

代数拓扑

孙天阳

2023 年 2 月 1 日

目录

目录	2
1 概论	3
1.1 哥尼斯堡七桥问题	3
1.2 多面体的 Euler 公式	7
1 单纯同调	11
1 单纯复形和单纯同调群	11
2 Euler-Poincaré 定理与强 Morse 不等式	13
3 例子	14
4 锥的同调群	21
5 相对单纯同调群与 Mayer-Vietoris 序列	23
6 单纯映射	24
7 单纯同伦	25
8 单纯同调的 Eilenberg-Steenrod 公理	26
9 代数范畴的同调论	27
2 奇异同调	28
1 奇异同调群	28
2 相对奇异同调群	29
3 奇异同调的 Eilenberg-Steenrod 公理	30
3.1 同伦公理	30
3.2 维数公理	31
4 收缩	32
5 重心重分	33
6 单纯同调与奇异同调同构	36
7 切除定理	37
8 局部同调	38
9 一般系数的同调群	39
10 Tor 与 Ext	40

目录	2
3 胞腔同调	43
1 胞腔复形	43
2 胞腔分解的例子	44
3 胞腔同调群计算的例子	45
4 球面的映射度	46
5 透镜空间	47
6 万有系数定理	48
7 奇异上同调中的卡积与上积	49
8 乘积空间的奇异同调	50
9 Kunneth 公式	51
4 Hatcher 习题	52
1 Chapter0	52
2 Section2.1	53
A 正合列	54
1 链复形与链映射	54
2 可裂的短正合列	55
3 长正合列引理	56
B 范畴论	58

1 概论

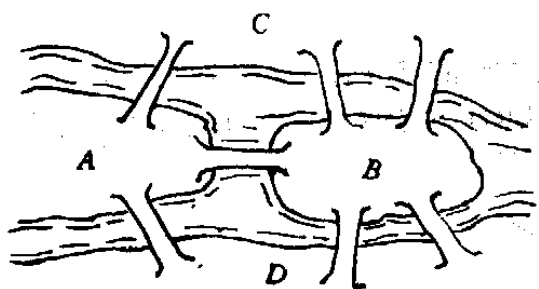
代数拓扑（同调论）广泛分布于数学的各个分支，

- 数论/代数，如：离散群
- 几何/拓扑，如：示性类， K -理论
- 分析/方程，如：Hodge 理论

代数拓扑起点：Euler 的两个结果

1. 哥尼斯堡七桥问题和一笔画问题
2. 多面体的 Euler 公式

1.1 哥尼斯堡七桥问题

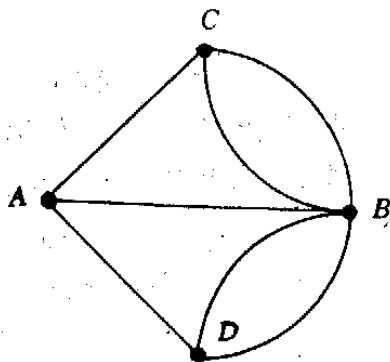


问：有没有一种散步方法，从某处出发，经过所有的桥恰好一次后回到原点？

数学研究步骤：具体问题 \rightarrow 抽象（合适的数学语言表达） \rightarrow 解决（找到合适的数学工具）

\rightarrow 推广（公理化） $\rightarrow \dots$

Euler: 抽象出图的概念. 图 $\begin{cases} \text{顶点} & \text{陆地, 岛} \\ \text{棱} & \text{桥} \end{cases}$



连通图：任何两个顶点之间有一条由若干条棱构成的路径连结

假定每个棱有两个不同的顶点（即没有 self loops）

$$\text{记图 } \Gamma, \begin{cases} \text{顶点集 } V(\Gamma) & v(\Gamma) = |V(\Gamma)| \\ \text{棱集 } E(\Gamma) & e(\Gamma) = |E(\Gamma)| \end{cases}$$

定义 1.1. Γ 的一个 *Euler* 回路是指从某个点出发，沿着 Γ 的棱的一个路径，经过每条棱恰好一次，并且最终回到出发点.

哥尼斯堡七桥问题 \iff 图 Γ 有没有 Euler 回路.

观察:

- 若 Γ 有 Euler 回路，则在任意顶点 $v \in V(\Gamma)$ 处，

$$\text{进入 } v \text{ 的棱数} = \text{离开 } v \text{ 的棱数}.$$

- Euler 回路跑遍所有的棱，特别地，跑遍 v 处的所有棱

定义 1.2. $val(v) = v$ 的所有棱个数.

定理 1.3. 若 Γ 有 *Euler* 回路 \iff 任意 $v \in V(\Gamma)$, $val(v)$ 是偶数.

证明.

\implies

$$\begin{aligned} val(v) &= v \text{ 的所有棱个数} \\ &= \text{进入 } v \text{ 的棱个数} + \text{离开 } v \text{ 的棱个数} \\ &= 2 \times \text{进入 } v \text{ 的棱个数} \end{aligned}$$

\impliedby 见图论书.

□

Euler 一笔画问题

定义 1.4. Γ 的 *Euler* 道路是指沿 Γ 的一个路径，走过所有的棱（此时未必回到出发点）.

- Case 1 起点 = 终点，此时回到 Euler 回路问题
- Case 2 起点 \neq 终点
 - Case2.1 终点为偶顶点：仅有一个奇顶点
 - Case2.2 终点为奇顶点：恰有两个奇顶点

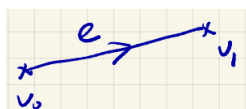
定理 1.5. Γ 有 *Euler* 道路 $\iff \Gamma$ 至多有两个奇顶点.

证明. 见图论书.

□

重新回顾

如下图给棱 e 一个定向



在此定向下，我们定义 $\partial e = v_1 - v_0$.

如果 Γ 有 Euler 回路，按 Euler 回路诱导 $E(\Gamma)$ 中的棱的定向，则有

$$\partial \left(\sum_{e \in E(\Gamma)} e \right) = 0.$$

定义 1.6.

- $C_1(\Gamma) = \left\{ \sum_{e \in E(\Gamma)} a_e e \mid a_e \in \mathbb{R}, \text{ for } e \in E(\Gamma) \right\}$, 即由 $E(\Gamma)$ 张成的 \mathbb{R} -线性空间.
- $C_0(\Gamma) = \left\{ \sum_{v \in V(\Gamma)} b_v v \mid b_v \in \mathbb{R}, \text{ for } v \in V(\Gamma) \right\}$, 即由 $V(\Gamma)$ 张成的 \mathbb{R} -线性空间.
- 记 $\dim C_1(\Gamma) = e(\Gamma), \dim C_0(\Gamma) = v(\Gamma)$.

事实上，若

- (1) Γ 没有 self loop
- (2) Γ 是定向图 (即每条棱都指定了定向)

即可定义

$$\partial: C_1(\Gamma) \longrightarrow C_0(\Gamma).$$

定义 1.7.

- $H_1(\Gamma) = \ker \partial = \{c \in C_1(\Gamma) \mid \partial c = 0\}$
- $H_0(\Gamma) = \text{coker } \partial = C_0(\Gamma) / \text{im } \partial$
- 记 $h_1 := \dim H_1(\Gamma), h_0 := \dim H_0(\Gamma)$

命题 1.8. $h_1(\Gamma)$ 和 $h_0(\Gamma)$ 不依赖于 Γ 的定向.

推论 1.9. 若 $h_1(\Gamma) = 0$, 则 Γ 一定无 Euler 回路.

问题: 如何计算 $h_1(\Gamma)$ 与 $h_0(\Gamma)$?

