数学分析

孙天阳

目录

Chapter 1

函数的导数

1　导数的计算

定理 1.1 (求导的四则运算). 设函数 f 和 g 在点 x 处可导，则 $f \pm g$，fg 也在点 x 处可导；如果 $g(x) \neq 0$，那么函数 $\dfrac{f}{g}$ 也在点 x 处可导. 精确地说，我们有以下公式：

(1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$；

(2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$；

(3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

2 微分学的中值定理

定理 2.1. 如果 f 在 $[a,b]$ 上可导，那么：

(1) 导函数 f' 可以取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值；

(2) f' 无第一类间断点.

证明. (1) 先证明：如果 $f'(a)f'(b) < 0$，那么必有 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$. 不妨设 $f'(a) > 0$，$f'(b) < 0$. 由于

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

所以存在 $\delta_1 > 0$，当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时，−

□

Part I

Chapter 2

数项级数

1 数项级数

- 以下讨论中出现的都是实数
- 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 := 部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛
- 柯西收敛原理：任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，只要 $n > N, p \geqslant 0$，就有

$$|\sum_{k=n}^{n+p} a_k| < \varepsilon$$

  - 由此得到无穷级数收敛的必要条件：$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当对某一个选定的 $m \in \mathbb{Z}^+$ 无穷级数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛
  - 虽然这是句废话但是还有点实用价值，用比较判别法时有时从某项起开始放缩比较方便
- 数项级数的各种敛散性判别法的主要目的是确定函数项级数的定义域

2 绝对收敛

定理 2.1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，那么对任意双射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 也绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

证明. 分两步，先讨论正项级数的情况，再将一般的情况拆成两个正项级数的情况.

(1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,则对任意 $N \in \mathbb{N}$,$\sum\limits_{n=1}^{N} a_{\sigma_n} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$ 收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 同理可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$.

(2) 记

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0 \\ 0, & a_n > 0 \end{cases}.$$

易知有

$$0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|,$$

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 结合 (1) 即证.

□

3 双边级数

定义 3.1. 称双边级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ 收敛到 $S \in \mathbb{R}$，如果

(1) 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，对于任意 $k, l > N$ 成立

$$\left|\sum_{n=-k}^{l} a_n - S\right| < \varepsilon.$$

或

(2) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和级数 $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n$ 分别收敛到 $S^+, S^- \in \mathbb{R}$，且 $S = S^+ + S^-$.

命题 3.1. 上述两个定义等价.

证明.

- (2) $\Longrightarrow$ (1) 设 $S = S^+ + S^-$. 由条件，存在 N，使得只要 $k, l > N$，便成立

  $$\left|\sum_{n=0}^{k} a_n - S^+\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{n=-1}^{-l} a_n - S^-\right| < \varepsilon.$$

  那么

  $$\left|\sum_{n=-l}^{k} a_n - S\right| = \left|\left(\sum_{n=0}^{k} a_n - S^+\right) + \left(\sum_{n=-1}^{-l} a_n - S^-\right)\right| < 2\varepsilon.$$

- (1) $\Longrightarrow$ (2)

  对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，对于任意 $k > l > N$，有

  $$\left|\sum_{n=l+1}^{k} a_n\right| = \left|\left(\sum_{n=-N}^{k} a_n - S\right) - \left(\sum_{n=-N}^{l} a_n - S\right)\right| < 2\varepsilon.$$

  由 Cauchy 收敛原理，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，记其和为 S^+. 同理可证 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，记其和为 S^-.

  设 $S' = S^+ + S^-$. 则由 (2) $\Longrightarrow$ (1) 知 S' 也满足 (1) 中条件.

  对于任意 $\varepsilon > 0$，成立 $|S - S'| < 2\varepsilon$，因此 $S = S'$.

$\square$

4 二重级数

5 无穷乘积

定义 5.1. 设 $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$ 是一个无穷乘积，称

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 \cdots p_n \quad n = 1, 2, \cdots$$

为这个无穷乘积的部分乘积. 如果当 $n \to \infty$ 时，数列 $\{P_n\}$ 有有限的极限 P，且 $P \neq 0$，则称这个无穷乘积时收敛的，记为 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$. 如果 $\{P_n\}$ 的极限不存在，或者虽然存在但等于 0，则称它是发散的.

类似于无穷级数，容易得到无穷乘积收敛的必要条件.

命题 5.1. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

由于收敛的无穷乘积的通项 $p_n \to 1$，所以从某个 n 起，p_n 都是正数. 因此在整个无穷乘积中，负因子只能有有限个，所以不妨假定所有的 p_n 都是正的. 在下面的讨论中，把 p_n 写成

$$p_n = 1 + a_n \quad n = 1, 2, \cdots$$

其中 $-1 < a_n < +\infty$. 这样，$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 收敛的必要条件便是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Chapter 3

函数序列与函数项级数

1 一致收敛性

1.1 引言

前面我们研究过无穷序列与它的极限，无穷级数与它的和. 这些序列的元素或者这些级数的项都是常数.

实际上，有时在它们里包括一些作为参数的变量，而在研究的时候，这些变量看作是确定的常数.

譬如，当我们证明，序列

$$1+\frac{x}{1},\left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\left(1+\frac{x}{3}\right)^3,\cdots,\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\cdots$$

有极限

$$\mathrm{e}^x$$

或者级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

有和

$$\ln(1+x)$$

的时候，x 是当作常数的.

序列的元素与它的极限的函数性质，或者级数的项与它的和的函数性质，以前是完全不考虑的；而现在引起了我们的注意.

假设已知一个序列，他的元素为同一个变量 x 的函数，而且确定在同一个变化区域 $\mathcal{X}$ 上，

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots.$$

设对于 $\mathcal{X}$ 中的每一个 x，这个序列有有限极限；因为极限完全由 x 的值来确定，所以它也是 x 的函数：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),$$

我们称 $f(x)$ 为序列 f_nx 的极限函数.

现在我们不只是对于在每个个别的 x 值上，有极限存在的问题有兴趣，而对于极限函数的函数性质也有兴趣. 为了预先明了这里产生了什么样性质的新问题，我们从这些问题中举出一个来作为例子讲一讲.

假定序列 $\{f_n(x)\}$ 的元素都是在区间 $\mathcal{X} = [a, b]$ 内 x 的连续函数，是否能保证极限函数 $f(x)$ 也是 $[a, b]$ 上的连续函数？

1.2 一致收敛

- 判断函数列一致收敛
  - 考虑波峰的衰减性，可以结合 PDE 的衰减估计来理解
    - 求导直接得到取最值的点以及最值
    - 放缩进行估计，最好与 x 无关只与 n 有关
  - 能否有一个一致的 N？将需要的 n 用 ε 和 x 表示出来，然后遍历 x，看 n 是否会增长到无穷
- 判断函数项级数一致收敛
  - 如果能显式地写出部分和与和函数，可转化成余式函数列是否一致收敛到 0 的问题
  - 如果满足莱布尼兹判别法，即使不能显式地写出部分和与和函数，我们也可以把余式放缩到它的第一项进行估计
- 不一致性往往积聚在某些点的附近，但并不是说单独某一个点是坏的

例 1.1. 设序列 $\{f_n(x)\} = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$，已知在区间 $[0,1]$ 上其极限函数为 $f(x)=0$，研究这一收敛是否是一致的.

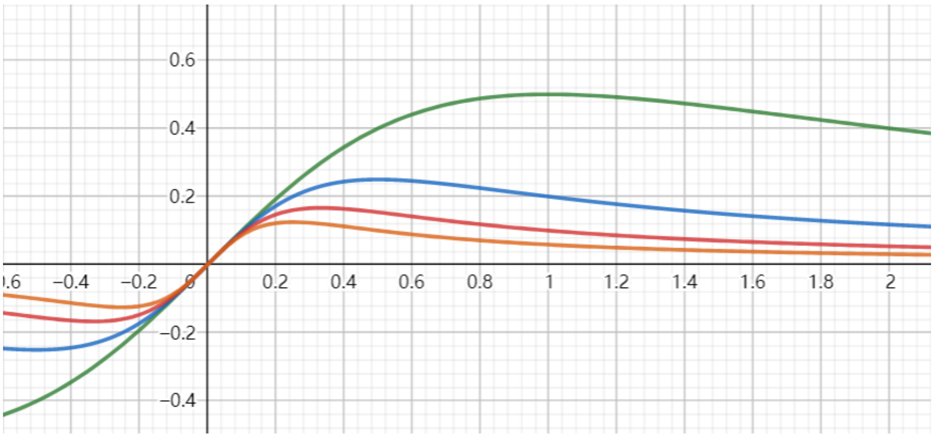

图 3.1: $f(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$

证明. 对固定的 $x \in (0,1]$，当 n 增大时 $f_n(x)$ 是严格单调递减的.

对固定的 n，对 $f_n(x)$ 求导，得

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

当 $x \in [0, \frac{1}{n}]$ 时，$f(x)$ 递增；当 $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ 时，$f(x)$ 递减，因此

$$\max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}.$$

我们来描述一下它的图景：随着 n 的增大，波峰越来越矮，并且越来越左移；最终波峰也趋于 0.

□

例 1.2. 设序列 $\{f_n(x)\} = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，已知在区间 $[0,1]$ 上其极限函数为 $f(x)=0$，研究这一收敛是否是一致的.

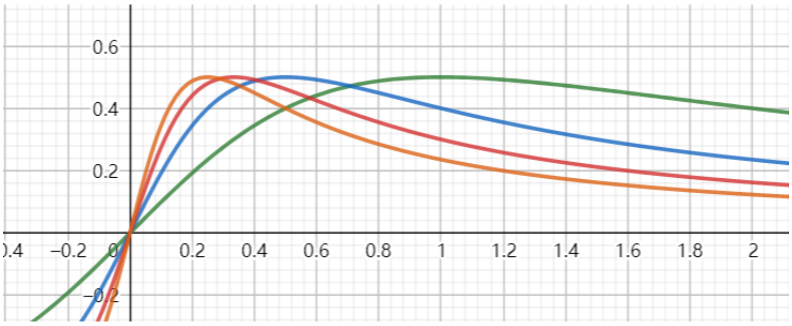

图 3.2: $f(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

证明. 对固定的 $x \in (0,1]$，

$$f_n(x) = \frac{x}{\dfrac{1}{n} + xn}$$

当 $n \in (0, \dfrac{1}{\sqrt{x}}]$ 时，$f_n(x)$ 单增；当 $n \in [\dfrac{1}{\sqrt{x}}, +\infty)$ 时，$f_n(x)$ 单减.

这就已经和上一个例子中的情况不同，上一个的例子每个点 x 都是一直降的，而这个例子中会先增长再降，离 0 越近的 x 增长的阶段越长.

让我们再对固定的 n 关于 x 求导，

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

和上例中一样，当 $x \in [0, \dfrac{1}{n}]$ 时，$f(x)$ 递增；当 $x \in [\dfrac{1}{n}, 1]$ 时，$f(x)$ 递减，因此

$$\max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

所以它表现出和上一个例子截然不同的情况，随着 n 的增大，虽然波峰仍然是在向左移动，但波峰的高度一直保持着 $\dfrac{1}{2}$ 不动，这样自然不会一致收敛到 0 了.

注记. 可以结合 PDE 波动方程的逐点衰减估计和一致衰减估计来理解.

每一个 n，总有一个点没有衰减下去；每一个 x，总有一个 n 使得它已经衰减下去.

□

例 1.3. 设序列 $\{f_n(x)\} = \dfrac{1}{1+nx}$，研究其一致收敛性.

证明. □

例 1.4. 设序列 $\{f_n(x)\} = 2n^2xe^{-n^2x^2}$，研究其一致收敛性.

例 1.5. 设序列 $\{f_n(x)\} = x^n$，研究其一致收敛性.

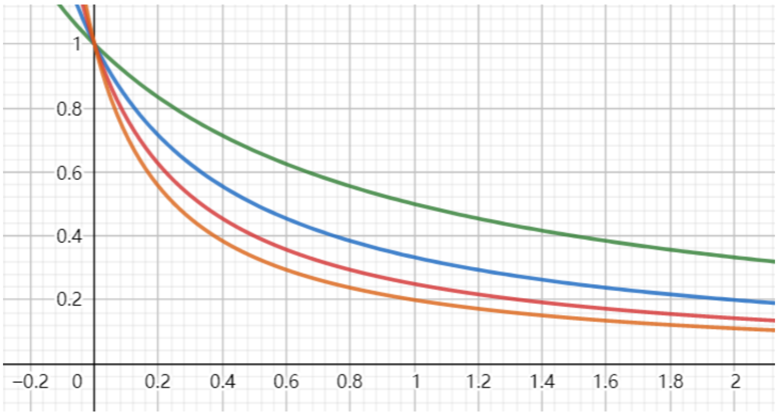

图 3.3: $f(x)=\dfrac{1}{1+nx}$

证明. 通过这个例子我想说明的是，导致不一致收敛的到底是谁. 我们可以看到，不一致收敛性集中在 $x=1$ 附近，但真正坏的并不是 $x=1$ 这个点，反而 $x=1$ 这个点好的不得了，对任意的 ε 从 $n=1$ 开始就都能成立. 所以真正坏的点是 $x=1$ 附近的点，它们最终难逃趋于零的命运，但对任意的 n 函数 x^n 还是一个连续函数，只要 x 趋近于 1 它的值 x^n 就也会趋近于 1，这就导致不一致收敛.

还可以这样理解为什么 $x=1$ 本身并不是造成不一致收敛的原因，因为我们想取一个一致的足够大的 N，而有限个点是不会对我们能不能取到这样一个 N 产生阻碍的.

