论 (加藤和也) 与本门课 topic 相关, 起点低, 非常推荐
- 古今数学思想 (克莱因)

Geometry

1. Line: $ax + by = c \subset \mathbb{R}^2$

2. circle: $x^2 + y^2 = r^2$

3. $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

思考: 对称矩阵的合同标准型给出二次曲面的分类.

4. What about $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$ if $\deg(f) = 3$?

Newton: there are 72 kinds of plane curves of $\deg = 3$.

Q: What if $\deg(f) > 3$?

What if $x \in \mathbb{R}^n$ or \mathbb{C}^n ?

What if $Z(f_1, \dots, f_r)$?

Classical Algebraic Geometry

Let $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, How can we study

$$Z(f_1, \dots, f_r) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}.$$

Arithmetic Algebraic Geometry (Grothendick)

$$Z(f_1, \dots, f_r) := \{x \in \mathbb{Q}^n \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}.$$

Cauculus differential and integration

Assume $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ open

differential: local

integration/cohomology: global

Key problem: $Z(f_1, \dots, f_r)$ may NOT be a manifold, such as $xy = 0$

2 模论初步

定义 2.1. 设 A 是一个环, M 是一个 Abel 群. 如果存在映射 $R \times M \rightarrow M$ 满足

- (1) $1x = x$
- (2) $a(bx) = (ab)x$
- (3) $a(x + y) = ax + ay$
- (4) $(a + b)x = ax + bx$

则称 M 是一个 A -模, 记作 $M \in \text{Mod}_A$.

例 2.2. $\text{Mod}_k = \text{Vect}_k$.

例 2.3. $\text{Mod}_{\mathbb{Z}} = \text{Abel 群}$.

例 2.4. $\text{Mod}_{k[t]}$ 是一个 k -线性空间和一个 k -线性变换.

例 2.5. 设 (π, E, X) 是向量丛, 则 $\Gamma(E)$ 是 $C^\infty(X)$ -模.

定义 2.6. 设 M, N 是 A -模, 称映射 $\varphi: M \rightarrow N$ 是 A -线性的, 如果

- (1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
- (2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.

给定一个环 A , 我们能如何造 A -模?

定义 2.7. 设 M 是 A -模. 如果子集 $N \subset M$ 满足

- (1) $N + N \subset N$
- (2) $A \cdot N \subset N$

则 N 也是 A -模. 称 N 为 M 的子模.

例 2.8. 子模的子模是子模.

例 2.9. $I \subset A$ 是 A 的子模 $\iff I \triangleleft A$.

定义 2.10. 设 M 是 A -模, $S \subset M$, 定义

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum a_i s_i \mid a_i \in A, s_i \in S \right\}.$$

则 $\langle S \rangle$ 是 M 的子模, 称为由 S 生成的子模.

定义 2.11. 称 M 是有限生成模, 如果存在有限集 $S \subset M$ 使得 $\langle S \rangle = M$.

生成元之间可能存在关系. 在线性空间的情形中, 我们总是可以把线性相关的向量中的一个表达为其他向量的线性组合, 从而在生成元中将其除去; 但是在一般的模的情形中, 即使生成元们是线性相关的, 我们可能也并不能去除其中的任何一个, 比如极端情况下, \mathbb{Z}_2 作为 \mathbb{Z} -模的生成元 $\bar{1}$ 自身便是线性相关的.

在线性空间的情形中, 我们从生成元集中剔除掉冗余的生成元最后得到线性无关的生成元集, 并且可以证明不同的线性无关的生成元集中元素的个数是相等的. 在一般的模的情形中, 当然也有可能出现线性无关的生成元集这种情况, 并且也可以证明, 一旦存在线性无关的生成元集, 任何两个线性无关的生成元集的元素个数就是相等的 (但也不是说从任何生成元集我们可以通过类似线性空间中的操作剔除掉冗余的生成元最后得到线性无关的生成元集, 比如 \mathbb{Z} 中 $\{2, 3\}$ 可以作为生成元集, 但是 $\{2\}$ 和 $\{3\}$ 都不是生成元). 我们把线性无关的生成元集称作基, 把有线性无关的生成元集的模称为自由模 (线性空间总是自由的), 把基向量的个数称作自由模的维数.