命题 1.10. 若 Γ 连通, 则 $h_0(\Gamma) = 1$, 并且

$$h_0(\Gamma) - h_1(\Gamma) = v(\Gamma) - e(\Gamma).$$

证明. 定义

$$\begin{aligned} C_1(\Gamma) &\xrightarrow{\partial} C_0(\Gamma) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \\ \sum_{v \in V(\Gamma)} b_v v &\mapsto \sum_{v \in V(\Gamma)} b_v \end{aligned}$$

- φ 线性.
- φ 满射. 任取 $w \in V(\Gamma)$, 有 $\varphi(\lambda w) = \lambda$.
- $\text{im } \partial \subset \ker \varphi$. 只需对 $e \in E(\Gamma)$ 验证, 显然有 $\varphi \partial(e) = 0$.
- $\ker \varphi \subset \text{im } \partial$. 设 $\sum_v b_v v \in \ker \varphi$, 即 $\sum_v b_v = 0$. 任意取定 $w \in V(\Gamma)$, 则有

$$\begin{aligned} b_w &= - \sum_{v \neq w} b_v \\ \sum_v b_v v &= b_w w + \sum_{v \neq w} b_v v = \sum_{v \neq w} b_v (v - w) \end{aligned}$$

因为 Γ 连通, 所以 $v - w = \partial c_v$, 其中 $c_v \in C_1(\Gamma)$. (c_v 不一定简单到是一条边.)

- 结合上述两条有 $\ker \varphi = \text{im } \partial$, 从而

$$H_0(\Gamma) = C_0(\Gamma) / \text{im } \partial = C_0(\Gamma) / \ker \varphi \simeq \text{im } \varphi = \mathbb{R} \implies h_0(\Gamma) = 1.$$

下证命题中的另一等式

$$\begin{aligned} \dim \ker \partial - \dim \text{coker } \partial &= \text{index } \partial \\ &= (\dim C_1(\Gamma) - \dim \text{im } \partial) - (\dim C_0(\Gamma) - \dim \text{im } \partial) \\ &= \dim C_1(\Gamma) - \dim C_0(\Gamma). \end{aligned}$$

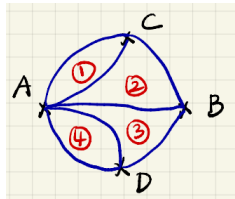
□

注记.

$$\underbrace{\text{index } \partial}_{\text{分析}} = \underbrace{h_1(\Gamma) - h_0(\Gamma)}_{\text{拓扑}} = \underbrace{e(\Gamma) - v(\Gamma)}_{\text{几何}}.$$

注记. $e(\Gamma) = 7, v(\Gamma) = 4$. 则 $h_1(\Gamma) = h_0(\Gamma) + e(\Gamma) - v(\Gamma) = 4$.

直观上, $h_1(\Gamma)$ 给出 Γ 的“洞个数”.



1.2 多面体的 Euler 公式

设 p 是一个凸多面体（此处不给出严格定义）. 记

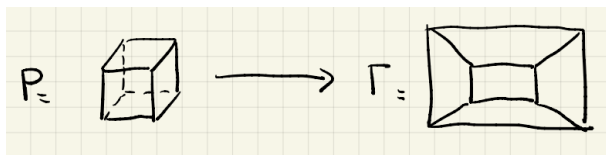
$$\begin{cases} v(p) & \text{顶点数} \\ e(p) & \text{棱数} \\ f(p) & \text{面数} \end{cases}$$

则

$$v(p) - e(p) + f(p) = 2.$$

Cauchy 的证明.

- (1) 任取 P 的一个底面, 将底面拉得足够大, 得到一个平面图 Γ



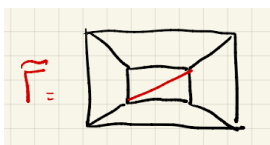
将 p 和 Γ 进行比较,

$$\begin{cases} v(p) = v(\Gamma) \\ e(p) = e(\Gamma) \\ f(p) = \# \{ \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \text{ 的连通分支} \} \end{cases}$$

按习惯, 定义 Γ 的面 = “有界” 的面, 则 $f(p) = f(\Gamma) + 1$. 等价于要证明

$$v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma) = 1.$$

- (2) 在 Γ 的同属于一个面的两个未直接相连的顶点间增加一条连线, 得到 $\tilde{\Gamma}$



将 $\tilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

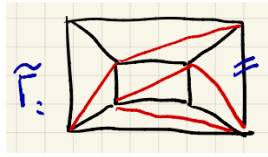
$$\begin{cases} v(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\tilde{\Gamma}) = e(\Gamma) + 1 \\ f(\tilde{\Gamma}) = f(\Gamma) + 1 \end{cases}$$

因此

$$v(\tilde{\Gamma}) - e(\tilde{\Gamma}) + f(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

现设 Γ 的每个面都已经通过连线剖分成三角形, 得到的新图仍记作 Γ .

(3) 从最外边去掉一条边，新图记作 $\tilde{\Gamma}$.



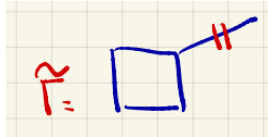
将 $\tilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

$$\begin{cases} v(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\tilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\tilde{\Gamma}) = f(\Gamma) - 1 \end{cases}$$

仍有

$$v(\tilde{\Gamma}) - e(\tilde{\Gamma}) + f(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(4) 在消边的时候还可能遇到如下情况



将 $\tilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

$$\begin{cases} v(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - 1 \\ e(\tilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\tilde{\Gamma}) = f(\Gamma) \end{cases}$$

仍有

$$v(\tilde{\Gamma}) - e(\tilde{\Gamma}) + f(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(5) 有限步之后，只剩一条线段，

$$v - e + f = 2 - 1 + 0 = 1.$$

□

重新叙述

设 \mathbb{R}^2 中的闭凸集 A 由有限个三角形沿边粘贴得到.

记 $\Gamma(A)$ 为对应的平面图, $V(\Gamma), E(\Gamma), F(\Gamma)$ 分别为顶点集、棱集和有界面集.

对每个面逆时针定向, 对每条棱任意定向.

分别记 $C_2(\Gamma), C_1(\Gamma), C_0(\Gamma)$ 为由 $F(\Gamma), E(\Gamma), V(\Gamma)$ 张成的 \mathbb{R} -线性空间.

定义算子

$$C_2(\Gamma) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Gamma) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Gamma),$$

其中 ∂_1 如前. $\partial_2 f = f$ 的棱的 ± 1 系数组合. 当 f 诱导的定向与棱给定的定向一致时取 1, 相反取 -1 . 说白了, $\partial_2 f$ 就是把 f 的棱按 f 诱导的定向加起来.

引理 1.11. $\partial_1 \partial_2 = 0$

证明. 不妨设棱 f 诱导的定向与给定定向一致, 若不然, 也不影响 $\partial_2 f$ 的实际结果.

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_1(e_1 + e_2 + e_3) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_0 - v_2 = 0. \quad \square$$

定义 1.12.

- $H_2(\Gamma) = \ker \partial_2$
- $H_1(\Gamma) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$
- $H_0(\Gamma) = \text{coker } \partial_1 = C_0(\Gamma) / \text{im } \partial_1$

命题 1.13. $H_0(\Gamma) \simeq \mathbb{R}$.

定理 1.14. $\dim H_0(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_2(\Gamma) = \dim C_0(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_2(\Gamma)$.

证明.

$$\begin{aligned} & \dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim \ker \partial_2 - \dim \ker \partial_1 + \dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) + \dim \text{im } \partial_2 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) + \dim \text{im } \partial_2 - \dim \ker \partial_1 + \dim \ker \partial_1 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) - \dim \text{im } \partial_1 + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_0(\Gamma). \end{aligned}$$

□

定理 1.15. $H_2(\Gamma) = \{0\}$.