对固定的 $x\in(0,1)$，若想令 n 使得 $x^n<\varepsilon$，就必须满足

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x},$$

而当 $x\to 1$ 时，表达式的右边无限增加，所以知道没有一个数 n 可以对于所有的 x 值，适合不等式. 所以我们再次重申，是 $x=1$ 附近的性态而不是 $x=1$ 本身破坏了一致收敛性. □

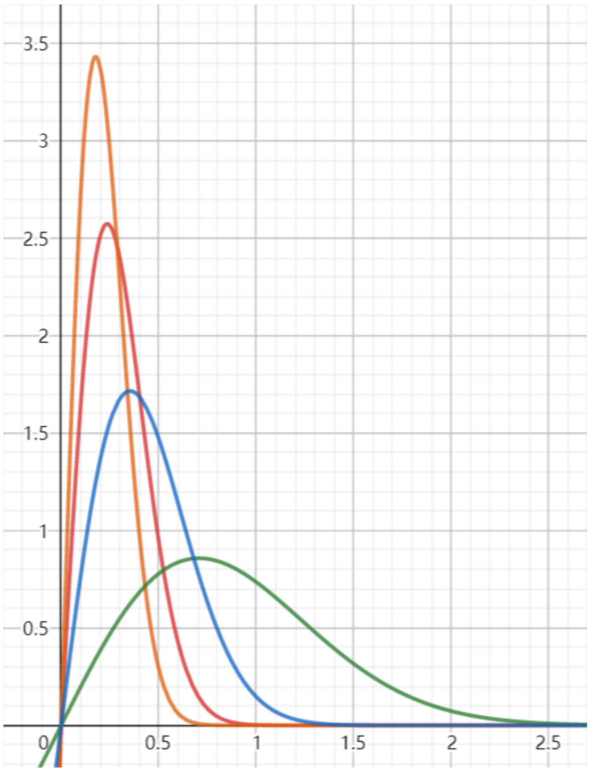

图 3.4: $f(x)=2n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$

1.3 一致收敛性的判别法

- 柯西收敛原理
  - 一致收敛，各项乘同一个有界函数仍一致收敛
- 魏尔斯特拉斯判别法
- 阿贝尔判别法
- 狄利克雷判别法

定理 1.1. 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的项在 $\mathcal{X}$ 中适合不等式

$$|u_n(x)|\leqslant c_n,$$

其中 c_n 为一个收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 的项，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 中一致收敛且绝对收敛，事实上，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ 也一致收敛.

证明.

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)|\\ \leqslant&|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots+|u_{n+m}(x)|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+m}\\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

命题 1.1. *存在函数项级数，它一致收敛但不绝对收敛.*

例 1.6.

2 级数和的函数性质

2.1 级数和的连续性

定理 2.1. 设函数 $u_n(x)$ 定义在集合 $\mathcal{X}$ 上，x_0 是 $\mathcal{X}$ 的一个内点，$u_n(x)$ 在 x_0 处连续. 若级数在集合 $\mathcal{X}$ 上一致收敛，则级数的和 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点上同样是连续的.

注记. 可以看到，我们为了证明和函数在 x_0 处连续，实际上用不到级数在整个集合 $\mathcal{X}$ 上一致收敛这么强的条件，只需要在 x_0 附近一致收敛就够了. 这就是为什么对于开区间和无穷区间，我们有时得不到一致收敛的结果，但内闭一致收敛是够用的.

上面的定理告诉我们，如果级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 I 上连续，那么加上一致收敛的条件后就能保证它的和函数也在 I 上连续. 现在反过来问，在每个 $u_n(x)$ 都连续的前提下，从和函数的连续性能否推出级数在 I 上一致收敛？一般来说，答案是否定的. 但如果考虑的是**正项级数**，而且 I 是**有界闭区间**，答案则是肯定的.

定理 2.2 (Dini 定理)**.** 设正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续，若级数有在整个区间上也连续的和 $f(x)$，则它在这区间上一致收敛.

定理 2.3 (Dini 定理)**.** 设有界闭区间 $[a, b]$ 上关于 n 单调增加的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 有连续的极限函数 $f(x)$，那么这个趋向是一致的.

注记. *Dini* 定理往往能用来得到内闭一致收敛.

2.2 逐项取极限

我们再引进一个定理

2.3 级数的逐项求积分

定理 2.4. 若函数 $u_n(x)$ 在区间 $\mathcal{X} = [a, b]$ 上连续，并且它们所组成的级数在这区间上一致收敛，则级数的和 $f(x)$ 的积分可表成下列的形状：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b u_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u_2(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x + \cdots\end{aligned}$$

证明. 由于函数 $u_n(x)$ 与 $f(x)$ 的连续性，所有这些积分的存在是显然的.

在区间 $[a, b]$ 上，我们有恒等式

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \varphi_n(x),$$

两侧积分，我们得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u_2(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

□

3 应用

Chapter 4

反常积分

1 积分限为无穷的反常积分

- $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$
- 假定函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,+\infty)$ 上而且在这区间的任意有限部分 $[a,A]$ 上都是可积的. 如果同时 $f(x)$ 还有一个原函数 $F(x)$ 存在于整个区间 $[a,+\infty)$ 上，则有积分学基本公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a)$$

- 需要知道的反常积分值
  - $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
  - $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
  - $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}$
  - $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}$
- $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$
- 绝对收敛与条件收敛
- 非负函数的比较判别法
-

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)\cdot g(x)$
绝对可积	有界	绝对可积
条件可积	单调有界	条件可积
积分有界	单调趋于 0	条件可积

1.1 积分学基本公式的用法

假定函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,+\infty)$ 上而且在这区间的任一有限部分 $[a,A]$ 上都是可积的. 如果同时 $f(x)$ 还有一个原函数 $F(x)$ 存在于整个区间 $[a,+\infty)$ 上，则按照积分学基本公式当有

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = F(A) - F(a).$$

由此可见，要说存在反常积分就等于说存在有限极限

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = F(+\infty).$$

1.2 与级数的类比 · 最简单的定理

定理 1.1.

1. 若积分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则对于任意 A，积分 $\displaystyle\int_A^\infty$ 也收敛，同时

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x + \int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

2. 在积分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的情形，有

$$\lim_{A\to\infty}\int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x = 0$$

与之对应的，我们没有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

1.3 在正函数情形下积分的收敛性

若函数 $f(x)$ 是非负的，则积分

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

是变量 A 的单调递增函数，对此函数当 $A\to\infty$ 时，有限极限的存在问题，很简单地就解决了

定理 1.2. 在 $f(x)$ 为非负函数的情形下，为使反常积分收敛，必须且只需当 A 增加时积分保持上有界，即

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \leqslant L$$

以此为基础，我们有下述的对非负函数的比较定理

定理 1.3. 若至少当 $x \geqslant A(A \geqslant a)$ 时成立不等式 $f(x) \leqslant g(x)$，则从积分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ 的收敛可以得出 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛，或者同样，由积分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 发散可以得出 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 1.4. 若极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K(0\leqslant K<+\infty)$$

存在，则当 $K<+\infty$ 时，由积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性推出积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性，而当 $K>0$，由第一个积分发散推出第二个积分发散.

在实际操作中，我们可以乘上一个 x^λ，来证明到无穷的时候为有限数或零.

1.4 一般情形的积分收敛性

反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的存在问题，按照定义，就归结到 A 的函数

$$\Phi(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

当 $A\to\infty$ 时是否存在有限极限的问题.

运用布尔查诺与柯西的判别法到这个函数，即可把反常积分存在的条件叙述称下列形式

定理 1.5. 要反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，必须且只需对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$ 使得只要 $A>A_0$ 而且 $A'>A_0$ 就有不等式

$$\left|\int_A^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

根据这个判别法很容易证明下面这个命题

命题 1.1. 若积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 更加收敛.

我们要注意，由积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛，一般说并不能推出积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛. 基于这个事实我们就从一般的收敛情形里特别划分出下述这个情形来:若积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 同时收敛，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 就说是**绝对收敛**，而函数 $f(x)$ 则说是在区间 $[a,+\infty)$ 上**绝对可积**

由上面的比较定理还可推出下面这一常常有用的定理.

定理 1.6. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上绝对可积，而函数 $g(x)$ 有界，则二者的积为一函数，在区间 $[a,+\infty]$ 上绝对可积.

为了形成对比，进而体会到上面的定理的重要性，我们指出下面的定理

定理 1.7. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上可积，而函数 $g(x)$ 单调有界，则二者的积为一函数，在区间 $[a,+\infty]$ 上可积. 如果去掉 $g(x)$ 单调的条件，则一般是不对的.

1.5 阿贝尔判别法与狄利克雷判别法

当不存在绝对收敛性时，在一系列情况下，这两个判别法可判明反常积分的收敛性.

定理 1.8. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义在区间 $[a,+\infty)$，并且

1. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
2. $g(x)$ 单调有界

那么积分

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

例 1.1. 由 *Dirichlet* 判别法容易证明，当 $\lambda > 0$ 时，积分

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x, a > 0$$

收敛. 特别地，当 $\lambda = 1$，我们由此推出积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛. 这里能取 $a = 0$ 是因为被积函数当 $x \to 0$ 时有有限极限. 可以证明，这个积分非绝对收敛，即积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$$

发散. 事实上，若这个积分收敛，则积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x, a > 0$$

收敛，因为 $\sin^2 x \leqslant |\sin x|$. 换句话说积分

$$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛，将它加上显然收敛的积分

$$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x,$$

便能得出结论：积分

$$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

收敛，矛盾.

1.6 把反常积分化为无穷级数

无论如何选取一列上升到无穷的数 $\{A_n\}\,(A_n > a)$，相应的积分整序变量 $\left\{\int_a^{A_n} f(x)\mathrm{d}x\right\}$ 都应趋向同一个有限的极限，这也就是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值. 但是就另一方面来说，整序变量 $\left\{\int_a^{A_n} f(x)\mathrm{d}x\right\}$ 的极限问题也就是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\mathrm{d}x$$

的和问题. 于是可以断言：

定理 1.9. 要反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，当且仅当对于任一列数 $A_n \to +\infty$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛到同一个和；这和就是反常积分的值.

我们要注意，在函数 $f(x)$ 是非负的这种情形，要反常积分收敛就只要它对于特别选定的一列数 $A_n \to +\infty$ 为收敛就够了.

把积分的收敛问题化成级数的收敛问题，往往很有用处，因为这样就有可能运用级数的收敛与发散的许多判别法.

例 1.2.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

证明. 因 $\sin x$ 当 x 增加时轮流取正值与负值，变号的地点在 $n\pi(n=1,2,\cdots)$，所以我们很自然地就拿这些数作为 A_n 来考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

对通项 $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 施行变量代换 $x = n\pi + t$ 即得

$$v_n = (-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi + t}\mathrm{d}t$$

由此可见，级数的项时正负相见而绝对值单调递减的.

还有，当 $n > 0$ 时，

$$|v_n| = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi + t}\mathrm{d}t < \int_0^{\pi}\frac{1}{n\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$

所以级数的项的绝对值随指标无限增大而趋于零. 于是由莱布尼茨法则，收敛.

今以 I 表其和，这样就对于任意 $\varepsilon > 0$ 都有一数 N，使当 $n \geqslant N$ 时有不等式

$$\left|\int_0^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - I\right| < \varepsilon$$

假定 $A > N\pi$，则有一自然数 n_0 使得 $n_0\pi \leqslant A < (n_0+1)\pi$，因而显然 $n_0 \geqslant N$. 因函数 $\sin x$ 在区间 $n_0\pi$ 到 $(n_0+1)\pi$ 不变号，所以积分 $\int_0^A$ 介于 $\int_0^{n_0\pi}$ 与 $\int_0^{(n_0+1)\pi}$ 之间，但是后面这两个积分又都介于 $I-\varepsilon$ 与 $I+\varepsilon$ 之间，所以积分 $\int_0^A$ 也必定如此.

于是对于所有的 $A > N\pi$ 都有

$$\left|\int_0^{A}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - I\right| < \varepsilon$$

因而存在积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = I$$

□

1.7 例题

例 1.3.

$$\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}}-\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

例 1.4.

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

例 1.5. 讨论积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{x^{\mu}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\mathrm{d}x \quad (\mu,\lambda>0)$$

的收敛性.

解.

$$\frac{x^{\mu}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\Big\backslash\frac{1}{x^2}=\frac{x^{\mu+2}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\to 0, x\to+\infty$$

□

例 1.6. 讨论下面积分的收敛性：

$$\int_1^{+\infty}\int_0^{a}\sin(\beta^2x^3)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}x$$

证明. 试求内层积分当 $x\to+\infty$ 时变小的阶. 在其中令 $\beta^2x^3=z,\beta=\sqrt{\dfrac{z}{x^3}}$，有

$$\int_0^{a}\sin(\beta^2x^3)\mathrm{d}\beta=\frac{1}{2x^{3/2}}\int_0^{a^2x^3}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z.$$

因积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z$ 收敛，存在一常数 L，使得对于所有 $A>0$ 都有

$$\left|\int_0^{A}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z\right|\leqslant 2L.$$

于是积分 $\displaystyle\int_0^{a}\sin(\beta^2x^3)\mathrm{d}\beta$ 的绝对值不超过 $\dfrac{L}{x^{3/2}}$. 由此推知所设积分绝对收敛. □

例 1.7. 证明如下断言：

设函数 $f(x)$ 给定在区间 $[a,+\infty)$，其周期 $\omega>0$，而函数 $g(x)$ 在同一区间单调，当 $x\to+\infty$ 时趋于 0，若常义积分

$$\int_a^{a+\omega}f(x)\mathrm{d}x=0$$

则反常积分

$$\int_a^{\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛. 反之，若

$$\int_a^{a+\omega}f(x)\mathrm{d}x=K\neq 0$$

则积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛或发散决定于积分

$$\int_a^{\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

的收敛或发散.

2 无界函数的反常积分

我们来看定义在有限区间 $[a,b]$ 上的一个函数 $f(x)$，假定它在这区间上就通常意义而言为不可积的. 则在区间 $[a,b]$ 上必有一点 c，在它的每一邻域内函数都在通常以一下为不可积的.

其实，假如根本没有这样的一点存在，则区间 $[a,b]$ 上的每一点 x 都可用一个邻域 σ 围起来，使函数在它范围内为可积的. 由有限覆盖定理，粗可以把区间 $[a,b]$ 分成有限个部分，在每部分内函数都为可积的. 然而这样看来，函数必然要在整个区间 $[a,b]$ 上为可积，因而要与假定相反了.

所说的 c 点自然要叫做奇点：在它这里“凝结”着函数的不可积性！奇点可以有若干个甚至无穷个；例如狄利克雷函数，奇点就毫无意外地充满了整个区间 $[0,1]$.

我们现在只讨论有限个奇点 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 的情形. 在这种情形，出现于这些点的“奇”性是很容易发觉的：在这些点的每一个邻域中函数根本就是无界的（所以无界性就成为通常意义下不可积的原因）. 要证明这件事只需看仅有一个奇点而且就是 b 的情形就够了.

所以假定对任意 $0<\eta<b-a$，函数 $f(x)$ 都在区间 $[a,b-\eta]$ 上为可积（因而就为有界），但在区间 $[b-\eta,b]$ 上为不可积的. 要证明的是，在这些条件下函数 $f(x)$ 不可能在 b 点附近为有界.