从上面的例子中我们可以看到, 一个有限生成模 (即使是自由模) 可以存在两组元素个数不同的生成元集, 它们可能各自都是线性相关的, 但是都是无可剔除的. 比如作为 \mathbb{Z} -模的 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 中 $\{\bar{1}\}$ 和 $\{\bar{2}, \bar{3}\}$, 它们各自都是生成元集, 它们各自都是线性相关的, 它们都是剔除掉任何一个元素后都不再是生成元集.

命题 2.12.

3 Nakayama 引理

引理 3.1. 设 A 是局部环, \mathfrak{m} 是其极大理想. 设 M 是有限生成 A -模, 那么 $\mathfrak{m}M \implies M = 0$.

定义 3.2. 称环 A 是局部环, 如果它只有一个极大理想.

引理 3.3. 设 \mathfrak{m} 是环 A 的极大理想, 则 \mathfrak{m} 是唯一的极大理想 $\iff A \setminus \mathfrak{m} = A^*$.

证明.

\implies 设 $x \notin \mathfrak{m}$ 且 $x \notin A^*$, 则 $(x) \subset \mathfrak{m}' \subsetneq A^*$, 矛盾.

\longleftarrow 设 \mathfrak{m}' 是 A 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}' \subset A \setminus \{A^*\} = \mathfrak{m}$, 所以 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$.

□

4 箭头

命题 4.1. 如下陈述等价

- (1) $\varphi: M \rightarrow N$ 是单射
- (2) 任意 $K \xrightarrow{\psi} M, \varphi \circ \psi = 0 \implies \psi = 0$

命题 4.2. 如下陈述等价

- (1) $\varphi: M \rightarrow N$ 是满射
- (2) 任意 $N \xrightarrow{\psi} K, \psi \circ \varphi = 0 \implies \psi = 0$

命题 4.3. 设 $\varphi: M \rightarrow N$ 是箭头. 那么箭头 $\iota: \ker \varphi \hookrightarrow M$ 被如下性质唯一确定

- (1) $\varphi \circ \iota = 0$
- (2) $\forall \psi: K \rightarrow M$ s.t. $\varphi \circ \psi = 0, \exists! f: K \rightarrow \ker \varphi$ s.t. $\psi = \iota \circ f$

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{\psi} & M & \xrightarrow{\varphi} & N \\
 & \searrow f & \uparrow \iota & & \\
 & & \ker \varphi & &
 \end{array}$$

注记.

- ι 具有性质 $\varphi \circ \iota = 0$.
- 设 $\psi: K \rightarrow M$ 具有性质 $\varphi \circ \psi = 0$, 那么对任意的 $f: K' \rightarrow K, \psi': K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\psi} M$ 也具有性质 $\varphi \circ \psi' = 0$. 我们认为 ψ' 是通过 ψ 得出来的, 认为 ψ 排队比 ψ' 更靠前.
- 考虑集合 $\mathcal{S} = \{\psi: K \rightarrow M \mid \varphi \circ \psi = 0\}$, 我们问有没有在上述意义下排队最靠前的元素, 即, 任何元素都可以表示为这个元素与某个映射的复合, 这正是命题 4.3 中 (2) 所说的事情.

命题 4.4. 设 $\varphi: M \rightarrow N$ 是箭头. 那么箭头 $\pi: N \rightarrow \text{coker } \varphi$ 被如下性质唯一确定

- (1) $\pi \circ \varphi = 0$
- (2) $\forall \psi: N \rightarrow K$ s.t. $\psi \circ \varphi = 0, \exists! f: \text{coker } \varphi \rightarrow K$ s.t. $\psi = f \circ \pi$

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\varphi} & N & \xrightarrow{\psi} & K \\
 & & \downarrow \pi & \nearrow f & \\
 & & \text{coker } \varphi & &
 \end{array}$$

注记. 用箭头的语言才能看出 \ker 与 coker 之间的对偶.

5 Hom(M, N)

定义 5.1. 设 $M, N \in \text{Mod}_R$. 定义 $\text{Hom}_R(M, N) \in \text{Mod}_R$ 如下

- (1) 作为集合, $\text{Hom}_R(M, N) = \{f: M \rightarrow N \mid f \text{ 是 } R\text{-线性的}\}$.
- (2) 加法. $(f + g)(x) := f(x) + g(x), \forall x \in M$.
- (3) 数乘. $(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \forall x \in M$.