证明. 设 $\sum_f a_f f \in \ker \partial_2$. 考虑相邻的两个面 f_1, f_2 , 他们中间夹着一条棱 e . 经由 ∂_2 作用能提供 e 的只有 f_1 和 f_2 . 注意 f_1 和 f_2 诱导 e 的定向是相反的, 因此为了保证经由 ∂_2 作用后 e 前系数为零, 必须有 $a_{f_1} = a_{f_2}$. 由连通性知 $a_f \equiv a$. 但注意

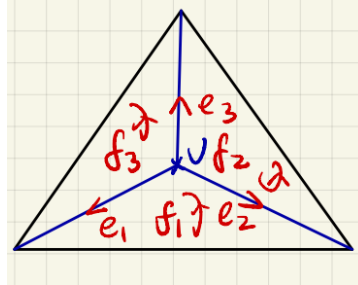
$$\sum_f \partial f = \sum \text{边界棱} \neq 0.$$

因此 $a \sum_f \partial f = 0 \implies a = 0 \implies \ker \partial_2 = \{0\}$.

□

push to boundary 技巧

假设 v 为内点, 记 f_1, \dots, f_k 为以 v 为顶点的所有面, 记 e_1, \dots, e_k 为以 v 为端点的所有面. 对每个面逆时针定向, 取 e_i 定向为 f_i 诱导定向, 如下图所示



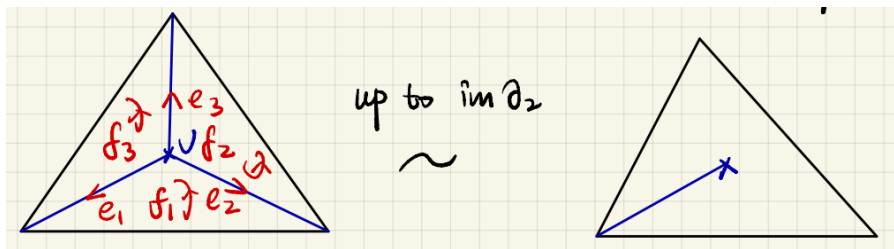
注意到有

$$e_2 = e_3 + \partial f_2 + \text{边界棱}$$

因此, 对于 $\sum b_i e_i$, 其中的 e_2 项总可以被 e_3 项在相差边界棱和 $\text{im } \partial_2$ 中元素的意义下替换. 同理 e_3 可以被 e_1 替换. 因此

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = \tilde{b}_1 e_1 + \partial(\text{sth}) + \text{边界棱}$$

即



特别地, 假设我们还有 $\partial_1(\sum b_i e_i) = 0$, 那么

$$\partial_1(\tilde{b}_1 e_1) + \underbrace{\partial_1 \partial_2(\text{sth})}_{\text{自动为零}} + \underbrace{\partial_1(\text{边界棱})}_{\text{只贡献边界顶点}} = 0 \implies \tilde{b}_1 = 0.$$

即

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = \partial(\text{sth}) + \text{边界棱}.$$

Chapter 1

单纯同调

1 单纯复形和单纯同调群

定义 1.1 (单形). 设 $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^N$. 若 $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ 线性无关, 则称

$$\left\{ x_0 + \sum_{i=1}^n t_i(x_i - x_0) \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

为以 x_0, \dots, x_n 为顶点的 n -单形.

注记. $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ 线性无关 $\iff x_0 - x_i, \dots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \dots, x_n - x_i$ 线性无关.

证明. $\sum_{j=0}^n \lambda_j(x_j - x_0) + \sum_{j=0}^n \lambda_j(x_0 - x_i) = 0$

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j$$

□

注记 (重心坐标).

$$x_0 + \sum_{i=1}^n t_i(x_i - x_0) = \left(1 - \sum_{i=1}^n t_i\right)x_0 + \sum_{i=1}^n t_i x_i$$
$$\sum_{i=0}^n s_i x_i$$

(s_0, \dots, s_n) 称为重心坐标.

定义 1.2. 称由 $\{x_0, \dots, x_n\}$ 的非空子集决定的单形为由 $\{x_0, \dots, x_n\}$ 决定的单形的面.

定向 n -单形与 ∂ 算子

指定了顶点的排列顺序 $[x_0, \dots, x_n]$ 的单形称为定向 n -单形. 认为相差偶置换的两个排列决定相同的定向. n -单形有且只有两种定向.

$$\partial_n[x_0, \dots, x_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

验证良定性

引理 1.3. $\partial_{n-1}\partial_n = 0$

证明.

$$\begin{aligned} & \partial_{n-1}\partial_n[x_0, \dots, x_n] \\ &= \partial_{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{0 \leq j < i} (-1)^j [x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] \end{aligned}$$

□

有限单纯复形

定义 1.4. 设 $K = \{\mathbb{R}^N \text{中的一些单形}\}$, 若 K 满足

- (0) $\#K < \infty$.
- (1) $\sigma \in K \implies \sigma$ 的每个面 $\tau \in K$.
- (2) $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, 若 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$, 则它是 σ_1 及 σ_2 的面.

则称 K 为 \mathbb{R}^N 中的有限单纯复形. 设

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^N,$$

赋予 $|K|$ 子空间拓扑. 称 $|K|$ 为 K 的底空间, 称 K 为 $|K|$ 的一个三角剖分.

单纯同调

设 K 是一个有限单纯复形.

$$\text{定义 1.5. } C_p(K) := \left\{ \sum_{\substack{\sigma \in K \\ \dim \sigma = p}} a_\sigma [\sigma] \mid a_\sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

称 $C_p(K)$ 中的元素为 p 链

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n}$$

$$H_p(K) = \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1}$$

$$b_p(K) = \dim H_p(K)$$

2 Euler-Poincaré 定理与强 Morse 不等式

定理 2.1 (Euler-Poincaré). 设 K 为 n 维有限单纯复形, 则

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \dim C_p(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p(K).$$

证明一. 有如下短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{p+1} \longrightarrow \ker \partial_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0 &\implies b_p(K) = \dim \ker \partial_p - \dim \operatorname{im} \partial_{p+1} \\ 0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_p \longrightarrow C_{p-1} \longrightarrow \operatorname{coker} \partial_p \longrightarrow 0 &\implies \dim \operatorname{im} \partial_p = \dim C_{p-1} - \dim \operatorname{coker} \partial_p \end{aligned}$$

□

证明二. 有如下短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{p+1} \longrightarrow \ker \partial_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0 &\implies b_p(K) = \dim \ker \partial_p - \dim \operatorname{im} \partial_{p+1} \\ 0 \longrightarrow \ker \partial_p \longrightarrow C_p \longrightarrow \operatorname{im} \partial_p \longrightarrow 0 &\implies \dim C_p = \dim \ker \partial_p + \dim \operatorname{im} \partial_p \end{aligned}$$

容易看出定理正确, 因为

- 对于每个 p , $b_p(K)$ 和 $\dim C_p$ 中有相同符号的 $\dim \ker \partial_p$, 而求和中二者前面的符号也相同.
- 考虑 $0 \leq p \leq n-1$.
 - $b_p(K)$ 中, 出现了负的 $\dim \operatorname{im} \partial_{p+1}$
 - $\dim C_{p+1}$ 中, 出现了正的 $\dim \operatorname{im} \partial_{p+1}$
 - 而在求和中, $b_p(K)$ 与 $\dim C_{p+1}$ 的符号刚好不同, 正好抵消.
- 最后剩下一个 $\dim \operatorname{im} \partial_0$ 无人抵消, 但它本身是零.