我们且假定这事的反面：对于 $[a,b]$ 上的所有 x 都有

$$|f(x)| \leqslant L.$$

任意给定一数 $\varepsilon>0$ 后，我们取 $\eta=\dfrac{\varepsilon}{6L}$. 因函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b-\eta]$ 上为可积，对于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 这个正数必可得一数 $\delta>0$，使这区间分成长度 $\Delta x_{i'}<\delta$ 的若干段时就有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

我们还可以假定 $\delta<\eta$. 现在把整个区间 $[a,b]$ 分成长度 $\Delta x_i<\delta$ 的若干部分，在区间 $[a,b-\eta]$ 之内的那些部分记作 $\Delta x_{i'}$，其余的部分记作 $\Delta x_{i''}$. 于是，有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < 2L \sum_{i''} \Delta x_{i''} < 2L(\eta+\delta) < 4L\eta = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

故得

$$\sum_{i} \omega_{i} \Delta x_{i} < \varepsilon.$$

然而这正是函数 $f(x)$ 在整个区间 $[a,b]$ 上可积的条件，矛盾！

这样看来，在奇点个数为有限的情形，奇点的特征就在于函数在它们的附近不为有界. 这正是我们在接下来定义奇点时所采用的.

2.1 积分学基本公式的用法 · 例题

若奇点发生在区间 $[a,b]$ 之内，或在积分区间上同时有若干个奇点出现，这个公式也同样成立；但是必须牢牢地记住要有一定的条件，就是要原函数 $F(x)$ 在奇点以外各处都以 $f(x)$ 为其导数，而且处处连续，即使在奇点的地方也不要例外. 这样的原函数的存在自然保证了反常积分存在.

2.2 积分存在的条件和判别法

我们现在给一个例子，表明一个积分可以收敛但不绝对收敛.

设在 $0 < x \leqslant 2$ 时，

$$f(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}.$$

这函数在 $x > 0$ 时连续，在区间 $[0,2]$ 上的唯一奇点为 $x = 0$. 另一方面不难验证 $f(x)$ 的原函数为

$$F(x) = x^2\sin\frac{\pi}{x^2},$$

当 $x \to 0$ 时有极限 $F(+0) = 0$. 所以存在积分

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = x^2\sin\frac{\pi}{x^2}\bigg|_0^2 = 2\sqrt{2}.$$

2.3 例题

例 2.1.

$$\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}, \theta < \pi$$

注记. *根式内部必须大于等于零，因此 θ 至多不能超过 π.*

解. 奇点 $\varphi = \theta$.

因存在导数

$$\lim_{\varphi\to\theta}\frac{\cos\varphi - \cos\theta}{\varphi - \theta} = -\sin\theta,$$

被积函数当 $\varphi \to \theta$ 时就 $\dfrac{1}{\theta - \varphi}$ 而言为 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷大.

积分收敛. □

3 反常积分的性质与变形

4 反常积分的特别计算法

4.1 Frullani 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0).$$

I

我们对函数 $f(x)$ 作下列的假定：

1. 函数 $f(x)$ 对于 $x \geqslant 0$ 有定义而且连续.
2. 当 $x \to +\infty$ 时具有有限的极限
$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

设 $0<\delta<\Delta<+\infty$，存在有积分

$$\begin{aligned}\int_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

5 反常积分的近似计算

6 非负函数无穷积分的收敛判别法

定义 6.1. 考虑 $[a,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$，给定 f 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积，$\forall A \geqslant 0$，称无穷积分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ 收敛，是指 $\exists \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f \in \mathbb{R}$

称 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} F(A)$ 存在，是指存在 $I \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geqslant A$ 时，$|F(x) - I| < \epsilon$

定理 6.1. 设 $f \geqslant 0$，无穷积分 $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ 收敛 $\Leftrightarrow F(A) = \displaystyle\int_a^A f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

观察：设 $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ 收敛，f 不必非负，取 $\{A_n\} \subset [a,+\infty)$ 单调递增趋于 $+\infty$，$A_1 = 0$，那么有

$$\int_a^{A_{N+1}} f = \sum_{n=1}^{N} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f$$

令 $N \to \infty$，得

$$\int_a^{\infty} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f$$

定理 6.2. 设 $[a,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 非负，若存在 $\{A_n\}$ 单调递增到 $+\infty$，$A_1 = 0$，使 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f$ 收敛，那么

$$\int_a^{\infty} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f$$

证明. 因 $a \leqslant A_n \nearrow +\infty, \forall A \geqslant a, \exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $A_n \leqslant A \leqslant A_{n+1}$，又因 $f \geqslant 0$ 且 $a = A_1$，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f = \int_a^{A_n} f \leqslant \int_a^A f \leqslant \int_a^{A_{n+1}} f = \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{n+1}} f$$

当 $A \to \infty$ 时，相应地 $n \to \infty$, 从而 $\displaystyle\int_a^{\infty} f = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f$ □

例 6.1. 考虑 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}, x \in [0,+\infty)$, 那么 f 是非负函数且 $f \in C^{\infty}[0,+\infty)$.

观察到 $\forall n \in \mathbb{N}, f(n\pi) = n\pi$, 因此 f 无界，但 $\displaystyle\int_0^{\infty} f$ 收敛，事实上

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} \\
&\leqslant (n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+n^6\sin^2 x} && x\text{放成}(n+1)\pi, x^6\text{放成}n^6 \\
&= 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^6\sin^2 x} && \text{利用被积函数的周期性和对称性} \\
&\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x+n^6\sin^2 x} && 1\text{放成}\cos^2 x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^3\mathrm{d}x}{\cos^2 x + n^6\sin x} \\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(n^3\tan x)}{1+(n^3\tan x)^2} \\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\frac{\pi}{2} = \frac{(n+1)\pi^2}{n^3} \\
&\leqslant \frac{2\pi^2}{n^2} && (n+1)\text{放成}2n
\end{aligned}
$$

例 6.2. 设 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明：如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ 存在，那么必有 $b = 0$.

证明. 略 □

7 无穷积分的 Dirichlet 与 Abel 判别法

定理 7.1. $\int_a^\infty f$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A_0 > 0, \forall A^{'}, A^{''} > A_0$，使得

$$|\int_{A'}^{A''} f| < \epsilon$$

定理 7.2 (Abel 引理)**.** 设 $[a,b] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ 单调，f 在 $[a,b]$ 可积，如果存在 $M > 0$，$\forall c \in [a,b]$，$|\int_a^c f| \leqslant M$，那么

$$|\int_a^b fg| \leqslant M(|g(a)| + 2|g(b)|)$$

定理 7.3. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上非负，单调递减，那么存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

证明. 由条件 fg 可积，取 $[a,b]$ 的分割 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，则有

$$\int_a^b fg = \sum_{i=1}^n$$

由 f 有界及 g 在 $[a,b]$ 上可积，当 $\|\pi\| \to 0$，就有上式右边的第二项趋于零，从而可将上式写成

$$\int_a^b fg = \lim$$

□

例 7.1. 研究下列积分的敛散性

1. $$\int_0^\infty \frac{[t] - t + 1/2}{t + x}\mathrm{d}t (x > 0)$$

2. $$\int_0^\infty \frac{[t] - t + a}{t + x}\mathrm{d}t (x > 0, a \neq \frac{1}{2})$$

解. $\int_0^{\infty [t] - t + \frac{1}{2}}$ 有界，用 Dirichlet 判别法 □

8 瑕积分的收敛判别法

如何判断瑕积分的敛散性？先看一个简单的例子.

为了研究积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性，作变换 $\frac{1}{\sqrt{x}} = y, x = \frac{1}{y^2}$，即得

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{\varepsilon}}^1 y\left(-\frac{2}{y^3}\right)\mathrm{d}y = \int_1^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{2}{y^2}\mathrm{d}y$$

这样就把判断瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛的问题归结为判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$ 的收敛问题.

例 8.1. 函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在任意区间 $[0, 1-\eta](0<\eta<1)$ 上都有界而且可积，并且

$$\int_0^{1-\eta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x\bigg|_0^{1-\eta} = \arcsin(1-\eta) \to \frac{\pi}{2}\ as\ \eta\to 0$$

因此存在反常积分

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

例 8.2. 判断反常积分

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\mathrm{d}x\ (b>a)$$

对于指数 $\lambda>0$ 的哪些值存在.

解. 若 $\lambda\neq 1$，则积分

$$\int_{a+\eta}^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\lambda}\left[(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}\right] \xlongequal{\eta\to 0} \begin{cases} \infty & \lambda>1 \\ \dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \lambda<1 \end{cases}$$

若 $\lambda=1$，则

$$\int_{a+\eta}^b \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln(b-a) - \ln\eta \to +\infty\ as\ \eta\to 0$$

所以积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\mathrm{d}x$ 在 $\lambda<1$ 时收敛而在 $\lambda\geqslant 1$ 时发散. □

注记. 我们来看定义在有限区间 $[a,b]$ 上的一个函数 $f(x)$，假定它在这区间上就通常意义而言为不可积的. 则在区间 $[a,b]$ 上必有一点 c，在它的每一邻域内函数都（在通常意义下）为不可积的.

其实，假如根本没有这样的一点存在，则区间 $[a,b]$ 上的每一点 x 都可用一个邻域 σ 围起来，使函数在它范围内为可积的. 运用博雷尔引理到覆盖着区间 $[a,b]$ 的这组邻域，很容易把区间 $[a,b]$ 分成有限个部分，在每部分内函数都为可积的. 然而这样看来，函数必然要在整个区间 $[a,b]$ 上为可积，因而要与假定矛盾了.

所说的 c 点自然也叫做奇点：在它这里“凝结”着函数的不可积性！奇点可以有若干个甚至无穷个；例如狄利克雷函数的情形，奇点就毫无例外地充满了整个区间 $[0,1]$.

我们现在只讨论**有限**个奇点 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 的情形. 在这种情形，出现于这些点的“奇”性是很容易发觉的：在这下点的每一个邻域中函数根本就是无界的（所以无界性就成为于通常意义下不可积的原因）. 要证明这件事只需看仅有一个奇点而且就是 b 的情形就够了.

所以假定对任意 $\eta>0(\eta<b-a)$ 函数 $f(x)$ 都在区间 $[a,b-\eta]$ 上为可积（因而就为有界），但在区间 $[b-\eta,b]$ 上为不可积的. 要证明的是，在这些条件下函数 $f(x)$ 不可能在 b 点附近为有界.

我们且假定这事的反面：对于 $[a,b]$ 上的所有 x 都有

$$|f(x)|\leqslant L.$$

任意给定一数 $\varepsilon>0$ 后，我们取 $\eta=\frac{\varepsilon}{L}$. 因函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b-\eta]$ 上为可积，对于 $\frac{\varepsilon}{3}$ 这个正数必可得一数 $\delta>0$，使这区间分成长度 $\Delta x_i<\delta$ 的若干段时就有

$$\sum_i \omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3},$$

这样看来，在奇点个数为有限的情形，奇点的特征就在于函数在它们的附近不为有界. 这正是我们在之前定义奇点时所采用的.

8.1 积分学基本公式的用法 · 例题

假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上而且（就通常意义而言）于每一个区间 $[a,b-\eta]$ 上可积，但以 b 为一奇点. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 内也就是对于 $a\leqslant x<b$，具有一原函数 $F(x)$，则

$$\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x=F(b-\eta)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-\eta},$$

因而反常积分的存在就等于有限极限 $\lim\limits_{\eta\to0}F(b-\eta)$ 的存在. 若这个极限真的存在而为有限，我们自然就把它当作原函数 $F(x)$ 在 $x=b$ 时的值 $F(b)$，以使 $F(x)$ 在整个区间 $[a,b]$ 上连续.

于是反常积分的计算公式呈通常形状；

$$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b}.$$

例 8.3. $\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$，奇点为 $x=0$.

被积函数的原函数为 $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$，在奇点 $x=0$ 处连续，所以积分存在，可直接用牛顿-莱布尼茨公式写出：

$$\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{8}=\frac{9}{2}$$

例 8.4. $\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$ 不存在，因原函数 $\ln|x^2-1|$ 在奇点 $x=\pm1$ 处成为 ∞.

例 8.5. $\int_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，奇点为 $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ 在 $x=1$ 处连续；所以积分存在为 $\frac{1}{8}\pi^2$.

例 8.6. $\int_{0}^{1}\ln x\mathrm{d}x$，奇点为 $x=0$，这里原函数 $x\ln x-x$ 当 $x\to0$ 时以 0 为极限，把这极限值当作原函数在 $x=0$ 的值，即有

$$\int_{0}^{1}\ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1$$

例 8.7. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}\mathrm{d}x$，奇点为 $x=1$，我们有

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\arcsin\frac{x+1}{2x}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$$

例 8.8. $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$，奇点为 $x=1$，积分不存在，因原函数 $\ln\ln x$ 在 $x=1$ 处成为 ∞.

8.2 积分存在的条件和判别法

例 8.9. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\mathrm{d}x$，被积函数当 $x\to 1$ 时是 $\frac{1}{4}$ 阶无穷大.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \to \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\ as\ x\to 1$$

因此积分收敛.

注记. 该看的不是 x 上面是多少次，该看的是造成奇点的因式是多少阶的. 比如 $1-x^4=(1-x)(1+x+x^2+x^3)$，在 1 处造成奇点的因式 $(1-x)$ 只有一阶.

例 8.10. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\mathrm{d}x(k^2<1)$，当 $x\to 1$ 时是 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大，积分收敛.

例 8.11. $\int_0^1 x^\mu \ln x\mathrm{d}x$

解.

- 若 $\mu>0$，无奇点，积分是作为常义积分存在的.
- 若 $\mu=0$，反常可积.
- 若 $\mu<0$，不妨改写成 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\mu}\mathrm{d}x$，其中 $\mu>0$.

□

注记. 对常义积分来说，是没有所谓的绝对可积的概念的，因为在常义积分的情况下，f 可积能够推出 $|f|$ 可积！

定理 8.1. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上绝对可积，而函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上通常意义下可积，则函数 $f(x)g(x)$ 在上述区间上绝对可积.

与级数的联系由下述定理给出：

定理 8.2. 要反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（以 b 为奇点）存在，必须且只需对于任何一列数 $a_n\to b$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x(a_0=a, a\leqslant a_n<b)$$

都收敛到同一个和数；这和数也就是反常积分的值.