例 5.2. $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \in \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$, 则 $M^* = \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

定义 5.3. 设 $\varphi: M \rightarrow M'$, 则可以定义拉回映射

$$\begin{aligned} \varphi^*: \text{Hom}(M', N) &\longrightarrow \text{Hom}(M, N) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \varphi \end{aligned}$$

和推出映射

$$\begin{aligned} \varphi_*: \text{Hom}(N, M) &\longrightarrow \text{Hom}(N, M') \\ \psi &\longmapsto \varphi \circ \psi \end{aligned}$$

Hom 函子的正合性

命题 5.4. 如下两条等价

- (1) 序列 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \rightarrow 0$ 是正合的.
- (2) 对任意 N , 序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\psi^*} \text{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Hom}_R(M_1, N)$ 是正合的.

证明.

$$\begin{aligned} &(2) \text{中序列在 } \text{Hom}_R(M_3, N) \text{ 处正合} \\ &\iff \psi^*: \text{Hom}_R(M_3, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M_2, N), f \mapsto f \circ \psi \text{ 是单射} \\ &\iff \forall f \text{ s.t. } f \circ \psi = 0 \implies f = 0 \\ &\iff \psi \text{ 是满射} \\ &\iff (1) \text{中序列在 } M_3 \text{ 处正合} \end{aligned}$$

□

6 $M \otimes N$

问题：模中的元素不能做乘法.

例 6.1. 设 R 是环, $A, B, C \in R^{n \times n}$, 则

$$(1) (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$(2) r(A \cdot B) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB)$$

将上述乘法的本质属性提炼出来, 我们得到

定义 6.2. 设 $M, N, L \in \text{Mod}_R$, 称映射 $\varphi: M \times N \rightarrow L$ 是双线性的, 如果

$$(1) \varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$$

$$\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$$

$$(2) r\varphi(m, n) = \varphi(rm, n) = \varphi(m, rn)$$

定义 6.3. 设映射 $\otimes: M \times N \rightarrow M \otimes N$ 满足, 对任意的双线性映射 $\varphi: M \times N \rightarrow L$, 存在唯一的线性映射 $\psi: M \otimes N \rightarrow L$ 使得如下图表交换

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\otimes} & M \otimes N \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & L \end{array}$$

称 $M \otimes N$ 是 M 和 N 的张量积, 记 (m, n) 的像为 $m \otimes n$.

张量积可显式构造为 $R^{\oplus M \times N} / \sim$, 其中 \sim 是由

$$\left\{ \begin{array}{l} ((m_1 + m_2), n) - (m_1, n) - (m_2, n) \\ (m, (n_1 + n_2)) - (m, n_1) - (m, n_2) \\ (rm, n) - r(m, n) \\ (rm, n) - (m, rn) \end{array} \right.$$

生成的子模. 可验证 $R^{\oplus M \times N} / \sim$ 确实满足张量积的定义

$$\begin{array}{ccccc} M \times N & \longrightarrow & R^{\oplus M \times N} & \longrightarrow & R^{\oplus M \times N} / \sim \\ & \searrow \varphi & \downarrow \varphi & \swarrow \psi & \\ & & L & & \end{array}$$

但该定义并不好用, 原因是生成元 $\{x \otimes y\}$ 之间的关系太复杂, $\alpha = \sum r_i x_i \otimes y_i$ 没有唯一的表达式.

命题 6.4. 设 $M, N, L \in \text{Mod}_R$, 那么

$$(1) M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$$

$$(2) (M \otimes_R N) \otimes_R L \simeq M \otimes_R (N \otimes_R L) \simeq M \otimes_R N \otimes_R L$$

$$(3) (M \oplus N) \otimes_R L \simeq (M \otimes_R L) \oplus (N \otimes_R L)$$

$$(4) R \otimes_R M \simeq M$$

注记. \oplus 和 \otimes 分别看起来像 Mod_R 中的加法和乘法. 类比 \mathbb{Z} 中乘法的深刻, 可知 \otimes 的重要性.

