

# 代数拓扑

孙天阳

2023 年 2 月 1 日

# 目录

目录	2
1 概论	3
1.1 哥尼斯堡七桥问题	3
1.2 多面体的 Euler 公式	7
<b>1 单纯同调</b>	<b>11</b>
1 单纯复形和单纯同调群	11
2 Euler-Poincaré 定理与强 Morse 不等式	13
3 例子	14
4 锥的同调群	21
5 相对单纯同调群与 Mayer-Vietoris 序列	23
6 单纯映射	24
7 单纯同伦	25
8 单纯同调的 Eilenberg-Steenrod 公理	26
9 代数范畴的同调论	27
<b>2 奇异同调</b>	<b>28</b>
1 奇异同调群	28
2 相对奇异同调群	29
3 奇异同调的 Eilenberg-Steenrod 公理	30
3.1 同伦公理	30
3.2 维数公理	31
4 收缩	32
5 重心重分	33
6 单纯同调与奇异同调同构	36
7 切除定理	37
8 局部同调	38
9 一般系数的同调群	39
10 Tor 与 Ext	40

目录	2
<b>3 胞腔同调</b>	<b>43</b>
1 胞腔复形	43
2 胞腔分解的例子	44
3 胞腔同调群计算的例子	45
4 球面的映射度	46
5 透镜空间	47
6 万有系数定理	48
7 奇异上同调中的卡积与上积	49
8 乘积空间的奇异同调	50
9 Kunneth 公式	51
<b>4 Hatcher 习题</b>	<b>52</b>
1 Chapter0	52
2 Section2.1	53
<b>A 正合列</b>	<b>54</b>
1 链复形与链映射	54
2 可裂的短正合列	55
3 长正合列引理	56
<b>B 范畴论</b>	<b>58</b>

# 1 概论

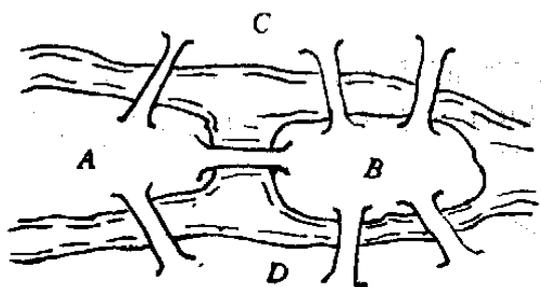
代数拓扑（同调论）广泛分布于数学的各个分支，

- 数论/代数，如：离散群
- 几何/拓扑，如：示性类， $K$ -理论
- 分析/方程，如：Hodge 理论

代数拓扑起点：Euler 的两个结果

1. 哥尼斯堡七桥问题和一笔画问题
2. 多面体的 Euler 公式

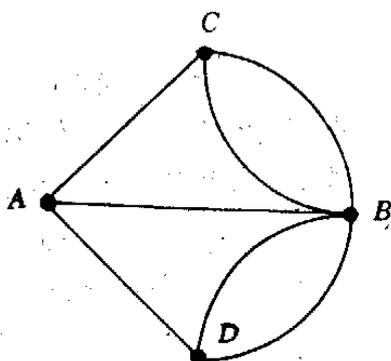
## 1.1 哥尼斯堡七桥问题



问：有没有一种散步方法，从某处出发，经过所有的桥恰好一次后回到原点？

数学研究步骤：具体问题  $\rightarrow$  抽象（合适的数学语言表达）  $\rightarrow$  解决（找到合适的数学工具）  
 $\rightarrow$  推广（公理化）  $\rightarrow$  ...