例题

例 8.12.

$$\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}\mathrm{d}\varphi$$

例 8.13.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

解. ∞ 是一个奇点，当 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，0 也是一个奇点.

因此我们将积分分为两部分 $\displaystyle\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$

对于第一部分，当 $1-a<1$ 时收敛，即 $a>0$.

对于第二部分，当 $2-a>1$ 时收敛，即 $a<1$.

综上，当 $0<a<1$ 时积分收敛. □

例 8.14.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解. ∞ 是一个奇点，0 也是一个奇点.、

因此我们将积分分成两部分 $\displaystyle\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. □

Chapter 5

依赖于参数的积分

1 含参变量常义积分

- $I(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$
- $f(x,y)$ 当 $y \to y_0$ 时（对于 $x \in [a,b]$）一致收敛到 $\varphi(x)$，那么

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$$

  - 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $|y - y_0| < \delta$，那么对任意 $x \in [a,b]$，都有 $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$
  - 若 $f(x,y)$ 一致连续，则当 $y \to y_0$ 时 $f(x,y)$ 一致收敛于 $f(x,y_0)$
- 如果有一个极限是一致极限，则两个累次极限存在且相等

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$$

- Dini 定理

非重点：

- 一致收敛的充要条件
  - Cauchy 收敛原理
  - 当 y_n 按照任意规律趋向于 y_0 时函数列 $\{f(x,y_n)\}$ 一致收敛
- 积分号下的微分法
- 累次积分交换次序

1.1 一致收敛的概念

定义 1.1. 设函数 $f(x,y)$ 定义在二维的集合 $\mathcal{M}=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 中，并且 $\mathcal{Y}$ 中有一个聚点，例如有限的数值 y_0. 若

(1) 函数 $f(x,y)$ 当 $y\to y_0$ 时逐点收敛到函数 $\varphi(x)$.

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|y-y_0|<\delta$ 时，便对 $\mathcal{X}$ 中所有的 x，都有

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

则我们说函数 $f(x,y)$ 当 $y\to y_0$ 时关于 x 一致收敛于 $\varphi(x)$.

注记. 上述的 $\varphi(x)$ 与 $f(x,y_0)$ 不必有什么关系，但我们之后将会看到，当对 f 加上一些光滑性的条件之后，$f(x,y_0)$ 就是 $\varphi(x)$.

定理 1.1 (一致适合 Cauchy 收敛原理)**.** 函数 $f(x,y)$ 当 $y\to y_0$ 时一致收敛于某函数当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|y-y_0|<\delta,|y'-y_0|<\delta,$ 时，对 $\mathcal{X}$ 中所有的 x，都有

$$|f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon.$$

定理 1.2 (函数列)**.** 当 $y\to y_0$ 时要使函数 $f(x,y)$ 一致趋向于函数 $\varphi(x)$，其充分与必要条件是：当 y_n（在 $\mathcal{Y}$ 中的值）按照任何变化的规律趋向于 y_0 时，每一序列 $\{f(x,y_n)\}$ 一致收敛于 $\varphi(x)$.

现在设集合 $\mathcal{X}$ 代表**有限闭区间** $[a,b]$. 我们知道如果函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间上一致收敛于极限函数，并且 $f_n(x)$ 是连续的（或在常义积分意义下为可积的），则后面的极限函数也一定是连续的（或在常义积分意义下为可积的）. 由定理1.2，这结果显然可以推广到一般的情形.

定理 1.3. 若对于 $\mathcal{Y}$ 中的任意 y 值，就区间 $\mathcal{X}=[a,b]$ 上的 x 来说，函数 $f(x,y)$ 是连续的（可积的），并且当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 一致地趋向于极限函数 $\varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 也是连续的（可积的）.

定理 1.4 (累次极限交换次序)**.** 设函数 $f(x,y)$ 定义在二维集合 $\mathcal{M}=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上，并且集合 $\mathcal{X}$ 及 $\mathcal{Y}$ 各有聚点 x_0 及 y_0.

设对于 $\mathcal{X}$ 中每一个 x 值有逐点的极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x),$$

且对于 $\mathcal{Y}$ 中每一个 y 值有逐点的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y),$$

若上述两个逐点极限有一个还是一致极限，则两个累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

存在且相等.

证明.

1. Step1. 不妨设 y 的趋向关于 x 是一致的，我们证明 x 的极限函数关于 y 的趋向存在极限.

   给定任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_y > 0$，对任意 $x \in \mathcal{X}$，只要

   $$|y - y_0| < \delta_y, |y' - y_0| < \delta_y$$

   就有

   $$|f(x,y) - f(x,y')| < \varepsilon.$$

   在上面这个不等式中令 $x \to x_0$，注意，上面这个不等式中 δ_y 关于 x 的一致性保证了我们这个令是可以的.

   得到

   $$|\psi(y) - \psi(y')| < \varepsilon$$

   整理一下语言，我们得到的结果就是，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_y > 0$，只要

   $$|y - y_0| < \delta_y, |y' - y_0| < \delta_y,$$

   就有

   $$|\psi(y) - \psi(y')| < \varepsilon$$

   我们重申，上面的式子是怎么得到的呢？是因为我们首先关于任意的 x 一致地有类似的式子，然后令 x 趋于 x_0，就得到了上面的事情.

   这样，我们就证明了 $\psi(y)$ 当 $y \to y_0$ 是存在有限的极限 A.

2. Step2. 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$.

□

1.2 在积分号下的极限过程

现在回到所考虑的依赖于参数 y 的积分 $I(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$，并首先限制在有限区间 $[a,b]$ 上，及函数在通常的意义下为可积的这一情形.

定理 1.5. *若函数 $f(x,y)$ 当 y 为常量时对于 $[a,b]$ 上的 x 值为可积，并且在 $y \to y_0$ 时对于 x 一致趋于极限函数 $\varphi(x)$，则成立*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$$

定理 1.6. *若二元函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,b] \times [c,d]$ 上是确定的，且连续的，则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,d]$ 上是参数 y 的连续函数.*

注记. *$I(y)$ 是连续函数，按定义，意思是说*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x$$

根据上一个定理，我们只需要说明，在 $f(x,y)$ 是连续函数的假定下，$f(x,y_0)$ 就是当 $y \to y_0$ 时 $f(x,y)$ 的一致极限.

定理 1.7. 设函数 $f(x,y)$ 定义在矩形 $[a,b;c,d]$ 上，当 y 在 $[c,d]$ 上为任意常量时，它对于 x 是连续的. 其次假定在矩形区域上偏导数 $f'_y(x,y)$ 存在，同时把 $f'_y(x,y)$ 看成二元函数，它是连续的，则当 y 在 $[c,d]$ 上为任意值时，有

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

证明. 函数 $f(x,y)$ 对 x 的连续性保证了积分

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

的存在性.

固定任意的 $y=y_0$ 值，给它加上改变量 $\Delta y=k$，则

$$I(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x, I(y_0+k)=\int_a^b f(x,y_0+k)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}=\int_a^b \frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}\mathrm{d}x$$

左侧极限的存在问题就转化为右侧含参变量积分的极限存在问题.

由拉格朗日中值定理，

$$\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}=f'_y(x,y_0+\theta k),\theta\in(0,1).$$

而 $f'_y(x,y)$ 在矩形 $[a,b;c,d]$ 上一致连续，因此当 k 趋于 0 时 $f'_y(x,y_0+\theta k)$ 一致收敛到 $f'_y(x,y_0)$，这就有

$$I'(y_0)=\int_a^b f'_y(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

□

例 1.1. 计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (0<a<b)$$

解. 在上述积分中把 a 看做常数，把 b 看做参变量，可得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b}=\int_0^1 x^b\mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}.$$

因此

$$I=\ln(b+1)+c.$$

显然，当 $b=a$ 时，$I=0$，因而 $x=-\ln(a+1)$，我们就得到

$$I=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

□

1.3 在积分号下的积分法

例 1.2. 设 $f(x,y)=x^y$ 在矩形 $[0,1;a,b]$ 上，其中 $0<a<b$.

解.

$$\int_a^b\int_0^1 x^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_a^b x^y\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$LHS=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln\frac{b+1}{a+1}$$
$$RHS=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$$

□

例 1.3. 在函数 $f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 于矩形 $[0,1;0,1]$ 上的情形下，定理的条件并不适合：在 $(0,0)$ 点是间断的.

1.4 积分限依赖于参数的情形

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

我们仅限于研究这类积分中对于参数的连续性及可微性问题.

1.5 仅依赖于 x 的因子的引入

2 积分的一致收敛性

- 积分的一致收敛性的定义
  - 对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $A_0 \geqslant a$,只要 $A > A_0$,那么对于任意 $y \in \mathcal{Y}$ 都有 $\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x - \int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$
- 判断积分一致收敛的方法
  1. $$\lim_{A\to+\infty}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right| = 0$$
  2. Cauchy 收敛原理
  3. 对任意满足 $A_0 = a, A_n \geqslant a$，趋向 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$，级数
     $$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}x$$
     收敛
  4. 魏尔斯特拉斯判别法
  5. Dirichlet 判别法
  6. Abel 判别法
- 判断积分不一致收敛的方法
  1. $$\lim_{A\to+\infty}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right| \neq 0$$
  2. y_0 为 $\mathcal{Y}$ 的一个聚点，对于 $y \in \mathcal{Y}\setminus\{y_0\}$ 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 发散，积分不一致收敛
- 需要知道的一些积分值
  1. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
  2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

2.1 积分的一致收敛性的定义

例 2.1. 讨论积分

$$\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$$

的收敛性.

证明. 首先，这个积分对于每一个定值 $y \geqslant 0$ 是收敛的.

下面计算反常积分

$$\int_A^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x.$$

当 $y = 0$ 时无论 A 为何值，它是零. 如果 $y > 0$ 则借助于代换 $xy = t$，

$$\int_A^{+\infty} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x = \int_{Ay}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-Ay}.$$

当 $y > 0$ 为固定值时，这个表达式在 $A \to +\infty$ 时很明显地趋于 0，下面要看这个趋向是否是一致的.

对任意 $\varepsilon > 0$，要想使

$$\mathrm{e}^{-Ay} < \varepsilon,$$

则必须

$$A > -\frac{\ln\varepsilon}{y},$$

因此不一致收敛. □

2.2 一致收敛的条件 · 与级数的联系

利用之前函数的一致收敛于极限的判别法，对于这里所考虑的特殊情形，可以相应地得到如下的判别法

定理 2.1. *为了要积分对于 y 在范围 $\mathcal{Y}$ 上一致收敛，它的充分必要条件是，当给定任意值 $\varepsilon > 0$，可以找到这样的数 A_0 不依赖于 y，只要 $A' > A > A_0$，就有不等式*

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

对于所有的 y 值在范围 $\mathcal{Y}$ 上同时成立.

定理 2.2.

2.3 例题

例 2.2. 讨论下列广义积分的一致收敛性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+a^2)t}\sin t\mathrm{d}t, a \in (-\infty, +\infty)$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}\mathrm{d}x, y \geqslant y_0 > 0$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x, t \in (0, +\infty)$

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \alpha \in [0, +\infty)$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x, y \in (-\infty, +\infty)$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\ln x\mathrm{e}^{-t\sqrt{x}}\mathrm{d}x, t \geqslant t_0 > 0$

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ut}}{t}\cos t\mathrm{d}t, u \in [0, 1]$

(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2}\mathrm{e}^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\mathrm{d}t, \alpha \in (0, +\infty)$

证明. (8) 令 $u = t^2$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2}\mathrm{e}^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2(1+\alpha^2+u)}\mathrm{e}^{-\alpha^2u}\cos\alpha^2u\mathrm{d}u$$

□

例 2.3. 直接证明以下积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

对 y 的所有值是一致收敛的.

例 2.4. 直接证明以下积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$$

对 α 在范围 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ 内是一致收敛的. 并且在范围 $\alpha \geqslant 0$ 内是不一致收敛的.

例 2.5. 证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x, (\alpha, \beta > 0)$$

对 β 在 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 时是一致收敛的.

证明. 对于 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$，

$$\left|\int_0^A \sin\beta x\mathrm{d}x\right| = \frac{1-\cos\beta A}{\beta} \leqslant \frac{2}{\beta_0}.$$

另一方面，表达式

$$\frac{x}{\alpha^2+x^2}$$

并不包含参数 β，并且关于 x 的增加单调递减趋于 0.

由 Dirichlet 判别法，积分一致收敛. □

3 积分一致收敛性的应用

3.1 在积分号下的极限过程

现在让我们主要的来研究关于无穷区间上的积分在积分号下取极限的问题. 第1.2小节中的定理1.5不能推广到现在这个情形；纵使在完全的无穷区间上内，当 $y \to y_0$ 时函数 $f(x,y)$ 一致趋向于极限函数 $\varphi(x)$，积分号下的极限过程仍是不允许的.

试举例来说，考虑函数

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x^3}\exp\left(-\dfrac{n}{2x^2}\right) & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}, n = 1, 2, \cdots$$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -3n\frac{1}{x^4}\exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right) + \frac{n}{x^3}\exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right)\frac{n}{x^3} \\ &= \exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right)\left(\frac{-3nx^2+n^2}{x^6}\right) \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{\dfrac{n}{3}}$ 时 $f_n(x)$ 取最大值 $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \to 0$ 当 $n \to \infty$. 因此 $f_n(x)$ 当 $n \to \infty$ 时在整个区间 $[0, +\infty)$ 内一致地趋向于极限函数 $\varphi(x) = 0$.

然而积分

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{n}{x^3}\exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{n}{2x^2}\right)\mathrm{d}\left(-\frac{n}{2x^2}\right) = 1.$$

当 $n \to \infty$ 时，并不趋于 0.

注记. *在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛与对于任意 $A > 0$ 在 $[0, A]$ 上一致收敛是不一样的.*

关于容许无穷区间上的积分在积分号下的极限过程的充分条件给出以下的定理：

定理 3.1.

1. *对任意有限区间 $[a, A]$，$f(x,y)$ 当 $y \to y_0$ 时一致趋向于 $\varphi(x)$；*

2. *无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 是一致收敛的，换句话说，极限过程*

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x$$

   关于 $y \in \mathcal{Y}$ 是一致的.

则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x$$

注记. 在证明中，我们时而将 y 与 x 视作一对，时而将 y 与 A 视作一对.

当我们将 y 与 x 视作一对时，我们讨论的函数是 $f(x,y)$，我们可以讨论当 $y\to y_0$ 时关于 x 的一致极限问题和 $x\to x_0$ 时关于 y 的一致极限问题，证明中我们用到的是前者.