□

定理 2.2.

证明. $R(t) = (1+t)^{-1}(c(t) - p(t)) = \sum_{s=0}^{\infty} (-t)^s$

□

以后会证明, 三角剖分算出来的欧拉示形数不依赖于三角剖分.

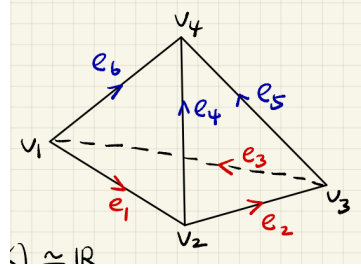
陈: 欧拉示性数

强 Morse 不等式

3 例子

球面

取正四面体 K



这是一个二维单纯复形. 我们来计算它的各阶实系数单纯同调群.

- $H_0(K)$. 由连通性, $H_0(K) \simeq \mathbb{R}$.

- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$. 设

$$\partial(a_i e_i) = 0 \implies (-a_1 + a_3 - a_6)v_1 + (a_1 - a_2 - a_4)v_2 + (a_2 - a_3 - a_5)v_3 + (a_4 + a_5 + a_6)v_4 = 0$$

其中有 6 个未知数, 6 是棱的条数; 有 4 个方程, 4 是顶点的个数. 但其中只有 3 个独立方程.

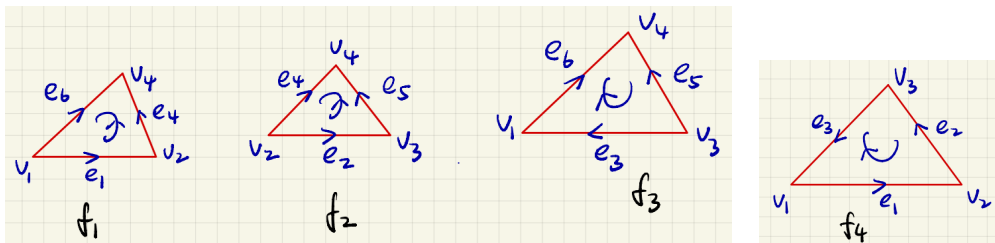
解得

$$\begin{cases} a_4 = a_1 - a_2 \\ a_5 = a_2 - a_3 \\ a_6 = a_3 - a_1 \end{cases} .$$

所以

$$\begin{aligned} & a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 \\ &= a_1(e_1 + e_4 - e_6) + a_2(e_2 - e_4 + e_5) + a_3(e_3 - e_5 + e_6) \\ &= a_1 \partial f_1 + a_2 \partial f_2 + a_3 \partial f_3 \in \text{im } \partial_2 \implies H_1(K) = 0. \end{aligned}$$

其中



注意到面的定向都使得右手大拇指指向外.

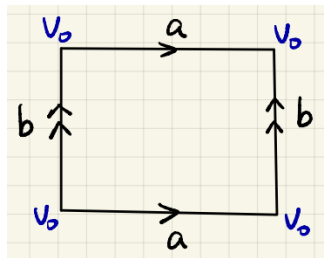
- $H_2(K) = \ker \partial_2$.

对任意一条棱, 它属于两个面, 容易验证这两个面在棱的诱导定向相反. 因此

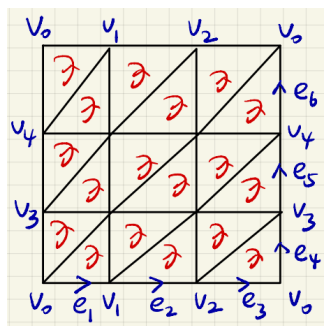
$$\partial(a_i f_i) = 0 \implies a_i \equiv 1 \implies \dim \ker \partial_2 = 1 \implies H_2(K) \simeq \mathbb{R}.$$

环面

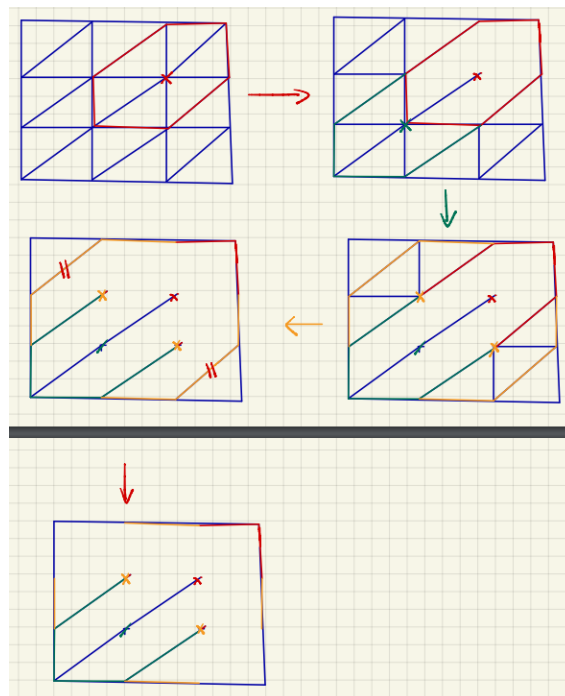
环面的三角剖分不容易直接给出，我们先考虑环面的多边形表示



再在此基础上给出三角剖分



- 由连通性, $H_0(K) \simeq \mathbb{R}$.
- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$. 先利用 push to boundary 技巧对上图进行简化,



任取 $\sum c_e e$, 则可知存在 $f \in C_2(K)$ 和 $a_i \in \mathbb{R}$, 使得

$$\sum c_e e = \partial_2 f + \sum a_i e_i.$$

若 $\sum c_e e \in \ker \partial_1$, 则

$$0 = \partial_1 \sum c_e e = \partial_1 \partial_2 f + \partial_1 \sum a_i e_i \implies \sum a_i \partial_1 e_i = 0.$$

即

$$(a_1 - a_2)v_1 + (a_2 - a_3)v_2 + (a_4 - a_5)v_3 + (a_5 - a_6)v_4 + (-a_1 + a_3 - a_4 + a_6)v_0 = 0.$$

解得

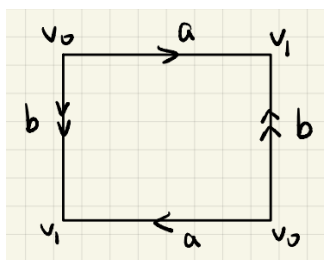
$$a_1 = a_2 = a_3, \quad a_4 = a_5 = a_6.$$

整理一下我们上面得到的结果便是, 对于任意的 $E \in \ker \partial_1$, 存在 $F \in C_2(K)$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得

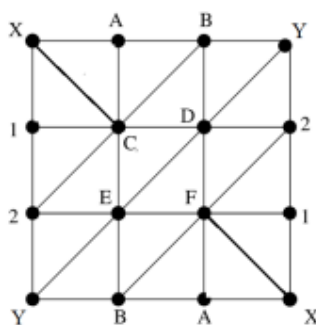
$$E = \partial_2 F + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6).$$

\mathbb{RP}^2

考虑 \mathbb{RP}^2 的多边形表示



及其三角剖分



- 由连通性, $H_0(K) \simeq \mathbb{R}$.
- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$. 由 push to boundary 技巧, 对任意的 $E \in \ker \partial_1$, 存在 $F \in C_2(K)$ 使

$$E = \partial_2 F + \sum a_i e_i.$$

两边用 ∂_1 作用得 $a_i \equiv a$. 所以 $E = \partial_2 F + a \sum e_i$.

注意到 $\partial_2 \sum f = -2 \sum e_i$. 所以 $E = \partial_2 \left(F - \frac{a}{2} \sum f \right)$. 即 $H_1(K) = \{0\}$.