命题 6.5. 设 $f: M_1 \rightarrow M_2, g: N_1 \rightarrow N_2$ 是 \mathbb{R} -线性的, 那么可定义 \mathbb{R} -线性映射

$$f \otimes g: M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2, \quad x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes g(y).$$

命题 6.6. 设 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$, 则如下图表交换

$$\begin{array}{ccc} M_1 \otimes N & \xrightarrow{f_1 \otimes \text{Id}_N} & M_2 \otimes N \\ & \searrow (f_2 \circ f_1) \otimes \text{Id}_N & \downarrow f_2 \otimes \text{Id}_N \\ & & M_3 \otimes N \end{array}$$

推论 6.7. 如果 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是同构, 那么 $f \otimes \text{Id}_N: M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$ 也是同构.

命题 6.8. 如果

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

是正合的, 那么

$$M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

也是正合的.

推论 6.9. 如果 $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ 是满射, 那么 $M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$ 也是满射.

证明. 序列

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

是正合的, 由命题 6.8, 序列

$$\ker f \otimes N \longrightarrow M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow 0$$

也是正合的. □

推论 6.10. 如果 M, N 是有限生成 R -模, 那么 $M \otimes_R N$ 也是有限生成 R -模.

证明. 存在满射

$$R^r \longrightarrow M, \quad R^s \longrightarrow N.$$

用两次推论 6.9, 得到

$$R^r \otimes R^s \longrightarrow R^r \otimes N \longrightarrow M \otimes N$$

也是满射. □

推论 6.11. 设 $N \subset M$ 是子模, 那么

$$(M/N) \otimes P \cong \text{coker}(N \otimes P \longrightarrow M \otimes P).$$

证明. 序列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

是正合的, 由命题 6.8, 序列

$$N \otimes P \longrightarrow M \otimes P \longrightarrow (M/N) \otimes P \longrightarrow 0$$

也是正合的. □

例 6.12. 考虑正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

同时 $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 得到

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

由此我们看到张量积不保持单射. 由命题 6.8 我们还知道 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

注记. 在 $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中 $2 \otimes \bar{1} \neq 0$, 但在 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中 $2 \otimes \bar{1} = 0$.

下面我们来证明命题 6.8.

命题 6.13. 存在自然同构

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \cong \mathrm{Bilinear}_R(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)).$$

命题 6.8 的证明.

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, \mathrm{Hom}(N, P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, \mathrm{Hom}(N, P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1, \mathrm{Hom}(N, P))$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3 \otimes N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2 \otimes N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1 \otimes N, P)$$

$$M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

□

7 换环

设有环同态 $\sigma: S \rightarrow R$, 则任意 R -模 M 自然有 S -模结构

$$S \times M \xrightarrow{\sigma \times \text{Id}} R \times M \xrightarrow{\cdot} M.$$

特别地, R 也是 S -模. 一个简单的例子是 $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 因此 \mathbb{C} -模总可以看成 \mathbb{R} -模.

下面考虑一个相反的问题, 如何将一个 S -模变为一个 R -模? 拿具体的例子来说就是如何将一个 \mathbb{R} -模变为一个 \mathbb{C} -模? 这是我们熟悉的复化的过程.

对于 $M \in \text{Mod}_S$, 我们赋予 $M \otimes_S R$ 以 R -模结构

$$\begin{aligned} \mu: R \times M \otimes_S R &\longrightarrow M \otimes_S R \\ r, x \otimes r' &\longmapsto x \otimes (rr') \end{aligned}$$

验证良定性: 固定 $r \in R$, 则

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \otimes_S R \\ x, r' &\longmapsto x \otimes (rr') \end{aligned}$$

是 S -双线性映射, 由张量积的泛性质, μ 是良定的. 也容易验证在数乘 μ 下 $M \otimes_S R$ 确实是 R -模.

例 7.1. 设 $M \in \text{Mod}_R$, $I \triangleleft R$, 则 $M \otimes_R R/I \in \text{Mod}_{R/I}$.

命题 7.2. $R^n \cong R^m \iff m = n$.