当我们将 y 与 A 视作一对时，我们讨论的函数是 $\displaystyle\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x$，我们可以讨论当 $y\to y_0$ 时关于 A 的一致极限问题和 $A\to+\infty$ 时关于 y 的一致极限问题，证明中我们用到的是后者.

一致收敛是个好东西，它可以保证有限区间上积分的积分号下取极限的合理性，也可以保证累次极限的交换次序. 值得注意的是，在保证累次极限交换次序时，我们只需要要求其中一个收敛是一致的就可以了.

事实上，当我写出

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

事情已经相当清楚了. 第一个等号是累次极限的交换次序，能这样做是因为 $A\to+\infty$ 这个极限关于 y 是一致的，也就是所谓的无穷积分是一致收敛的；第二个等号是有限区间上积分号下取极限，能这样做是因为对任意有限区间 $[a,A]$，$f(x,y)$ 当 $y\to y_0$ 时一致收敛于 $\varphi(x)$，注意我们这里不需要 $f(x,y)$ 在整个区间 $[a,+\infty)$ 上都收敛于 $\varphi(x)$ 那么强.

本来想整理下证明的，不过现在看来这个注记就足够了. 最后，让我们看看，在"对任意有限区间 $[a,A]$，$f(x,y)$ 当 $y\to y_0$ 时一致收敛于 $\varphi(x)$"的假定下，$\displaystyle\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x$ 的极限过程关于 A 是一致的是什么意思*:*

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 $A>a$，只要 $|y-y_0|<\delta$，都有

$$\left|\int_a^A f(x,y)-\varphi(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

可以看到这个条件挺奇怪的.

由此运用广义 Dini 定理可以得到这样的

推论 3.1. 设非负的函数 $f(x,y)$ 对 x 在区间 $[a,+\infty]$ 内是连续的，并且随着 y 的增加而增加，当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 趋于极限函数 $\varphi(x)$，而且 $\varphi(x)$ 也在所说的区间内是连续的. 再假设

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在，那么对一切 $y<y_0$ 且 $y\in\mathcal{Y}$

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

也存在，并且

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

成立.

定理 3.2. 设函数 $f(x,y)$ 当 $y\in\mathcal{Y}$ 时在区间 $[a,b-\eta]$ 对任意的 $\eta>0$ 在通常意义下是可积的，并在每一个这样的区间上当 $y\to y_0$ 时对 x 一致趋于极限函数 $\varphi(x)$，再若积分

$$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

对 y 在 $\mathcal{Y}$ 上一致收敛，则有公式

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

3.2 例题

例 3.1. 借助于级数的展开，计算积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

解. 把被积函数展开为级数

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \cdots,$$

其中所有的项都是负的.

在 $x=1$ 附近，一致收敛是被破坏了的. 事实上，我们有这样的定理：

定理 3.3. 设对每个 n，函数 $u_n(x)$ 在 $x=c$ 处左连续，又已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散. 那么，对任意正数 $\delta>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(c-\delta, c)$ 上必不一致收敛.

但是它是内闭一致收敛的，这是由 Dini 定理保证的. □

例 3.2. 由

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x,$$

计算级数的和

$$\sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

4 欧拉积分

4.1 第一型欧拉积分

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$$

- 定义域：$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

  当 $a-1<0$ 时，$x=0$ 是奇点；当 $b-1<0$ 时，$x=1$ 是奇点.

  考虑 $x=0$ 附近的性态，$x^{a-1}=\dfrac{1}{x^{1-a}}$，因此当 $1-a<1$ 时积分收敛；同理可得当 $1-b<1$ 时积分收敛.

- $B(a,b)=B(b,a)$

- 当 $b>1$ 时，借助于分部积分可得

$$\begin{aligned}
B(a,b)&=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 (1-x)^{b-1}\mathrm{d}\frac{x^a}{a}\\
&=(1-x)^{b-1}\frac{x^a}{a}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^a}{a}\mathrm{d}(1-x)^{b-1}\\
&=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{b-1}{a}\int_0^1\left[x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)\right](1-x)^{b-2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{b-1}{a}B(a,b-1)-\frac{b-1}{a}B(a,b)
\end{aligned}$$

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$$

$$\begin{aligned}
B(a,n)&=\frac{n-1}{a+n-1}B(a,n-1)\\
&=\frac{n-1}{a+n-1}\frac{n-2}{a+n-2}B(a,n-2)\\
&=\frac{n-1}{a+n-1}\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{1}{a+1}B(a,1)\\
B(a,1)&=\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}
\end{aligned}$$

$$B(a,n)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n-1)}$$

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

- 我们来给出 β 函数的另外一种解析表示，这种表示常常是有益的. 令 $x=\dfrac{y}{1+y}$，则 $y=\dfrac{x}{1-x}$

$$
\begin{aligned}
B(a,b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a-1}}\frac{1}{(1+y)^{b-1}}\mathrm{d}\frac{y}{1+y} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

- $$B(a,1-a)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{1+y}\mathrm{d}y$$

4.2 第二型欧拉积分

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

- 定义域：$(0,+\infty)$
- 积分并不一致收敛
- $$
\begin{aligned}
\Gamma(a) &= \int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\mathrm{e^{-x}=z}} \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n(1-z^{\frac{1}{n}})\right)^{a-1}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}\left(n(1-z^{\frac{1}{n}})\right)^{a-1}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

5 级数的逐项积分

- 常义可积
  - 单项可积，一致收敛
- 反常可积
  -

定理 5.1. 设非负的函数 $f(x,y)$ 对 x 在区间 $[a,+\infty)$ 内是连续的，并且跟着 y 的增加而增加，趋于极限函数 $\varphi(x)$，而 $\varphi(x)$ 也在所说的区间内是连续的，则从积分

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

的存在，可推得积分

$$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

的存在，也可得出公式

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

注记.

- 非负是因为非负函数才有比较判别法
- $f(x,y)$ 对 x 连续，相对 y 单调递增，$\varphi(x)$ 连续，是为了用 *Dini* 定理证明任意有限区间一致收敛
- 同时 $\varphi(x)$ 的反常可积性保证了所有 $f(x,y)$ 的反常可积性以及积分的一致收敛性

定理 5.2. 在上面的定理中，将积分

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

的存在性可以替换为极限

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

的存在性代替.

6 习题

6.1 史济怀练习 18.1 含参变量的常义积分

1. 求极限

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos tx\mathrm{d}x$

解. (1) 由于 $\sqrt{x^2+a^2}$ 在 $[-1,1]$ 上连续，所以

$$\lim_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\lim_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=1$$

(2) 由于 $x^2\cos tx$ 在 $[0,2]\times[0,2]$ 上连续，

$$\lim_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos tx\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\lim_{t\to 0}x^2\cos tx\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$$

□

2. 设 f 是可微函数. 令

$$F(u)=\int_{0}^{u}(x+u)f(x)\mathrm{d}x$$

计算 $F''(u)$.

解.

$$F'(u)=\int_{0}^{u}f(x)\mathrm{d}x+2uf(u)$$

$$F''(u)=3f(u)+2uf'(u)$$

□

3. 计算下列函数的导数：

(1) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{(1+t)^2}\mathrm{d}t$

(2) $f(x)=\int_{x}^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2u^2}\mathrm{d}u$

(3) $f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t$

(4) $f(u)=\int_{0}^{u}g(x+u,x-u)\mathrm{d}x$

解. (1)

$$f'(x)=-\sin x\mathrm{e}^{(1+\cos x)^2}-\cos x\mathrm{e}^{(1=\sin x)^2}$$

(3)

$$f'(x)=\frac{b+2x}{x(b+x)}\sin x(b+x)-\frac{a+rx}{x(a+x)}\sin x(a+x)$$

(4)

$$f'(u) = \int_0^u \left(\frac{\partial g(x+u, x-u)}{\partial (x+u)} - \frac{\partial g(x+u, x-u)}{\partial (x-u)} \right) \mathrm{d}x + g(2u, 0)$$

□

4. 设 φ, ψ 可以分别微分两次和一次. 证明：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x)\mathrm{d}s$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

5. 设 f 在闭区间 $[0,a]$ 上连续，且当 $t \in [0,a]$ 时，$(x-t)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. 证明：

$$u(x,y,z) = \int_0^a \frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}}$$

满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

6. 设 $a < b, f$ 为可微函数，令

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x)|x-u|\mathrm{d}x$$

计算 $\varphi''(u)$.

解. 1. $a \leqslant u \leqslant b$ 时，

$$\varphi'(u) = 2f(u)$$

2. 当 $a > u$ 或 $u > b$ 时，

$$\varphi'(u) = \int_a^b f(x) \left(\frac{\sqrt{(u-x)^2} - \frac{(u-x)^2}{\sqrt{(u-x)^2}}}{(u-x)^2} \right) \mathrm{d}x = 0$$

□

7. 在区间 $[1,3]$ 上用线性函数 $a + bx$ 近似代替函数 $f(x) + x^2$. 试选取 a, b, 使得

$$\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 \mathrm{d}x$$

取最小值.

解.

$$f'(a) = 4a + 8b - \frac{52}{3}$$

$$f'(b) = 8a + \frac{4}{3}b - 40$$

令 $f'(a) = f'(b) = 0$，解得

$$a = -\frac{11}{3}, b = 4$$

□

6.2 史济怀问题 18.1 含参变量的常义积分

1. 证明 n 阶 Bessel 函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

.

证明.

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (-\sin\varphi)(-\sin(n\varphi - x\in\varphi))\mathrm{d}\varphi$$

$$J - n''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

□

2. 利用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}(|a|<1)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$

解.

(1)

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a\tan^2 x}{a^2\tan^2 x + b^2}\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{t=\tan x} \int_0^{+\infty} \frac{2at^2}{a^2t^2+b^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x}\left(\frac{\cos x}{1+a\cos x} - \frac{-\cos x}{1-a\cos x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\cos x} + \frac{1}{1-a\cos x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan x} \frac{\tan x}{1+a^2\tan^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2\tan^2 x} \mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\tan x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2t^2} \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

3. 证明：对任意的实数 u，有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x} \cos(u\sin x) \mathrm{d}x = 1.$$

证明. 这题告诉你让你证比让你自己求要容易一些. 他都告诉你是常数了，那随便带个 u 的值算一下，然后再求一下关于 u 的导数证明是 0 就好了.

当 $u=0$ 时，显然成立.

$$\begin{aligned}
f'(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos x \mathrm{e}^{u\cos x} \cos(u\sin x) - \sin x \sin(u\sin x) \mathrm{e}^{u\cos x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi u} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x} \mathrm{d}\sin(u\sin x) + \frac{1}{2\pi u} \int_0^{2\pi} \sin(u\sin x) \mathrm{d}\mathrm{e}^{u\cos x} \\
&= \frac{1}{2\pi u} \mathrm{e}^{u\cos x} \sin(u\sin x) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

6.3 史济怀练习题 18.2 含参变量反常积分的一致收敛

1. 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux}\sin x\mathrm{d}x, 0 < u_0 \leqslant u < +\infty$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\mathrm{d}x, -\infty < u < \infty$

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(x+u)^2}\mathrm{d}x, 0 \leqslant u < +\infty$

(4) $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, 0 \leqslant \alpha < +\infty$

(5) $\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x, 0 \leqslant u < +\infty$

解.

(1)

$$|\mathrm{e}^{-ux}\sin x| \leqslant \mathrm{e}^{-u_0 x}$$

由 Weierstrass 判别法，一致收敛.

(2) 注意到 $\cos ux$ 有界，$\frac{x^2}{1+x^4}$ 绝对可积，因此

$$\left|\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\right| \leqslant \frac{x^2}{1+x^4},$$

由 Weierstrass 判别法，一致收敛.

(3)

$$\frac{1}{(1+(x+u)^2)} \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

由 Weierstrass 判别法，一致收敛.

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，由于被积函数中不含 u，因此这个收敛关于 u 显然是一致的. 而对于每个 $\alpha \in [0, +\infty)$，$\mathrm{e}^{-\alpha}$ 单调，并且有 $|\mathrm{e}^{-\alpha x}| \leqslant 1$，因此关于 α 是一致有界的.

由 Abel 判别法，一致收敛.

(5)

□

2. 证明：积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$$

在 $[\delta, +\infty)(\delta > 0)$ 上一致收敛，但在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证明. (1) 不妨设 $a>0$，则

$$\left|\int_0^A \sin ux\mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{\cos ux-1}{u}\right| \leqslant \frac{2}{a}$$

即关于 u 一致有界.

又 $\dfrac{1}{x}$ 单调递减趋于零，由于不含 u，所以这个趋向是一致的.

由 Dirichlet 判别法，一致收敛.

(2)

□

3. 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明. 注意到 e^{-ux} 对于任意 $u\in[0,+\infty)$ 单调且关于 u 一致有界，为了运用 Abel 判别法，我们只需要证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{d}x$ 关于 u 一致收敛.

而 $\displaystyle\int_0^A \sin 3x\mathrm{d}x$ 关于 u 一致有界，$\dfrac{1}{x+u}\leqslant\dfrac{1}{x}$ 关于 u 一致地单调递减趋于零，因此由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{d}x$ 关于 u 一致收敛. □

4. 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续. 如果对每个 $u\in[\alpha,\beta)$，积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 都收敛，但积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散，证明：$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上不一致收敛.

证明. 用反证法.

设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上一致收敛，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，使得当 $A'>A\geqslant A_0$ 时，对一切 $y\in[c,d)$ 有

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

在上式中令 $y\to d-0$，便得

$$\left|\int_A^{A'}f(x,d)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon$$

这与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,d)\mathrm{d}x$ 发散矛盾！命题得证. □

6. 证明：积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明.

(1) 对任意 $A>0$，

$$\left|\int_0^A \sin ux\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{u}\int_0^{Au}\sin t\mathrm{d}t\right| = \frac{1-\cos Au}{u} \leqslant \frac{2}{\delta}$$

因此积分 $\displaystyle\int_0^A \sin ux\mathrm{d}x$ 对 $u\in[\delta,+\infty)$ 一致有界.

又 $\dfrac{x}{a^2+x^2}$ 在 $x>a$ 后单调递减趋于零，由于该表达式与 u 无关，所以这个趋向显然关于 u 是一致的.

因此由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛.