- $H_2(K) = \ker \partial_2$. 设 $\sum a_f f \in \ker \partial_2$, 则 $a_f \equiv a$. 但 $\partial_2 \sum f = -2 \sum e_i \neq 0$. 所以 $a = 0$, 即 $H_2(K) = \{0\}$.

Klein 瓶

总结

- 计算 $H^2(K, \mathbb{R})$
 - 设 $\sum a_f f \in \ker \partial_2$, 由连通性的论证知 $a_f \equiv a$.
 - 转化到 $\partial_2 \sum f$ 的计算. 若为零, 则 $H^2(K, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$; 若不为零, 则 $H^2(K, \mathbb{R}) = \{0\}$.
 - 为零的例子: 球面, 环面.
 - 不为零的例子: $\mathbb{R}P^2$.

• 计算 $H^1(K, \mathbb{R})$

- 由 push to boundary 技巧, 对任意的 $E \in C_1(K)$, 存在 $F \in C_2(K)$ 使得

$$E = \partial_2 F + \sum a_i e_i.$$

- 当 $E \in \ker \partial_1$ 时, 也有 $\sum a_i e_i \in \ker \partial_1$, 从而我们得到一些系数 a_i 的关系式.

- * 球面时, $a_4 = a_1 - a_2, a_5 = a_2 - a_3, a_6 = a_3 - a_1$.

- * 环面时, $a_1 = a_2 = a_3, a_4 = a_5 = a_6$.

- * $\mathbb{R}P^2$ 时, $a_i \equiv a$.

- 剩下多少个自由的系数, 我们就有多少个闭链的生成元.

- * 球面时, $a_i e_i = a_1(e_1 + e_4 - e_6) + a_2(e_2 - e_4 + e_5) + a_3(e_3 - e_5 + e_6)$

- * 环面时, $a_i e_i = \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6)$

- * $\mathbb{R}P^2$ 时, $a_i e_i = a \sum e_i$

- 在这些生成元中, 有些其实也是边缘链

- * 球面时, $\partial f_1 = e_1 + e_4 - e_6, \partial f_2 = e_2 - e_4 + e_5, \partial f_3 = e_3 - e_5 + e_6$

- * $\mathbb{R}P^2$ 时, $-\frac{1}{2} \partial \sum f = \sum e_i$.

在这些情形中, $H^1(K, \mathbb{R}) = \{0\}$.

- 刨除掉边缘链, 剩下的便是同调群中的元素. 我们要做的便是看清同调群的代数结构, 构造从 1 维闭链群到代数结构的同态, 最后证明 \ker 是边缘链.

- 环面时, $e_1 + e_2 + e_3$ 和 $e_4 + e_5 + e_6$ 都不是边缘. 因此猜出 $H^1(K, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

下面我们想定义 $\varphi: \ker \partial_1 \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, E \mapsto (\alpha, \beta)$.

为此我们需验证对于每个 E 只有一组 (α, β) .

只需验证 $E = 0$ 时 $\alpha = \beta = 0$.

设 $\partial F + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) = 0$.

设 $F = \sum a_f f$. 由连通性知 $a_f \equiv f$, 则 $\partial F = a \partial \sum f = 0$.

因此 $\alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) = 0 \implies \alpha = \beta = 0$.

从而 φ 良定, 易见 φ 为满射. 易见 $\ker \varphi = \text{im } \partial_2$.

所以 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \simeq \ker \partial_1 / \ker \varphi = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = H^1(K, \mathbb{R})$.

\mathbb{Z} -系数同调

考虑

4 锥的同调群

9月21日讲义

$K = \mathbb{R}^N$ 中单纯复形

$\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}, (x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, \dots, x_N, 0)$

$v_0 = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{N+1}$

将 v_0 与 K 中的点连线

上述集合构成 \mathbb{R}^{N+1} 中的单纯复形

称为 K 上锥复形, 记作 \hat{K}

命题 4.1. $H_n(\hat{K}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$

注记. 有限生成阿贝尔群, 实系数相当于 *tensor* 上 \mathbb{R} 后把挠部分杀掉.

证明. $C_n(\hat{K}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{T} C_{n+1}(\hat{K}, \mathbb{Z})$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \begin{cases} [v_0, x_0, \dots, x_n] & v_0 \neq x_i \\ 0 \end{cases}$$

验证 $\partial T + T\partial = \text{Id}$

如果 $v_0 \neq x_i \forall i$

$$(\partial T + T\partial)[x_0, \dots, x_n] = \partial[v_0, x_0, \dots, x_n] + T \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

$$= [x_0, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} [v_0, x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

$$+ \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

$$= [x_0, \dots, x_n]$$

如果 $x_0 = v_0$

$$\partial T[x_0, \dots, x_n] = 0$$

$$T\partial[v_0, x_1, \dots, x_n] = [v_0, x_1, \dots, x_n]$$

上述计算需要 $n > 0$

□

$$S_n = \partial\Delta_{n+1}$$

Δ_{n+1} 看成 Δ_n 上的锥

$$C_p(\partial\Delta_{n+1}) = \begin{cases} C_p(\Delta_{n+1}) & 0 \leq p \leq n \\ 0 & p > n \end{cases}$$

$$0 \leq p \leq n-1, H_p(S^n; \mathbb{Z}) = H^p(\Delta^{n+1}, \mathbb{Z}) = H_p(\hat{\Delta}_n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0 \\ 0, & 0 < p \leq n-1 \end{cases}$$

$$H_n(\partial\Delta_{n+1}) = \ker(\partial_n) =$$

手术

$$n = a + b + 1$$

$$M^n$$

挖掉 $D^{a+1} \times \partial D^{b+1} \hookrightarrow M^n$

沿着边界 $\partial D^{a+1} \times \partial D^{b+1} = S^a \times S^b$ 站上 $\partial D^{a+1} \times D^{b+1}$

给定单纯复形 K_1, K_2

子单纯复形 L_1, L_2

设 L_1, L_2 分别同构于 L

$K_1 \cup_L K_2$

$C_n(K_1 \cup_L K_2) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K_1 \cup_L K_2)$

$\{C_k\}_{0 \leq k \leq n}$ 有限维向量空间 (群, 环, 模) ∂

5 相对单纯同调群与 Mayer-Vietoris 序列

9月21日讲义第12页

定义 5.1. 设 K 是单纯复形, $L \subset K$ 是子单纯复形, 称

$$C_n(K, L) := C_n(K)/C_n(L)$$

为单纯复形偶 (K, L) 的相对 n -链群.

引理 5.2. 设 $f: V_1 \rightarrow V_2$ 满足 $f(W_1) \subset W_2$, 则如下图表交换

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ V_1/W_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & V_2/W_2 \end{array} .$$

定义 5.3. 将链复形

$$\cdots \rightarrow C_{n+1}(K, L) \xrightarrow{\partial} C_n(K, L) \xrightarrow{\partial'} C_{n-1}(K, L) \rightarrow \cdots$$

的同调群记作 $H_n(K, L)$, 称为单纯复形偶 (K, L) 的第 n -阶相对同调群.

回到原始问题, 设 L 为一单纯复形, 可以嵌入到两个单纯复形 K_1, K_2 中作为子单纯复形, 研究 $H_*(K_1 \cup_L K_2)$ 的计算问题.