证明一. 设 $I \triangleleft R$ 是极大理想. 因为张量积保持同构, 所以我们有

$$(R/I)^n \cong (R/I \otimes_R R^n) \cong (R/I \otimes_R R^m) \cong (R/I)^m$$

但 R/I 是域, 由线性空间的相关结论知 $m = n$. □

证明二. 参见[近世代数笔记](#)有限生成 Abel 群. □

8 分式化

设 A 是环, $S \subset A$ 是子集. 我们希望找到一个环, 记作 $S^{-1}A$, 使得 A 映入到 $S^{-1}A$ 中时把所有 S 中元素都映为可逆元. 一个简单的观察是, 如果 a, b 各自的像是可逆元, 那么 ab 的像也是可逆元, 因此如果 $a, b \in S$, 不妨把 ab 添加进 S 中, 并不影响我们的讨论. 为了方便, 我们也要求 $1_A \in S$.

定义 8.1. 称 S 是乘法封闭的, 如果 $1_A \in S$ 且 $S \cdot S \subset S$.

例 8.2. 设 A 是整环, 那么 $A \setminus \{0\}$ 是乘法封闭的.

定义 8.3. 设 S 是乘法封闭的. 定义

$$S^{-1}A = \{(a, s) \mid a \in A, s \in S\} / \sim$$

其中 $(a, s) \sim (b, t)$ 当且仅当存在 $u \in S$ 使得 $(at - bs)u = 0$. 记

$$\frac{a}{s} := (a, s) \pmod{\sim}.$$

如下定义加法和乘法

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &:= \frac{at + bs}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} &:= \frac{ab}{st} \end{aligned}$$

于是 $S^{-1}A$ 成为环, 其零元为 $\frac{0}{1}$, 幺元为 $\frac{1}{1}$. 映射

$$\begin{aligned} \iota: A &\longrightarrow S^{-1}A \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

是环同态.

验证. \sim 是等价关系. 反身性与对称性显然, 只验证传递性. 从传递性的验证过程中可以看出, 为什么这里我们要求 $(at - bs)u = 0$ 而不是 $at - bs = 0$. 假设你要求 $at - bs = 0$, 设 $(a, s) \sim (b, t), (b, t) \sim (c, r)$, 那么我们有 $at = bs, br = ct$, 有 $rat = rbs = sbr = sct$ 即 $(ar - cs)t = 0$. 因为这里 A 不一定是整环, 所以我们从 $(ar - cs)t = 0$ 得不到 $ar - cs = 0$.

验证加法良定. 设 $(a_1s_2 - a_2s_1)u = 0$, 需要找一个元素 v , 使得

$$((a_1t + bs_1)s_2t - s_1t(a_2t + bs_2))v = (a_1s_2 - a_2s_1)t^2v = 0.$$

取 $v = u$ 即可. 验证乘法良定. 假设同上, 需要找一个元素 w , 使得

$$(a_1bs_2 - s_1ta_2b)w = (a_1s_2 - a_2s_1)btw = 0.$$

取 $w = u$ 即可. 容易看出 $\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{1}$ 确实是零元和幺元, ι 确实是环同态. □

注记. $\ker \iota = \{a \in A \mid \exists s \in S \text{ s.t. } as = 0\}$.

注记. 假设 $0 \in S$, 则 $S^{-1}A$ 是零环. 由 S 的乘法封闭性, 我们也不希望一对零因子出现在 S 中.

例 8.4. 设 A 是整环, $S = A \setminus \{0\}$, 则 $S^{-1}A = \text{Frac}(A)$.

例 8.5. 设 $a \in A$, 记 $S_a = \{a^n\}_{n \geq 0}$, 记 $A_a := S_a^{-1}A$.

例 8.6. 记 $S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$. 容易看出 $S_{\mathfrak{p}}$ 是乘法封闭的当且仅当 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. 记 $A_{\mathfrak{p}} := S_{\mathfrak{p}}^{-1}A$.

命题 8.7. 给定任意的 $f: A \rightarrow B$ 满足 $f(S) \subset B^*$, 存在唯一的环同态 $g: S^{-1}A \rightarrow B$, 使得

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & S^{-1}A \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & B \end{array}$$

交换. 满足以上性质的 $\iota: A \rightarrow S^{-1}A$ 是唯一的.