(2) 被积函数中因子 $\dfrac{x}{a^2+x^2}$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐进性态与 $\dfrac{1}{x}$ 相同. 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是不一致收敛的，故可依次证明原含参反常积分在 $(0,+\infty)$ 上也是不一致收敛的. 下面给出具体的证明.

由于

$$\frac{\sin ux}{x}=\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\frac{a^2+x^2}{x}$$

若 $I(u)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，$\dfrac{a^2+x^2}{x^2}=1+\dfrac{a^2}{x^2}$ 对 x 单调且 $\left|1+\dfrac{a^2}{x^2}\right|\leqslant 1+a^2$，由 Abel 判别法知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$$

在 $(0,+\infty)$ 上也一致收敛. 矛盾！

$\square$

6.4 史济怀问题 18.2 含参变量反常积分的一致收敛

1. 证明：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $[\eta,+\infty)$ 上一致收敛，关于 α 在 $(0,\delta)$ 上不一致收敛，这里 η 和 δ 是任意正数.

证明. 由前可知，对于任意的 $A>0$，$|\sin\alpha x|$ 关于 $\alpha\in[\eta,+\infty)$ 是一致有界的；又有 $\frac{x}{\alpha(1+x^2)} \leqslant \frac{x}{\delta(1+x^2)}$ 单调趋于零当 $x>1$，因此由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $[\eta,+\infty)$ 上一致收敛. □

2. 证明：积分 $\int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-1/\alpha)^2}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $(0,1]$ 上一致收敛，但不能用 Weierstrass 判别法来判断.

证明. 先证明对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，当 $A>A_0$ 时，$\int_\varepsilon^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-1/a)^2/\alpha^2}\mathrm{d}x<\varepsilon$ 对 $\alpha\in[\varepsilon/\sqrt{\pi},1]$ 成立.

$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ 收敛，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，当 $A>A_0$ 时，$\int_{A-\sqrt{\pi}-\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u<\varepsilon$

换元 $u=(x-1/\alpha)\alpha$,$\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\mathrm{dx}\leqslant\int_{A-\sqrt{\pi}/\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u<\varepsilon$

当 $\alpha\in(0,\varepsilon/\sqrt{\pi})$ 时，$\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\mathrm{d}x\leqslant a\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}ua\sqrt{\pi}<\varepsilon$

得 $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,1]$ 上一致收敛.

设该积分可用 Weierstrass 判别法判断，即存在函数 $g(x)$ 使得当 $(x,\alpha)\in[1,+\infty]\times(0,1]$ 时，

$$\mathrm{e}^{-(x-1/\alpha)^2/\alpha^2}\leqslant g(x)$$

且 $\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x<+\infty$

令 $x=1/\alpha$, 得到 $g(x)\geqslant 1$，这与 $\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 矛盾！ □

6.5 史济怀练习 18.3 含参变量反常积分的性质

1. 研究下列函数在指定区间上的连续性：

(1) $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{2+t^x}\mathrm{d}t, x\in(2,+\infty);$

(2) $\varphi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x, \alpha\in(0,2);$

(3) $f(\alpha)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x, \alpha\in(0,+\infty).$

解. (1) 首先要证明 $f(x)$ 的良定性，即对于任意 $x\in(2,+\infty)$，无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{2+t^x}\mathrm{d}t$ 收敛，也即函数 $F(A,x)=\displaystyle\int_0^{A}\frac{t}{2+t^x}\mathrm{d}t$ 当 $A\to+\infty$ 时逐点收敛到 $f(x)$. 这是因为当 $x\to+\infty$ 时，

$$\frac{t}{2+t^x}\sim\frac{1}{t^{x-1}}, x>2.$$

被积函数 $\dfrac{t}{2+t^x}$ 在 $(2,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上是连续的.

接下来证明 $F(A,x)$ 当 $A\to+\infty$ 时对 $x\in[2+\delta,+\infty)$ 一致收敛到 $f(x)$，其中 δ 为任意正数.

当 $t\geqslant 1$ 时，

$$\frac{t}{2+t^x}\leqslant\frac{t}{2+t^{2+\delta}}\sim\frac{1}{t^{1+\delta}}$$

由 Weirestrass 判别法，积分一致收敛.

因此 $f(x)$ 在指定区间上是连续的.

(2)

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x$$

当 $x\to 0$ 时，

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\sim\frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

要想收敛，需要 $\alpha-1<1$，即 $\alpha<2$.

当 $x\to\pi$ 时，

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\sim$$

□

3. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin cx\mathrm{d}x.$

解. 观察到 $\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}$ 其实是以 x 为参数的积分 $\displaystyle\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y.$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin cx\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\sin cx\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin cx \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{c}{y^2+c^2} \mathrm{d}y \\
&= \arctan \frac{y}{c} \bigg|_a^b \\
&= \arctan \frac{b}{c} - \arctan \frac{a}{c}
\end{aligned}
$$

□

4. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2} \mathrm{d}x (\beta \neq 0)$.

解. □

Part II

Fourier 分析

Chapter 6

Fourier 级数的基本性质

1 Fourier 级数的唯一性

Stein 给这小节起名为“Fourier 级数的唯一性”，不过我怎么品都觉得这个名字起反了，但是我也想不出一个合适的名字.

Stein 的原话是这样说的：

> If we were to assume that the Fourier series of function f converge to f in an appropriate sense, then we could infer that a function is uniquely determined by its Fourier coefficients.

要论“Fourier 级数的唯一性”那应该是说同一个函数 f 不可能有两个不同的 Fourier 级数吧，不过这里讨论的是如果两个函数的 Fourier 级数相同，那么它们两个就是同一个函数. 也就是说从函数全体映射到 Fourier 级数全体的这个映射是一个单射.

但是在不对函数空间提任何要求的情况下上面这句话显然是错的.Fourier 系数的计算是积分运算，因此如果我们仅仅是修改函数在有限点处的值，是不会影响到 Fourier 系数的结果的. 但是，我们有如下积级的结果.

定理 1.1. 设 f 是圆周上的可积函数，并且 $\hat{f}(n)=0$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 成立，那么在 f 的任一连续点 θ_0 处有 $f(\theta_0)=0$.

证明. 我们首先假设 f 是实值的.

不失一般性，设 f 定义在 $[-\pi,\pi]$ 上，$\theta_0=0$，并且 $f(0)>0$.

现在的想法是构造一族三角多项式 $\{p_k\}$ 在 0 处 peak，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\to\infty,\ \text{as k}\to\infty.$$

这样就得到了我们想要的矛盾因为根据定理的假设这些积分应该为 0.

因为 f 在 0 处连续，我们能够选择 $\delta\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 使得当 $|\theta|<\delta$ 时就有 $f(\theta)>\dfrac{f(0)}{2}$.（这里可以暂且理解为要选取 $\delta>0$，至于 $\delta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 的作用会在之后看到.）

设

$$p(\theta)=\varepsilon+\cos\theta,$$

其中 ε 要选取得足够小使得 $|p(\theta)| < 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ 对 $\delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi$ 成立.（看一下为什么我们能选出这样的 ε. 首先 $p(\theta)$ 在 $[0,\pi]$ 上是单调递减的，因此我们只需要检查一下 $p(\theta)$ 在 δ 处和 π 处的值.$|p(\pi)| = |\varepsilon - 1| = 1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ 恒成立.$|p(\delta)| = |\varepsilon + \cos\delta| = \varepsilon + \cos\delta < 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$，即 $\cos\delta < 1 - \dfrac{3}{2}\varepsilon$，因为 $\cos\delta < 1$ 总是成立的，所以我们可以塞进去足够小的 ε. 要注意到我们这里面虽然享受了 $\delta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 带来的 $\cos\delta \geqslant 0$ 的在去绝对值时的方便，但这并不是本质的.）

接着，选取 $\eta \in (0,\delta)$ 使得当 $|\theta| < \eta$ 时有 $p(\theta) \geqslant 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

这样，$[-\pi,\pi]$ 就被分成了三部分，$|\theta| < \eta, \eta < |\theta| < \delta$ 和 $\delta < |\theta| < \pi.\varepsilon, \delta, \eta$ 的选取使得 $p(\theta)$ 在第一部分比 1 稍大一点，在第三部分比 1 稍小一点，虽然这个值差得不多，但是通过构造

$$p_k(\theta) = [p(\theta)]^k,$$

就可以把这个很小的差异放大到很大.

接下来我们分别估计积分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta$ 在三部分上的值.

首先，在第三部分上，由于 $p(\theta)$ 比 1 稍小一点，$p_k(\theta)$ 就随着 k 的增大趋向于 0 了，

$$\left|\int_{\delta\leqslant|\theta|\leqslant\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2\pi B\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

其中 B 是 $f(\theta)$ 的一个上界.

其次，在第一部分上，由于 $p(\theta)$ 比 1 稍大一点，$p_k(\theta)$ 就随着 k 的增大趋向于 $+\infty$ 了，

$$\int_{|\theta|<\eta} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant 2\eta\frac{f(0)}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k.$$

第一部分和第三部分是我们构造中的主角，但是我们也不能扔下第二部分不管. 而这里才是 $\delta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 这个要求真正发挥作用的地方，它使得 $p(\theta)$ 在 $|\theta| < \delta$ 是恒正的，而 δ 的选取自然也保证了 $f(\theta)$ 在 $|\theta| < \delta$ 是恒正的，因此

$$\int_{\eta\leqslant|\theta|<\delta} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant 0,$$

我们不期待这部分承担趋向于 $+\infty$ 的责任，只希望它不要扯后腿就好.

因此，

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta \to \infty, \text{ as k} \to \infty,$$

这样就完成了 f 是实值函数时的证明.

一般地，将 f 写作 $f(\theta) = u(\theta) + \mathrm{i}v(\theta)$，其中 u 和 v 是实值函数. 如果我们定义 $\overline{f}(\theta) = \overline{f(\theta)}$，那么

$$u(\theta) = \frac{f(\theta) + \overline{f}(\theta)}{2}, v(\theta) = \frac{f(\theta) - \overline{f}(\theta)}{2\mathrm{i}}.$$

而

$$\begin{aligned}\hat{\overline{f}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}}\mathrm{d}x \\ &= \overline{\hat{f}(-n)} = 0,\end{aligned}$$

由此我们推出 u 和 v 的 Fourier 系数也都为零，这样就完成了证明. □

2 卷积

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-iny}\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{in(x-y)}\right)\mathrm{d}y \\
&= (f * D_N)(x)
\end{aligned}$$

命题 2.1. 设 f, g 和 h 都是以 2π 为周期的可积函数. 那么

(i) $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$.

(ii) $(cf)*g = c(f*g) = f*(cg), \forall\ c \in \mathbb{C}$.

(iii) $(f*g) = (g*f)$.

(iv) $(f*g)*h = f*(g*h)$.

(v) $f*g$ 是连续函数.

(vi) $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

注记. 前四条描述了卷积的代数性质：线性，交换性，结合性.

第五条给出了一条重要的原则，卷积 $f*g$ 比 f 或 g 的正则性更好.

第六条在 Fourier 级数的研究中是关键的. 一般来说，函数的逐点乘积 fg 的傅里叶系数并不是 f 和 g 的傅里叶系数的乘积. 但是，第六条告诉我们如果我们把两个函数的逐点乘积替换为两个函数的卷积，那么这就是成立的.

注记. 如果将以 2π 为周期的可积函数的全体视为一个线性空间，那么函数的逐点相乘和函数的卷积都同样得到一个以 2π 为周期的可积函数，因此都是该线性空间上的一个二元运算，使得该线性空间成为不同的代数. 注意到这两个二元运算都具有良好的性质，比如线性、结合性和交换性，但卷积在 Fourier 分析中会扮演更重要的角色.

证明. (iii)

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \\
&= \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(x-z)\mathrm{dz}
\end{aligned}$$

□

3 Cesaro 求和与 Abel 求和

3.1 Poisson 核

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{in\theta}$$

$$A_r(f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n \mathrm{e}^{in\theta}, r \in [0,1)$$

- a_n 有界

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}|\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|\mathrm{d}\theta =: M \end{aligned}$$

- $A_r(f)(\theta)$ 绝对收敛

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}|a_n||\mathrm{e}^{in\theta}| \\ =&\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}|a_n| \\ \leqslant& M\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} < +\infty \end{aligned}$$

- 上面的绝对收敛显然是一致的，因此 $A_r(f)(\theta)$ 也一致收敛

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}$$

$$\begin{aligned} A_r(f)(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n \mathrm{e}^{in\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{e}^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\varphi) r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= (f * P_r)(\theta) \end{aligned}$$

4 练习

6.Left f be the function defined on $[-\pi,\pi]$ by $f(\theta)=|\theta|$.

(a) Draw the graph of f.

(b) Calculate the Fourier coefficients of f, and show that

$$\hat{f}(n)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{if } n=0\\ \dfrac{-1+(-1)^n}{\pi n^2} & \text{if } n\neq 0\end{cases}$$

(c) What is the Fourier series of f in terms of sines and cosines?

(d) Taking $\theta=0$, prove that

$$\sum_{n\ odd\ \geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\quad\text{and}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

证明. 当 $n=0$ 的时候,

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\theta|\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$$

当 $n\neq 0$ 的时候,

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\theta|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\left[F(\pi)-F(0)-F(0)+F(-\pi)\right]\\&=\frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{-2}{\pi(2k-1)^2} & n=2k-1\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $F(\theta)=\dfrac{\theta}{-\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}+\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{n^2}$,是 $\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$ 的原函数.

因此

$$\begin{aligned}f(x)&\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\hat{f}(-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

□

10.Suppose f is a periodic function of period 2π which belongs to the class C^k.Show that

$$\hat{f}(n)=O(\frac{1}{|n|^k})\text{ as }|n|\to\infty$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}n}\left[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}f(x)\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

归纳可证. □

11.Suppose that $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a sequence of Riemann integrable functions on the interval $[0,1]$ such that

$$
\int_0^1 |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{as } k \to \infty.
$$

Show that $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ uniformly in n as $k \to \infty$.

5 问题

1.One can construct Riemann integrable functions on $[0,1]$ that have a dense set of discontinuities as follows.

(a) Let $f(x)=0$ when $x<0$, and $f(x)=1$ if $x\geqslant 0$. Choose a countable dense sequence $\{r_n\}$ in $[0,1]$. Then, show that the function

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}f(x-r_n)$$

is integrable and has discontinuities at all points of the sequence $\{r_n\}$.[Hint;F is monotonic and bounded.]