本质上我们使用的是如下命题

命题 5.4. 设 W_1, W_2 是向量空间, $V = W_1 \cap W_2$, 则有短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V \longrightarrow W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1 + W_2 \longrightarrow 0 \\ (w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2 \\ w \longmapsto (w, -w) \end{aligned}$$

命题 5.5.

$$C_n(K_1 \cup_L K_2) = C_n(K_1) + C_n(K_2), \quad C_n(K_1) \cap C_n(K_2) = C_n(L).$$

向量空间粘接

设 W_1, W_2 为两个向量空间, $V = W_1 \cap W_2$, 则 $W_1 + W_2$ 满足如下的万有性质

$$\begin{array}{ccc} V & & W_1 \\ & \searrow & \downarrow \\ W_2 & & W_1 + W_2 \end{array}$$

E

拓扑空间粘接

6 单纯映射

在本节中，我们希望定义单纯映射的概念，进而得到单纯复形范畴；我们应该期待，由单纯复形之间的单纯映射可以诱导链复形之间的链映射，得到单纯复形范畴到链复形范畴的函子。

- 单纯映射的定义
- 确实构成单纯复形范畴（复合还是单纯映射）
- 单纯同构. 范畴论中的老生常谈
- 单纯映射诱导的链映射（定义 + 验证它确实为链映射）
- 函子性
- 单纯复形偶范畴

设 K, L 是单纯复形， $K^{(0)}, L^{(0)}$ 分别是 K, L 的 0-维骨架。

引理 6.1. 称 $f: K \rightarrow L$ 为单纯映射，如果 $f^{(0)}: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ 满足对任意 $\{v_0, \dots, v_p\}$ 为 K 中某个 p -单形的全部顶点，有 $\{f^{(0)}(v_0), \dots, f^{(0)}(v_p)\}$ 为 L 中某单形的顶点. 此时 $f^{(0)}$ 决定了 K 中任一单形到 L 中某个单形的映射

$$f(s_0 v_0 + \dots + s_p v_p) = s_0 f(v_0) + \dots + s_p f(v_p)$$

称 f 为单纯映射。

引理 6.2. 设 $f: K \rightarrow L$ 及 $g: L \rightarrow M$ 为单纯映射，则 $g \circ f: K \rightarrow M$ 也为单纯映射。

定义 6.3. 若 $f: K \rightarrow L$ 及 $g: L \rightarrow K$ 为单纯映射满足

$$g \circ f = \text{Id}_K, \quad f \circ g = \text{Id}_L$$

则称 f 为从 K 到 L 的单纯同构。

定义 6.4. $f_{\#}: C_*(K) \rightarrow C_*(L), [v_0, \dots, v_p] \mapsto [f(v_0), \dots, f(v_p)]$.

引理 6.5. $f_{\#}$ 为链映射，即 $f_{\#} \circ \partial^K = \partial^L \circ f_{\#}$.

7 单纯同伦

9月28日改版讲义第22页

一般来说, 一个给定的同调群间的同态能由不同的单纯映射诱导. 这个事实引导我们开始思考如下问题: 在什么条件下两个单纯映射诱导相同的同调群间的同态?

给定单纯映射 $f, g: K \rightarrow L$, 我们希望找到条件使得对任意 $z \in Z_p(K)$ 有 $f_{\#}(z)$ 与 $g_{\#}$ 是同调的. 换句话说, 我们希望找到在什么条件下存在一个映射 D 对每个 K 中的 p -维闭链 z 指定 L 中的一个 $q+1$ -维链 Dz 使得

$$\partial Dz = g_{\#}(z) - f_{\#}(z).$$

$\Delta_n \times I$ 上的单纯复形结构

同伦不变性

定义 7.1. 设 $f_0, f_1: K \rightarrow L$ 为两个单纯映射, 若有一单纯映射 $F: K \times I \rightarrow L$ 使得

$$F \circ i_0 = f_0, \quad F \circ i_1 = f_1$$

其中 $i_0: K \rightarrow K \times I, i_1: K \rightarrow K \times I$ 是自然的包含映射, 将每个 K 中单形 Δ 分别映到 $\Delta \times \{0\}$ 和 $\Delta \times \{1\}$. 称 f_0 与 f_1 单纯同伦, 记作 $f_0 \stackrel{F}{\sim} f_1$. 类似地, 可以定义单纯同伦等价的概念.

我们已经证明, 存在 $P: C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(K \times I)$ 使得对于 K 中的任一单形 σ 有

$$i_{1\#}(\sigma) - i_{0\#}(\sigma) = (\partial P + P\partial)\sigma.$$

将 $F_{\#}$ 作用到上式两侧, 得到

$$F_{\#} \circ i_{1\#}(\sigma) - F_{\#} \circ i_{0\#}(\sigma) = (F_{\#}\partial^K P + F_{\#}P\partial^K)\sigma = \partial^L F_{\#}P\sigma + F_{\#}P\partial^K\sigma$$

定理 7.2. 设 $f_0, f_1: K \rightarrow L$ 是单纯同伦的单纯映射, 则 $(f_0)_{\#}, (f_1)_{\#}$ 是链同伦的.

8 单纯同调的 Eilenberg-Steenrod 公理

- (a) $\forall n \geq 0, (K, L) \rightarrow H_n(K, L)$
 (b) $f: (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$ 单纯映射
 (c) 任意 (K, L) , 存在 $\partial_*: H_n(K, L) \rightarrow H_{n-1}(L)$

满足公理

(1) $i: (K, L) \rightarrow (K, L)$ 恒同,

(2) $(K_1, L_1) \xrightarrow{f} (K_2, L_2) \xrightarrow{f_2} (K_3, L_3)$

(3) $f: (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$

$$H_n(K_1, L_1) \quad H_{n-1}(L_1)$$

$$H_n(K_2, L_2) \quad H_{n-1}(L_2)$$

(4) $\longrightarrow H_n(L) \xrightarrow{i_*} H_n(K)$

(5) 同伦. $f_i: (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$ 单纯同伦, 那么 $(f_0)_* = (f_1)_*$

(6) 切除. (K, L) 是单纯复形偶, $U \subset |K|, \bar{U} \subset |L|$, 假定 $|K| - U = |K_1|, |L| - U = |L_1|$

证明. □

(7) 维数公理.

$$H_n(\Delta_0) = \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. □

(8) 紧支集公理. 任意 $c \in H_n(K, L)$, 存在有限复形对

9 代数范畴的同调论

10月12日讲义第5页

Chapter 2

奇异同调

1 奇异同调群

10月12日第10页

- 奇异 n -单形的定义
- 奇异 n -链群
- ∂ 算子
- 奇异同调群
- 连续映射诱导奇异链复形之间的链映射，函子性质

2 相对奇异同调群

10月12日讲义第14页

- 链复形的短正合列诱导同调群的长正合列

3 奇异同调的 Eilenberg-Steenrod 公理

3.1 同伦公理

10月12日讲义第15页

定理 3.1. 设 $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ 是同伦的连续映射, 则 $(f_0)_\#, (f_1)_\#$ 是链同伦的.