证明. 由图表的交换性, $g\left(\frac{a}{s}\right) = f(a)f(s)^{-1}$, 只需验证 g 是良定的. 设 $u \in S$ 使得 $(a_1s_2 - a_2s_1)u = 0$, 用 f 作用得 $(f(a_1)f(s_2) - f(a_2)f(s_1))f(u) = 0 \xrightarrow{f(u) \in B^*} f(a_1)f(s_1)^{-1} = f(a_2)f(s_2)^{-1}$. \square

定义 8.8. 设 M 是 A -模, 设 $S \subset A$ 是乘法封闭的. 定义

$$S^{-1}M = \{(m, s) \mid m \in M, s \in S\} / \sim$$

其中 $(m, s) \sim (n, t)$ 当且仅当存在 $u \in S$ 使得 $(mt - ns)u = 0$. 记

$$\frac{m}{s} := (m, s) \pmod{\sim}.$$

如下定义加法和数乘

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{n}{t} &:= \frac{mt + ns}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{n}{t} &:= \frac{an}{st} \end{aligned}$$

于是 $S^{-1}M$ 成为 $S^{-1}A$ -模. 设 $f: M \rightarrow N$ 是 A -线性映射, 定义

$$S^{-1}f: S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N, \quad \frac{m}{s} \longmapsto \frac{f(m)}{s}$$

则 $S^{-1}f$ 是 $S^{-1}A$ -线性映射.

命题 8.9. 设 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ 是正合的, 那么

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P$$

也是正合的.

证明.

- $g \circ f = 0 \implies S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0 \implies \text{Im } S^{-1}f \subset \ker S^{-1}g$.
- 设 $\frac{n}{s} \in \ker S^{-1}g$, 则 $\frac{g(n)}{s} = \frac{0}{1}$, 按定义即存在 $t \in S$ 使得 $tg(n) = 0$. 因为 g 是 A -线性的所以 $tn \in \ker g = \text{Im } f$, 所以存在 $m \in M$ 使得 $tn = f(m)$. 所以

$$S^{-1}\left(\frac{m}{ts}\right) = \frac{f(m)}{ts} = \frac{tn}{ts} = \frac{n}{s}.$$

\square

命题 8.10. 存在自然的 $S^{-1}A$ -模同构

$$\varphi: S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M, \quad \frac{a}{s} \otimes m \longmapsto \frac{am}{s}.$$

证明. 容易验证

$$\tilde{\varphi}: S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M, \quad \left(\frac{a}{s}, m\right) \longmapsto \frac{am}{s}$$

是双 A -线性映射, 从而诱导了 A -线性映射 φ . 可验证 φ 也是 $S^{-1}A$ -线性的.

- $\varphi\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = \frac{m}{s}$, 所以 φ 是满射.
- 任取 $\frac{1}{m} \otimes m \in \ker \varphi$, 存在 $t \in s$ 使得 $tm = 0$, 所以 $\frac{1}{m} \otimes m = \frac{1}{ts} \otimes tm = 0$.

□

引理 8.11. $S^{-1}A \otimes_A M$ 中的每个元素都形如 $\frac{1}{s} \otimes m$.

证明.

$$\sum \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \xrightarrow{\text{通分}} \sum \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum a_i t_i m_i.$$

□

推论 8.12. $S^{-1}A$ 是平坦 A -模. 特别地, 对于 A 是整环, $\text{Frac} A$ 是平坦 A -模.

命题 8.13.

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_A N).$$

证明.

$$\begin{aligned} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N &\cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) \\ &\cong M \otimes_A (S^{-1}A \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A) \otimes_A N \\ &\cong M \otimes_A S^{-1}A \otimes_A N \\ &\cong S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \\ &\cong S^{-1}(M \otimes_A N) \end{aligned}$$

□

注记. 这个命题不应该放这, 应该放张量积那. 这就是张量积的复化同构于复化的张量积.

命题 8.14. 设 $N_1, N_2 \subset M$ 是子模, 则

- (1) $S^{-1}(N_1 + N_2) = S^{-1}N_1 + S^{-1}N_2$.
- (2) $S^{-1}(N_1 \cap N_2) = S^{-1}N_1 \cap S^{-1}N_2$.
- (3) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$.

9 局部化

命题 9.1. \mathfrak{p}_p 是 A_p 唯一的极大理想, 从而 A_p 是局部环.

证明.