(b) Consider next

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}g(x-r_n),$$

where $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ when $x\neq 0$, and $g(0)=0$. Then F is integrable, discontinuous at each $x=r_n$, and fails to be monotonic in any subinterval of $[0,1]$.[Hint:Use the fact that $3^{-k}>\sum\limits_{n>k}3^{-n}$.]

(c) The original example of Riemann is the function

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2},$$

where $(x)=x$ for $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ and (x) is continued to $\mathbb{R}$ by periodicity, that is, $(x+1)=(x)$. It can be shown that F is discontinuous whenever $x\dfrac{m}{2n}$, where $m,n\in\mathbb{Z}$ with m odd and $n\neq 0$.

证明. (a) 引入 $\dfrac{1}{n^2}$ 是为了保证级数的一致收敛性，由 Weierstrass 定理易证.

要想证明 $F(x)$ 在某个 r_k 处不连续，只需证明

$$F_k(x)=\sum_{n\neq k}\frac{1}{n^2}f(x-r_n)$$

在 r_k 处连续，由逐项取极限的定理，这是显然的.

(b) 这里 $F(x)$ 不再是单调函数，因此不能再像上一问一样论证可积性，不过可以像上一问一样论证 $F(x)$ 在 $\{r_n\}$ 中的点处不连续，而在非 $\{r_n\}$ 的点处是连续的. 由于 $\{r_n\}$ 可数，故零测，因此由勒贝格定理 F 可积.

任取 $[0,1]$ 的一个开子区间，由 $\{r_n\}$ 稠密可得该子区间中至少包含一点 r_k，我们证明 $F(x)$ 在 r_k 处不单调.

单看一个 $3^{-k}g(x-r_k)$，它显然在 r_k 处不单调了，不管离 r_k 多近，我都可以找到取值 3^{-k} 和 -3^{-k} 的点.

啊，反正我没想清楚他这个 Hint 该怎么用. 我觉得它的意思是让我用 $3^{-k}g(x-r_k)$ 的振幅来控住后面的所有的项，依旧振荡，但振幅不再正负对称. 但是前面的项又该怎么论证呢？我想

的是靠前面这些项在 r_k 处连续，那我就总可以找到足够小的区间，使得这个连续函数在这个区间上的振幅足够小. 但是这个论证难道对后面的项就不成立了吗？我觉得也没有问题啊.

(c)

□

2.Let D_N denote the Dirichlet kernel

$$D_N(\theta)=\sum_{k=-N}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=\frac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}},$$

and define

$$L_N=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(\theta)|\mathrm{d}\theta.$$

(a) Prove that

$$L_N\geqslant c\log N$$

for some constant $c>0$.[Hint:Show that $|D_N(\theta)|\geqslant c\dfrac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{|\theta|}$, change variables, and prove that

$$L_N\geqslant c\int_{\pi}^{N\pi}\frac{|\sin\theta|}{|\theta|}\mathrm{d}\theta+O(1).$$

Write the integral as a sum $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$. To conclude,use the fact that $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant c\log n$.]A more careful estimate gives

$$L_N=\frac{4}{\pi^2}\log N+O(1).$$

(b) Prove the following as a consequence:for each $n\geqslant 1$

证明.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(\theta)|\mathrm{d}\theta\\
\geqslant&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin\left(N+1/2\right)\theta|}{|\theta|}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin\left(N+1/2\right)\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{(N+1/2)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{N\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta+O(1)\\
=&\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\mathrm{d}\theta+O(1)\\
\geqslant&\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin\theta|\mathrm{d}\theta+O(1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} + O(1) \\
&> \frac{4}{\pi^2} \log(N+1) + O(1) \\
&> \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)
\end{aligned}
$$

□

Chapter 7

$\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换

1 Fourier 变换的基本理论

1.1 实直线上函数的积分

定义 1.1. 称 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 为适度下降的，如果 f 是连续的，并且存在常数 $A > 0$ 使得

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2}$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

注记. 事实上，将上面的指数 2 替换为 $1+\varepsilon$ 也能达到我们的目的，其中 ε 是任意大于零的正数.

我们将函数在 $\mathbb{R}$ 上积分的基本性质总结在一个命题中.

命题 1.1.

(i) 线性：如果 $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 并且 $a, b \in \mathbb{C}$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x))\mathrm{d}x = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 平移不变性：对于任意 $h \in \mathbb{R}$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) 伸缩：设 $\delta > 0$，那么

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(iv) 连续性：设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$，那么

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h) - f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

注记. 从 (iv) 的证明中能够体会到我们必须对 f 在无穷远处的衰减性提出要求.

1.2 Fourier 变换的定义

如果 $f \in \mathcal{R}$，我们定义它的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x.$$

当然，$|\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}| = 1$，所以被积函数也是适度下降的，因此这个积分是有意义的.

事实上，上面的这个观察说明了 $\hat{f}$ 是有界的，并且，一个简单的论证能够说明 $\hat{f}$ 是连续的，并且当 $|\xi|$ 趋于 ∞ 时趋于零，参见练习 5. 但是，上面的定义并没有保证 $\hat{f}$ 也是适度下降的或者具有某种衰减性. 特别地，到目前为止还不甚清楚如何让积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}\xi$ 和相应的 Fourier 反演公式有意义. 为了补救，我们引入一个由 Schwartz 考虑的更加精细的函数空间，它是很适合用来建立 Fourier 变换的最初的性质的.

选择 Schwartz 空间的动机是一个将 $\hat{f}$ 的衰减性与 f 的正则性联系起来的重要原理：f 的正则性越高，$\hat{f}$ 衰减得就越快. 一个反映这个原理的例子在练习 3 中给出.

1.3 Schwartz 空间

定义 1.2. 称一个函数 f 是速降的，如果

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f(x)| < \infty \forall\ k \geqslant 0$$

称各阶导数都是速降函数的光滑函数全体为 $\mathbb{R}$ 上的 *Schwartz* 空间，记作 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

注记. 容易验证 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 构成 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 除此之外，如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

这反映了 *Schwartz* 空间的一个重要特征：关于求导运算和多项式乘法封闭.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中一个重要的函数类是“冲击函数”，它们在有界区域外为零，参见练习 4.

1.4 $\mathcal{S}$ 上的 Fourier 变换

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换被定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x.$$

在下面的命题中我们列举了 Fourier 变换的一些简单性质. 我们用记号

$$f(x) \longrightarrow \hat{f}(\xi)$$

表示 $\hat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换.

命题 1.2. 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么

(i) $f(x+h) \longrightarrow \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi}, \forall\ h \in \mathbb{R}.$

(ii) $f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xh} \longrightarrow \hat{f}(\xi+h), \forall\ h \in \mathbb{R}.$

(iii) $f(\delta x) \longrightarrow \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi), \forall\ \delta > 0.$

(iv)

(v)

证明. (i)

$$\begin{aligned}
f(x+h) \longrightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x-h)\xi}\mathrm{d}x \\
= & \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} \\
= & \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi+h) = & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x(\xi+h)}\mathrm{d}x \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xh}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x \\
= & \widehat{f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xh}}
\end{aligned}$$

(iii)

(iv)

(v)

$\square$

定理 1.1. 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

作为好核的高斯函数族

通过直接计算来证明 $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ 的 Fourier 变换仍为它自己. 其中 Fourier 变换的定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) = & \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left[\pi x^2 + 2\pi \mathrm{i} x\xi\right]}\mathrm{d}x \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left[(\sqrt{\pi}x)^2 + 2\sqrt{\pi}x\sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi + (\sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi)^2 - (\sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi)^2\right]}\mathrm{d}x \\
= & \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi}\mathrm{i}\xi\right)^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\square$

1.5 Fourier 反演

下一个结果是一个有时被称做乘法公式的等式.

命题 1.3. 如果 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)\mathrm{d}y.$$

证明.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}yx}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此所谓的乘法公式本质上是积分交换次序问题. □

1.6 Plancherel 等式

定理 1.2 (Plancherel)**.** 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，那么 $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

证明. 欲证的东西是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，定义

$$f^{\flat}(x) = \overline{f(-x)}.$$

那么

$$\begin{aligned}
\widehat{f^{\flat}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\xi}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}}\mathrm{d}x \\
&= \overline{\hat{f}(\xi)}.
\end{aligned}$$

现在设

$$h = f * f^{\flat} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t-x)}\mathrm{d}t,$$

注意到

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \|f\|.$$

而

$$\begin{aligned}
h(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\widehat{f^{\flat}}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\
&= \|\hat{f}\|
\end{aligned}$$

□

2 Poisson 求和公式

给定一个适度下降函数 f，我们可以构造

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$$

- $f(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$
- $F_1(x) = f(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x+n) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$
  - $F_1(x)$ 一致收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$ 一致收敛
  - 当 $x \in [-A, A]$ 时，$f(x+n) \leqslant \dfrac{1}{1+(x+n)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+(n-A)^2}$
  - $\sum\limits_{n>A+1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+(n-A)^2} \leqslant \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+m^2} < +\infty$
  - 由以上证明还可以发现 $F_1(x)$ 是绝对收敛的，因此可以改变求和次序，从而易知 $F_1(x)$ 以 1 为周期

3 练习

3.The following exercise illustrates the principle that the decay of $\hat{f}$ is related to the continuity properties of f.

(a) Suppose that f is a function of moderate decrease on $\mathbb{R}$ whose Fourier thransform $\hat{f}$ is continuous and satisfies

$$\hat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\right) \quad \text{as } |\xi| \to \infty$$

for some $0 < \alpha < 1$.Prove that f satisfies a Hölder condition of order α, that is, that

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}$$

for some $M > 0$ and all $x, h \in \mathbb{R}$.

(b) Let f be a continuous function on $\mathbb{R}$ which vanishes for $|x| \geqslant 1$, with $f(0) = 0$, and which is equal to $\dfrac{1}{\log(1/|x|)}$ for all x in a neighborhood of the origin. Prove that $\hat{f}$ is not of moderate decrease. In fact,there is no $\varepsilon > 0$ so that $\hat{f}(\xi) = O\left(\dfrac{1}{|\xi|^{1+\varepsilon}}\right)$ as $|\xi| \to \infty$.

证明. (a) 由 Fourier 反演公式，

$$f(x+h) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi} \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} - 1\right) \mathrm{d}\xi$$

$\hat{f}$ 上的条件等价于

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{A}{1+|\xi|^{1+\alpha}}, \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} - 1| &= |\cos 2\pi\xi h + \mathrm{i}\sin 2\pi\xi h - 1| \\
&= \sqrt{\cos^2 2\pi\xi h + 1 - 2\cos 2\pi\xi h + \sin^2 2\pi\xi h} \\
&= \sqrt{2 - 2\cos 2\pi\xi h} \\
&= \sqrt{4\sin^2 \pi\xi h} \\
&= 2|\sin \pi\xi h|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h^{\alpha}}\right| &\leqslant \frac{1}{|h|^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A|\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h\xi} - 1|}{1+|\xi|^{1+\alpha}} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{4A}{|h|^{\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin \pi\xi h|}{1+\xi^{1+\alpha}} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{4A}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{4A}{\pi} \int_0^{1} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u + \frac{4A}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$\frac{4A}{\pi} \int_0^{1} \frac{|\pi|^{1+\alpha} \sin u}{|\pi h|^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u \leqslant 4A\pi^{\alpha} \int_0^1 \frac{\sin u}{u^{1+\alpha}} \mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= 4A\pi^\alpha \int_0^1 \frac{\sin u}{u}\frac{1}{u^\alpha}\mathrm{d}u \\
&\leqslant 4A\pi^\alpha \int_0^1 \frac{1}{u^\alpha}\mathrm{d}u < +\infty \\
\frac{4A}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{|\pi|^{1+\alpha}\sin u}{|\pi h|^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}\mathrm{d}u &\leqslant 4A\pi^\alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1+\alpha}}\mathrm{d}u \\
&\leqslant 4A\pi^\alpha \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{1+\alpha}}\mathrm{d}u < +\infty
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\left|\frac{f(h)-f(0)}{|h|^\varepsilon}\right| = \frac{1}{-|h|^\varepsilon \log|h|} \to \infty
$$

□

4.Examples of compactly supported functions in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ are very handy in many applications in analysis. Some examples are:

(a) Suppose $a < b$, and f is the function such that $f(x) = 0$ if $x \leqslant a$ of $x \geqslant b$ and

$$
f(x) = \mathrm{e}^{-1/(x-a)}\mathrm{e}^{-1/(b-x)}, a < x < b.
$$

Show that f is indefinitely differentiable on $\mathbb{R}$.

(b) Prove that there exists an indefinitely differentiable function F on $\mathbb{R}$ such that $F(x) = 0$ if $x \leqslant a$, $F(x) = 1$ if $x \geqslant b$, and F is strictly increasing on $[a, b]$.

(c) Let $\delta > 0$ be so small that $a + \delta < b - \delta$. Show that there exists an indefinitely differentiable function g such that g is 0 if $x \leqslant a$ or $x \geqslant b$, g is 1 on $[a + \delta, b - \delta]$, and g is strictly monotonic on $[a, a + \delta]$ and $[b - \delta, b]$.

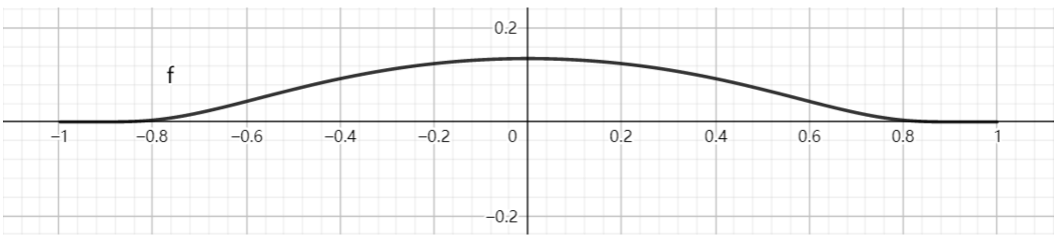

图 7.1: $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x}}, -1 < x < 1$

5.Suppose f is continuous and of moderate decrease.

(a) Prove that $\hat{f}$ is continuous and $\hat{f}(\xi) \to 0$ as $|\xi| \to \infty$.

(b) Show that if $\hat{f}(\xi) = 0$ for all ξ, then f is identically 0.

证明.

(a)

$$
\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x-1/2\xi)\xi} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此

$$
\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right] \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \mathrm{d}x
$$

(b)

□

Chapter 8

习题

0.1 史济怀 17.1 周期函数的 Fourier 级数

例 0.1. 设 f 是周期为 2π 的可积或绝对可积函数. 证明:

1. 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上递减，那么 $b_n \geqslant 0$.