3.2 维数公理

10月12日讲义第17页

4 收缩

10月12日讲义第19页

设 X 是拓扑空间, $T: \Delta_n \rightarrow X$ 连续映射

$$S_n(X) = \left\{ \sum a_T T \mid \right\}$$

奇异 n -链群

定义 4.1. $A \subset X$ 称为 X 的收缩,

嵌入映射有左逆,

5 重心重分

设 K 是单纯复形

重心重分 $\Delta^1 = [b_0, \dots, b_s]$

其中 b_i 为 σ_i 的重心, 其中 $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s$ 一串面

$$\text{sd}(\sigma) = \text{Sd}(\partial\sigma) * b$$

其中 b_σ 是 σ 的重心

* 的意思是把该点加进去

$$[v_0, v_1] * b := [v_0, v_1, b]$$

如上归纳定义

$$\text{Sd}: C(k) \longrightarrow C(K')$$

希望定义出来的 Sd 是链映射, 即 $\partial \text{Sd} = \text{Sd} \partial$

还希望满足承载条件, 即如果 $L \subset K$ 是子单纯复形

如果 $c \in C(L)$, 那么 $(\text{Sd})(c) \in C(L')$

我们从 $C_0(K)$ 开始考虑, 规定

$$\text{Sd}: C_0(K) \longrightarrow C_0(K') = \text{Id}$$

若 $i < k (k \geq 1)$ 时 $\text{Sd}: C_i(K) \longrightarrow C_i(K')$ 已经定义好, 且是链映射, 且满足承载条件

那么 $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$

$\partial\sigma \in C_{k-1}(\sigma)$

$\text{Sd}(\partial\sigma) \in C_{k-1}((\partial\sigma)')$

$\text{Sd}(\sigma) = (-1)^k \text{Sd} * b_\sigma$

$$\partial \text{Sd}(\sigma) = \text{Sd}(\partial\sigma) + (-1)^k (\partial \text{Sd})(\partial\sigma)$$

$\text{Sd}(\sigma) \in C_k(\sigma')$

希望定义 π 是单纯映射

$\pi: K' \rightarrow K, b \mapsto$

b 必是 K 中某个单形 σ 的重心

$\pi(b)$ 为 σ 的某个顶点

$\pi_\# \text{Sd}: C(K) \rightarrow C(K)$

证明它链同伦于 Id

还有 $\text{Sd} \pi_\#$ 链同伦于 Id

$\pi_\# \text{Sd} - \text{Id} = \partial H + H \partial$

$H: C_k(K) \longrightarrow C_{k+1}(K)$

其中 $H: C_k(K) \longrightarrow C_{k+1}(K)$ 满足承载条件, $L \subset K, c \in C(K), H(c) \in C(L)$

睡觉

定义 $\text{Sd}: L_i(Y) \longrightarrow L_i(Y)$

$$H: L_i(Y) \longrightarrow L_i(Y)$$

走神

10月15日讲义第10页

定理 5.1. 若 $\{X_i \subset X\}$ 满足 $\{\text{Int } X_i\}_i$ 构成 X 的开覆盖, 那么

$$\sum_i S_p(X_i) \subset S_p(X)$$

诱导出同调同构

6 单纯同调与奇异同调同构

10月19日讲义第5页

7 切除定理

10月19日讲义第6页

定理 7.1. 设 $A \subset X$. 如果 $U \subset X$ 满足 $\bar{U} \subset \text{Int } A$, 那么包含映射

$$j: (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$$

诱导奇异同调群的同构.

证明. 记 $\mathcal{A} = \{X - U, A\}$. 由 $\bar{U} \subset \text{Int } A$ 知 \mathcal{A} 的元素的内部覆盖 X . □

定理 7.2. $X_1, X_2 \subset X$, $\{X_1, X_2\}$ 为 Mayer-Vietoris 偶, 当且仅当

$$i: (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$$

诱导相对同调群的同构

$$i_*: H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$$

8 局部同调

10月19日讲义第8页

9 一般系数的同调群

定义 9.1. 设 R 是一个交换幺环, X 是一个拓扑空间, 令 $S_n(X, R)$ 为所有 n 维奇异单形生成的自由 R 模, 称为 X 的 n 维 R 系数奇异链群.

10 Tor 与 Ext

定义 10.1. 设 R 是一个交换幺环, A 是 R -模. A 的一个 R -模分解是一个 R -模长正合序列

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

如果每个 C_n 都是自由 R -模, 则称之为 A 的一个自由 R -模分解.

例 10.2. \mathbb{Z} 作为 \mathbb{Z} -模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

例 10.3. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 作为 \mathbb{Z} -模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

命题 10.4. A 的一个 R -模分解对应一个链复形

$$C: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

它的同调群是

$$H_n(C) = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ A, & n = 0. \end{cases}$$

定理 10.5. 任何 R -模 A 的自由 R -模分解一定存在.

证明. 取 C_0 为集合 A 自由生成的 R -模 $F(A)$, 取 ε 为集合间的映射 $\text{Id}: A \rightarrow A$ 扩充而成的 R -模同态 $\varepsilon: C_0 \rightarrow A$. 取 C_1 为集合 $\ker \varepsilon$ 自由生成的 R -模, 以此类推. □

例 10.6. 设 R 是 PID, 则 R -模 A 有自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker \varepsilon \xrightarrow{\iota} C_0 = F(A) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

这是因为 PID 上的自由模的子模也是自由的.

例 10.7. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

例 10.8. R 上有自然的 $R[x_1, \dots, x_n]$ 模结构

$$f(x_1, \dots, x_n) \cdot r = (a_0 + \sum a_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \cdots x^{i_n}) \cdot r := a_0 r.$$

当 R 是 PID 时, 给出 R 一个的自由 $R[x_1, \dots, x_n]$ -模分解.

定理 10.9 (自由零调模型). 设 $C = \{C_n, \partial_n\}_{n \geq 0}$ 是一个自由的链复形, A 是 C 的增广. 设 C' 是 A' 的一个 R -模分解. 对于任何线性映射 $\varphi_{-1}: A \rightarrow A'$, 存在链映射 $\varphi = \{\varphi_n: C_n \rightarrow C'_n\}_{n \geq 0}$ 使得 $\varepsilon \circ \varphi_0 = \varphi_{-1} \circ \varepsilon$. 且任何两个这样的链映射 φ, φ' 是链同伦的.

证明.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi_{-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_2 & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C'_0 \xrightarrow{\varepsilon} A' \longrightarrow 0 \end{array}$$

取 C_0 的一组基 $\{c_{0i}\}$, 因为 $\varepsilon: C'_0 \rightarrow A'$ 是满射, 所以存在 c'_{0i} 使得 $\varepsilon(c'_{0i}) = \varphi_{-1} \circ \varepsilon(c_{0i})$.

$$\begin{array}{ccc} c_{0i} & \longrightarrow & \varepsilon(c_{0i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ c'_{0i} & \longrightarrow & \varphi_{-1} \circ \varepsilon(c_{0i}) \end{array}$$

因为线性映射由它在自由模的基上的取值决定, 这样我们就定义出了 φ_0 . 以此类推可定义 φ .

下面我们设有两个链映射 φ 和 ψ , 我们来找它们之间的链同伦.

$$\begin{array}{ccc} & C_0 & \\ & \downarrow \varphi & \\ C'_1 & \longrightarrow & C'_0 \longrightarrow A \end{array}$$

因为 $\varepsilon \circ (\varphi - \psi) = \psi_{-1} \circ \varepsilon - \psi_{-1} \circ \varepsilon = 0$, 所以可在 C'_1 中找到 $\varphi - \psi(c_{0i})$ 的一个原像, 将之定义为 $H_0(c_{0i})$. 以此类推定义 H . □

命题 10.10. R -模 A 的任何两个自由分解 C, C' 都是链同伦等价的.

证明.

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \text{Id} \\ C'_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow \psi & & \downarrow \text{Id} \\ C_0 & \longrightarrow & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{Id} \\ C_0 & \longrightarrow & A \end{array}$$

□

设 A, B 是 R -模. 取 A 的一个自由 R -模分解 C , 构造链复形 $C \otimes B$.

命题 10.11. $H_n(C \otimes B)$ 只与 A, B 有关, 而与 A 的自由分解无关.

定义 10.12. 称 $H_n(C \otimes B)$ 为 A 与 B 的第 n 个挠群, 记作 $\text{Tor}_n^R(A, B)$.