□

10 Noether 环

定义 10.1. 设 M 是 R -模. 称 M 是诺特的, 如果 M 的任意子模是有限生成的.

引理 10.2. $M \in \text{Mod}_R$ 是诺特的当且仅当 M 的任意子模链

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$$

是稳定的, 即存在 N 使得 $M_N = M_{N+1} = \cdots$.

命题 10.3. 设

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

是短正合列. 那么 M 是诺特的当且仅当 M' 和 M'' 都是诺特的.

证明. □

推论 10.4. 设 M_1, M_2 是诺特的, 则 $M_1 \oplus M_2$ 也是诺特的.

证明.

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0.$$

□

推论 10.5. 设 $M \in \text{Mod}_R$ 是有限生成 R -模, 则 M 是诺特的.

证明. 结合命题 2.12、推论 10.4 和命题 10.3. □

命题 10.6. 设 R 是诺特的, 则 $S^{-1}R$ 也是诺特的.

11 Hilbert 基定理

定义 11.1. 设 R 是环, 一个 R -代数是

- (1) 一个环 A 和一个环同态 $f: R \rightarrow A$, 或等价地
- (2) 一个 R -模 A 和一个结合、交换、含么的 R -双线性二元运算 $A \times A \rightarrow A$.

注记.

- 环 $A \iff$ 结合、交换、含么、分配的二元运算
- 给定环同态 $f: R \rightarrow A$, 定义

$$R \times A \longrightarrow A, \quad (r, a) \longmapsto f(r)a.$$

- $(r_1 + r_2) \cdot a = f(r_1 + r_2)a = (f(r_1) + f(r_2))a = f(r_1)a + f(r_2)a = r_1 \cdot a + r_2 \cdot a$
- $r \cdot (a_1 + a_2) = f(r)(a_1 + a_2) = f(r)a_1 + f(r)a_2 = r \cdot a_1 + r \cdot a_2$
- $1_R \cdot a = f(1_R)a = 1_A a = a$
- $r_1 \cdot (r_2 \cdot a) = f(r_1)(f(r_2)a) = (f(r_1)f(r_2))a = f(r_1 r_2)a = (r_1 r_2) \cdot a$

- 给定数乘 $R \times A \rightarrow A$, 定义环同态

$$f: R \longrightarrow A, \quad r \longmapsto r \cdot 1_A$$

- $f(1_R) = 1_R \cdot 1_A = 1_A$
- $f(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2) \cdot 1_A = r_1 \cdot 1_A + r_2 \cdot 1_A = f(r_1) + f(r_2)$
- $f(r_1)f(r_2) = (r_1 \cdot 1_A)(r_2 \cdot 1_A) = (r_1 r_2) \cdot (1_A 1_A) = (r_1 r_2) \cdot 1_A = f(r_1 r_2)$

定义 11.2. 设 A 是 R -代数, 称 $B \subset A$ 是子代数, 如果

- (1) B 是子环且 $f(R) \subset B$, 或等价地
- (2) B 是子模且对二元运算封闭.

注记.

- 子环 \iff 对二元运算封闭
- $R \cdot B \subset B + 1_A \in B \implies f(R) \subset B$
- $f(R) \subset B + BB \subset B \implies R \cdot B \subset B$

命题 11.3. 设 A 是有限生成 R -代数, 则 $A \cong R[x_1, \dots, x_n]/I$.

定理 11.4 (Hilbert 基定理). 设 R 是诺特的, A 是有限生成 R -代数, 则 A 也是诺特的.

12 Atiyah 第一章习题

15. 设 A 是环. 对于 $E \subset A$, 记 $V(E)$ 为 $\text{Spec } A$ 中所有包含 E 的元素. 证明

(1) 如果 \mathfrak{a} 是由 E 生成的理想, 那么 $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

(2) $V(0) = \text{Spec } A$, $V(1) = \emptyset$.

(3) $V(\cup_{i \in I} E_i) = \cap_{i \in I} V(E_i)$.

(4) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

证明.

(1)

(2) 显然.

(3)

(4)

□

16.

17. For each

21. 设 $\phi: A \rightarrow B$ 是环同态, 它诱导了 $\phi^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$.

26. 设 X 是一个紧 Hausdorff 空间, $C(X)$ 表示 X 上的实值连续函数环.