证明. 积分第二中值定理 □

例 0.2. 设 f 是周期为 2π 的 *Riemann* 可积函数. 如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调，证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)(n \to \infty)$$

证明. 积分第二中值定理 □

0.2 史济怀 17.2 Fourier 级数的收敛定理

1. 把函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x(-\pi < x < \pi)$$

展开为 Fourier 级数；证明：当 $0 < x < \pi$ 时，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

解. $f(x)$ 是奇函数，因此 $a_0 = a_n = 0, n = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2((-1)^{n+1}+1)}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & n = 2k-1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}
\end{aligned}$$

因此

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x, -\pi < x < \pi$$

当 $x \in (0,\pi)$ 时，$f(x)$ 可微，因此

$$1 = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x, 0 < x < \pi$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}, 0 < x < \pi$$

在上式中取 $x = \dfrac{\pi}{2}$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

□

2. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：

1. $|x|$
2. $\sin ax (a \notin \mathbb{Z})$
3. $x \sin x$

解. 1. $|x|$ 是偶函数，因此 $b_n = 0, n = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \mathrm{d}x = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2} & n = 2k-1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}
\end{aligned}$$

因此

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x, -\pi < x < \pi$$

2. $\sin ax$ 是奇函数，因此 $a_0 = a_n = 0, n = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \sin nx \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(a+n)x - \cos(a-n)x] \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [\cos(a+n)x - \cos(a-n)x] \mathrm{d}x \\
&= \frac{2n\sin(a+n)\pi}{\pi(a^2-n^2)}
\end{aligned}$$

因此

$$\sin ax \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sin(a+n)\pi}{\pi(a^2-n^2)} \sin nx = \frac{2\sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^2-n^2} \sin nx, -\pi < x < \pi$$

3. $x\sin x$ 是偶函数，因此 $b_n = 0, n = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x \mathrm{d}x = 2 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin x\cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(n+1)x \mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(n-1)x \mathrm{d}x \\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}
\end{aligned}$$

因此

$$x\sin x \sim 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos nx, -\pi < x < \pi$$

□

3. 把 $f(x) = x - [x]$ 在 $[0, 1]$ 上展开为 Fourier 级数.

解. 当 $x \in [0, 1)$ 时，$f(x) = x$.
令 $g(x) = f(\frac{x}{2\pi}) = \frac{x}{2\pi}$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{x}{2\pi} \mathrm{d}x = 1 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{x}{2\pi} \cos nx \mathrm{d}x = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{x}{2\pi} \sin nx \mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

因此

$$g(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin nx \mathrm{d}x$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin 2\pi nx \mathrm{d}x, 0 \leqslant x \leqslant 1$$

□

4. 在区间 $(-l, l)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：

1. x

2. $x + |x|$.

证明. 1. $f(x)=x$，令 $g(x)=f(\frac{lx}{\pi})=\frac{l}{\pi}x, -\pi<x<\pi$.

因为 $g(x)$ 是奇函数，因此 $a_0=a_n=0, n=1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{l}{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}2l}{n\pi}$$

因此

$$g(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2l}{n\pi}\sin nx$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. $f(x)=x+|x|=\begin{cases}0 & -l<x<0\\ 2x & 0\leqslant x<l\end{cases}$

令 $g(x)=f(\frac{lx}{\pi})=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \frac{2l}{\pi}x & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}x=l$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2} & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}2l}{n\pi}$$

因此

$$g(x)\sim\frac{l}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2l}{n\pi}\sin nx$$

$$f(x)\sim\frac{l}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

□

5. 利用 $\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式

$$\cos ax=\frac{\sin ax}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right),$$

证明：

1. $\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}(x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

2. $\frac{1}{\sin nx}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}(x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

6. 证明：对任意的 $x \in (-\infty, \infty)$，有

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$$

0.3 史济怀练习题 17.3 Fourier 级数的 *Cesàro* 求和

1. 求下列级数的 Cesaro 和：

(1) $1+0-1+1+0-1+\cdots$

(2) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots(0<x<2\pi)$

(3) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots(0<x<2\pi)$

解. 1.

$$S_{3n-2}=1,S_{3n-1}=1,S_{3n}=0,n=1,2,\cdots$$
$$\sigma_n=\frac{S_1+\cdots+S_n}{n}$$
$$\sigma_{3n-2}=\frac{2n-1}{3n-2},\sigma_{3n-1}=\frac{2n}{3n-1},\sigma_{3n}=\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3},n=1,2,\cdots$$
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{2}{3}$$

2.

$$S_0(x)=\frac{1}{2}$$

$$S_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sigma_0(x)=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)&=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_{n-1}}{n}\\&=\frac{\sin\left(0+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x+\cdots+\sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)x}{2n\sin\frac{x}{2}}\\&=\frac{1-\cos nx}{4n\sin^2\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

对于 $x\in(0,2\pi)$，$\sigma_n(x)$ 逐点收敛到 0.

3.

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)&=\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}\\&=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{\cos\left(1+\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(2+\frac{1}{2}\right)x+\cdots+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2n\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{\sin(n+1)x - \sin x}{4n\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

对于 $x \in (0, 2\pi)$，$\sigma_n(x)$ 逐点收敛到 $\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2}$.

□

2. 证明：$[0,\pi]$ 上的连续函数可用余弦多项式一致逼近.

证明. 已知有限闭区间上的连续函数可以用它的 Fourier 级数的 Cesaro 和一致逼近，将 $[0,\pi]$ 上的连续函数偶延拓至 $[-\pi,\pi]$，那么它的 Fourier 级数是余弦级数，进而它的 Fourier 级数的 Cesaro 和是余弦多项式. 得证！ □

3. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 *Cesàro* 求和的必要条件是

$$a_n = o(n).$$

证明. $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ 有有限的极限.

由柯西收敛原理，$|\sigma_{n+1} - \sigma_n| \to 0$.

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n+1} - \sigma_n \\
=&\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n + S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} \\
=&-\frac{\sigma_n}{n+1} + \frac{S_{n+1}}{n+1} \to 0
\end{aligned}$$

由于 σ_n 有有限极限，因此 $\dfrac{\sigma_n}{n+1} \to 0$，这推出

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} \to 0.$$

同上，再有柯西收敛原理，推出

$$\frac{a_n}{n} \to 0.$$

命题得证！ □

4. 试由 Weierstrass 的关于三角多项式的逼近定理，导出关于代数多项式的逼近定理.

证明. 由于有限闭区间上连续函数可用三角多项式一致逼近，而三角多项式又可以用其泰勒级数被代数多项式一致逼近，命题得证！ □

0.4 史济怀问题 17.3 Fourier 级数的 *Cesàro* 求和

1. 设又无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 产生的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 如果

$$\lim_{x\to 1^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s,$$

则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在 Abel 意义下收敛，s 称为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的 Abel 和，记为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$. 这时，称 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 可以 Abel 求和. 证明：

(1) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在原来意义下收敛于 s，那么必有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A);$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}(A)$$

证明.

(1) 由 Abel 第二定理，即得.

(2)

$$\lim_{x\to 1^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x\to 1^{-1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

□

2. 证明：如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C)$，那么必有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$.

3. 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = \frac{1}{4}(A)$，但它不能 Casaro 求和.

证明.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1^{-1}} S(x) = \lim_{x\to 1^{-1}} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}$$

但是 $a_n = (-1)^n (n+1)$，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -1$$

由练习题 17.3.3 知不能 Cesaro 求和. □

0.5 史济怀练习题 17.4 平方平均收敛

1. 利用 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式和 Parseval 等式，求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 的和.

解. $f(x)=|x|$ 为偶函数

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x=\pi\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\\
&= \begin{cases}0 & n=2k\\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & n=2k-1\end{cases}\\
b_n &= 0
\end{aligned}
$$

因此

$$f(x)=|x|\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

相应的 Parseval 等式为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2(2k-1)x}{(2k-1)^4}$$

取 $x=0$ 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

□

2. 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant\alpha\\ 0 & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的 Parseval 等式，并求级数

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

的和.

解. $f(x)$ 是偶函数.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{\sin n\alpha}{n}\\
b_n &= 0
\end{aligned}
$$

因此

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2}$$

□

3. 对展开式

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}(-\pi < x < \pi)$$

逐项积分，求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 展开式，并证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

解.

$$\frac{x^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx - 1}{n^2}$$

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

$$\frac{x^3}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^3} + \frac{\pi^2}{3}x$$

$$\begin{aligned}
x^3 &= 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^3} + \pi^2 x \\
&= 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^3} + \pi^2 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{12 - 2n^2\pi^2}{n^3}\sin nx
\end{aligned}$$

□

7. 证明：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的区间上一致收敛，但它不是 $\boldsymbol{R}^2[-\pi, \pi]$ 中任意一个函数的 Fourier 级数.

证明.

$$\left|\sum_{n=2}^{N}\sin nx\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx - \sin x\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|+1$$
$$=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|+1$$

□

2. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且在此区间上由可积且平方可积的导数 f'. 如果 f 满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x,$$

等式当且仅当 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时成立.

例 0.3. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

证明：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx\quad(|x|\leqslant\pi).$$

例 0.4. 利用第 *4* 题的结果，证明：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}$

例 0.5. 设 a_n,b_n 是 $f\in\mathbf{R}^2[-\pi,\pi]$ 的 *Fourier* 系数. 证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收敛.

例 0.6. 设 f 是周期为 2π 的连续函数. 令

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t,$$

用 a_n,b_n 和 A_n,B_n 分别记 f 和 F 的 *Fourier* 系数. 证明：

$$A_0=a_0^2,A_n=a_n^2+b_n^2,B_n=0.$$

由此推出 f 的 *Parseval* 等式.

0.6 史济怀练习 17.5Fourier 积分和 Fourier 变换

1. 用 Fourier 积分表示下列函数

(1)

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant \pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

(3)

$$f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}(a>0)$$

解.

(1) $f(x)$ 是奇函数，所以 $a(u)=0$，$b(u)=\dfrac{1}{\pi}f(x)\sin ux\mathrm{d}x=\dfrac{2-2\cos u}{u}$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u}\sin ux\mathrm{d}u$$

(2)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{1-u^2}\sin ux\mathrm{d}u$$

(3)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{a}{a^2+u^2}\cos ux\mathrm{d}u$$

□

2. 求下列积分方程的解.

(1)

$$\int_0^{+\infty}f(t)\sin xt\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}(x>0)$$

(2)

$$\int_0^{+\infty}f(t)\cos xt\mathrm{d}t=\frac{1}{1+x^2}$$

证明. (1)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\frac{x}{1+x^2}$$

(2)

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$$

□

3. 证明：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

证明. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases}$，对 $f(x)$ 作偶延拓，

$$b(t)=0,a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos tu\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-u)\cos tu\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(t)\cos xt\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\cos xt\mathrm{d}t$$

对右式积分换元 $t=2t'$, 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\cos xt\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t'}{t'^2}\cos 2xt'\mathrm{d}t'$$

所以 $f(x)$ 得 Fourier 积分为 $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t$

$f(x)$ 在 $[0,1][1,+\infty]$ 上分段可微，且 $f(x)$ 连续，因此命题得证. □

4. 求函数 $F(u)=u\mathrm{e}^{-\beta|u|}(\beta>0)$ 的 Fourier 反变换.

证明. $\hat{F}(u)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}t\mathrm{e}^{-\beta|t|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\mathrm{d}t\right]$

由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}(a>0)$, 得

$$\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\mathrm{d}t=\frac{1}{(\beta+u\mathrm{i})^2}$$

$$\int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\mathrm{d}t=-\frac{1}{(\beta-u\mathrm{i})^2}$$

□

0.7 Stein Chapter2 Basic Properties of Fourier Series

0.8 Stein Chapter3 Convergence of Fourier Series

4.Recall the vector space $\mathcal{R}$ of integrable functions, with its inner product and norm

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

(a) Show that there exist non-zero integrable functions f for which $\|f\| = 0$.

(b) However,show that if $f \in \mathcal{R}$ with $\|f\| = 0$, then $f(x) = 0$ whenever f is continuous at x.

(c) Conversely,show that if $f \in \mathcal{R}$ vanishes at all of its points of continuity,then $\|f\| = 0$.

引理 0.1. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么 f 的连续点在 $[a,b]$ 中是稠密的，即对于任意区间 $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$，总存在一点 $x_0 \in (\alpha,\beta)$，使 f 在 x_0 连续.

证明. 假设存在一个区间 $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ 中没有连续点，那么该区间中全是不连续点，即不连续点的测度不为零，与 f 在 $[a,b]$ 上可积矛盾，得证. □

5.Let

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta = 0 \\ \log\dfrac{1}{\theta} & \text{for } 0 < \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

and define a sequence of functions in $\mathcal{R}$ by

$$f_n(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f(\theta) & \text{for } \dfrac{1}{n} < \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Prove that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{R}$. However,f does not belong to $\mathcal{R}$.

7.Show that the trigonometric series

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{\log n} \sin nx$$

converges for every x,yet it is not the Fourier series of a Riemann integrable function.

13.Suppose that f is periodic and of class C^k.Show that

$$\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right).$$

This is an improvement over Exercise 10 in Chapter 2.

证明. 在第 2 章练习 10，我们得到了

$$n\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x.$$

在那时，我们对上式右边说不了什么. 但现在，应用 Riemann-Lebesgue 引理，我们能够得到右边当 n 趋于 ∞ 时是趋于 0 的，因此得证. □

14.Prove that the Fourier series of a continuously differentiable funcion f on the circle is absloutely convergent.

证明. 内容... □

附录 A

那些我总也记不住的恒等式

1　三角恒等式

命题 1.1.

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

当 $x=2m\pi$ 时等式右侧应理解为当 x 趋于 $2m\pi$ 时的极限.

更一般地,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k+\alpha)x=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}+\alpha\right)x-\sin\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k+\alpha)x=\frac{\cos\left(\dfrac{1}{2}+\alpha\right)x-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}+\alpha\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

证明.

$$\begin{aligned}&\sin\frac{x}{2}+2\cos x\sin\frac{x}{2}+2\cos 2x\sin\frac{x}{2}+\cdots+2\cos nx\sin\frac{x}{2}\\=&\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}+\cdots+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\\=&\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\end{aligned}$$

□

2　积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)' = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

3 幂级数展开

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, (-1 < x \leqslant 1)$$

4 杂

等比数列求和公式

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$