例 10.13. 计算 $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

解. 找 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个自由 \mathbb{Z} -模分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则 $C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

所以

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n \geq 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n = 0, 1. \end{cases}$$

□

例 10.14. 计算 $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

解. 找 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -模分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则 $C \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

所以

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 0. \end{cases}$$

□

例 10.15. 计算 $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

解. 找 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -模分解

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则 $C \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

所以

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

Chapter 3

胞腔同调

1 胞腔复形

10月19日讲义第12页

例 1.1.

2 胞腔分解的例子

10 月 22 日讲义第 4 页

3 胞腔同调群计算的例子

10 月 22 日讲义第 8 页

4 球面的映射度

网课讲义合集第 8 页

5 透镜空间

网课讲义合集第 13 页

6 万有系数定理

网课讲义合集第 26 页

7 奇异上同调中的卡积与上积

网课讲义合集第 37 页

8 乘积空间的奇异同调

网课讲义合集第 43 页

9 Kunneth 公式

网课讲义合集第 45 页

Chapter 4

Hatcher 习题

1 Chapter0

2 Section 2.1

11. Show that if A is a retract of X then the map $H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ induced by the inclusion $A \subset X$ is injective.

证明.

□

14. Determine whether there exists a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

More generally, determine which abelian groups A fit into a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^m} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow 0$$

with p prime. What about the case of short exact sequences

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

证明.

□

附录 A

正合列

1 链复形与链映射

- 链复形的定义
- 链映射的定义
- 链映射的例子，包含映射，商映射
- 链复形范畴到分次 Abel 群范畴的函子
- 链同伦
- 链同伦的链映射诱导同调群的同构

2 可裂的短正合列

定义 2.1. 设 $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ 为一短正合列. 如果存在子对象 $D \subset B$, 使得

$$i(A) \oplus D = B$$

则称此序列分裂.

命题 2.2. 给定短正合列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$, 则下列陈述等价

- (1) 短正合列可裂
- (2) 存在同态 $j: B \rightarrow A$ 使得 $j \circ i = \text{Id}_A$
- (3) 存在同态 $p: C \rightarrow B$ 使得 $\pi \circ p = \text{Id}_C$

更进一步地, 在上述条件下, $B \simeq A \oplus C$, $D \simeq C$.

3 长正合列引理

定理 3.1. 设

$$0 \longrightarrow (C^1, \partial^1) \xrightarrow{f} (C^2, \partial^2) \xrightarrow{g} (C^3, \partial^3) \longrightarrow 0$$

为链复形的短正合列, 则有同调群的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C^1) \xrightarrow{f_*} H_{n+1}(C^2) \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(C^3) \xrightarrow{\partial_*} H_n(C^1) \xrightarrow{f_*} H_n(C^2) \longrightarrow \cdots$$

证明.

(1) 定义 ∂_*

$$\begin{array}{ccccc} & & \beta & \xrightarrow{g} & \alpha \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \gamma & \longleftarrow & \partial\beta & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \partial\gamma & \longleftarrow & 0 & & \end{array}$$

- 对于 $[\alpha] \in H_{n+1}(C^3)$, 选取代表元 $\alpha \in C_{n+1}^3$
- 因为 g 是满射, 所以存在 $\beta \in C_{n+1}^2$ 使得 $g_{n+1}\beta = \alpha$
- 因为 $\partial_{n+1}^3\alpha = 0$, 所以 $g_n\partial_{n+1}^2\beta = 0$, 即 $\partial_{n+1}^2\beta \in \ker g_n$
- 因为 $\text{im } f_n = \ker g_n$, 所以存在 $\gamma \in C_n^1$ 使得 $f_n\gamma = \partial_{n+1}^2\beta$. 因为 f_n 是单射, 所以 γ 唯一.
- γ 是闭的, 因为 $f_{n-1}\partial_n^1\gamma = \partial_n^2f_n\gamma = \partial_n^2\partial_{n+1}^2\beta = 0$, 所以 $\partial_n^1\gamma \in \ker f_{n-1}$, 但 f_{n-1} 是单射
- 将 $\partial_*[\alpha]$ 定义为 $[\gamma]$.
- 下验证良定性

$$\begin{array}{ccccc} \delta & \longrightarrow & \beta & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \partial\delta & \longleftarrow & \partial\beta & & \end{array}$$

假设有 β' 使得 $g_{n+1}\beta = g_{n+1}\beta' = \alpha$, 那么 $\beta - \beta' \in \ker g_{n+1} = \text{im } f_{n+1}$

设 $\beta - \beta' = f_{n+1}\delta$, 其中 $\delta \in C_{n+1}^1$. 存在 $\tilde{\gamma}$ 使得 $f_n\tilde{\gamma} = \partial_{n+1}^2f_{n+1}\delta$.

由 $\tilde{\gamma}$ 的唯一性知 $\tilde{\gamma} = \partial_{n+1}^1\delta$. 所以 β 的选取并不影响最终的 $[\gamma]$.

$$\begin{array}{ccccc} \xi & \longrightarrow & \eta & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \beta = \partial\xi & \longrightarrow & \alpha = \partial\eta & & \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

取 $\bar{\alpha}$ 使得 $\alpha - \bar{\alpha} = \partial_{n+1}^3\eta$, 其中 $\eta \in C_{n+2}^3$.

因为 g_{n+2} 是满射, 所以存在 $\xi \in C_{n+2}^2$ 使得 $g_{n+2}\xi = \eta$.

$g_{n+1}\partial_{n+2}^2\xi = \alpha - \bar{\alpha}$, 但 $\partial_{n+1}^2\partial_{n+2}^2\xi = 0$, 所以并不影响最终的 $[\gamma]$.

(2) $H_{n+1}(C^3)$ 处的正合性. 即要证明 $\text{im } g_{*,n+1} = \ker \partial_{*,n+1}$.

- $\text{im } g_{*,n+1} \subset \ker \partial_{*,n+1}$. 取 $[\beta] \in H_{n+1}(C^2)$, 要证 $\partial_*[g(\beta)] = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & \alpha = g(\beta) \\ & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

- $\ker \partial_* \subset \text{im } g_*$. 即要证 β 是闭链.

$$\begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & \alpha \\ & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & \partial\beta = 0 \end{array}$$

(3) $H_n(C^1)$ 处的正合性, 既要证明 $\text{im } \partial_* = \ker f_*$

- $\text{im } \partial_* \subset \ker f_*$. 这是因为 $f_*[\gamma] = [\partial\beta] = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \beta & \xrightarrow{g} & \alpha \\ & & \downarrow \\ \gamma & \longleftarrow & \partial\beta \end{array}$$

- $\ker f_* \subset \text{im } \partial_*$.

$$\begin{array}{ccc} \beta & \xrightarrow{g} & \alpha \\ & & \downarrow \\ \gamma & \longleftarrow & f_*(\gamma) = \partial\beta \end{array}$$

(4) $H_{n+1}(C)$ 处的正合性, 即 $\text{im } f_* = \ker g_*$.

- $\text{im } f_* \subset \ker g_*$ 是显然的.
- $\ker g_* \subset \text{im } f_*$. 设 $g_*[\beta] = 0$, 也就是 $g(\beta)$ 是边缘

$$\begin{array}{ccc} \xi & \longrightarrow & \eta \\ & & \downarrow \\ \beta & \longrightarrow & \alpha := g(\beta) \end{array} + \begin{array}{ccc} \xi & \longrightarrow & \eta \\ & & \downarrow \\ \partial\xi & \longrightarrow & g(\beta) \end{array} \implies \gamma \longrightarrow \partial\xi - \beta \longrightarrow 0$$

□

附录 B

范畴论