Euler: 抽象出图的概念. 图  $\begin{cases} \text{顶点} & \text{陆地, 岛} \\ \text{棱} & \text{桥} \end{cases}$



连通图：任何两个顶点之间有一条由若干条棱构成的路径连结

假定每个棱有两个不同的顶点（即没有 self loops）

$$\text{记图 } \Gamma, \begin{cases} \text{顶点集 } V(\Gamma) & v(\Gamma) = |V(\Gamma)| \\ \text{棱集 } E(\Gamma) & e(\Gamma) = |E(\Gamma)| \end{cases}$$

**定义 1.1.**  $\Gamma$  的一个 *Euler* 回路是指从某个点出发，沿着  $\Gamma$  的棱的一个路径，经过每条棱恰好一次，并且最终回到出发点.

哥尼斯堡七桥问题  $\iff$  图  $\Gamma$  有没有 Euler 回路.

观察:

- 若  $\Gamma$  有 Euler 回路，则在任意顶点  $v \in V(\Gamma)$  处，

$$\text{进入 } v \text{ 的棱数} = \text{离开 } v \text{ 的棱数}.$$

- Euler 回路跑遍所有的棱，特别地，跑遍  $v$  处的所有棱

**定义 1.2.**  $val(v) = v$  的所有棱个数.

**定理 1.3.** 若  $\Gamma$  有 *Euler* 回路  $\iff$  任意  $v \in V(\Gamma)$ ,  $val(v)$  是偶数.

证明.

$\implies$

$$\begin{aligned} val(v) &= v \text{ 的所有棱个数} \\ &= \text{进入 } v \text{ 的棱个数} + \text{离开 } v \text{ 的棱个数} \\ &= 2 \times \text{进入 } v \text{ 的棱个数} \end{aligned}$$

$\impliedby$  见图论书.

□

### Euler 一笔画问题

**定义 1.4.**  $\Gamma$  的 *Euler* 道路是指沿  $\Gamma$  的一个路径，走过所有的棱（此时未必回到出发点）.

- Case 1 起点 = 终点，此时回到 Euler 回路问题
- Case 2 起点  $\neq$  终点
  - Case2.1 终点为偶顶点：仅有一个奇顶点
  - Case2.2 终点为奇顶点：恰有两个奇顶点

**定理 1.5.**  $\Gamma$  有 *Euler* 道路  $\iff \Gamma$  至多有两个奇顶点.

证明. 见图论书.

□

## 重新回顾

如下图给棱  $e$  一个定向



在此定向下, 我们定义  $\partial e = v_1 - v_0$ .

如果  $\Gamma$  有 Euler 回路, 按 Euler 回路诱导  $E(\Gamma)$  中的棱的定向, 则有

$$\partial \left( \sum_{e \in E(\Gamma)} e \right) = 0.$$

## 定义 1.6.

- $C_1(\Gamma) = \left\{ \sum_{e \in E(\Gamma)} a_e e \mid a_e \in \mathbb{R}, \text{ for } e \in E(\Gamma) \right\}$ , 即由  $E(\Gamma)$  张成的  $\mathbb{R}$ -线性空间.
- $C_0(\Gamma) = \left\{ \sum_{v \in V(\Gamma)} b_v v \mid b_v \in \mathbb{R}, \text{ for } v \in V(\Gamma) \right\}$ , 即由  $V(\Gamma)$  张成的  $\mathbb{R}$ -线性空间.
- 记  $\dim C_1(\Gamma) = e(\Gamma), \dim C_0(\Gamma) = v(\Gamma)$ .

事实上, 若

- (1)  $\Gamma$  没有 self loop
- (2)  $\Gamma$  是定向图 (即每条棱都指定了定向)

即可定义

$$\partial: C_1(\Gamma) \longrightarrow C_0(\Gamma).$$

## 定义 1.7.

- $H_1(\Gamma) = \ker \partial = \{c \in C_1(\Gamma) \mid \partial c = 0\}$
- $H_0(\Gamma) = \text{coker } \partial = C_0(\Gamma) / \text{im } \partial$
- 记  $h_1 := \dim H_1(\Gamma), h_0 := \dim H_0(\Gamma)$

**命题 1.8.**  $h_1(\Gamma)$  和  $h_0(\Gamma)$  不依赖于  $\Gamma$  的定向.

**推论 1.9.** 若  $h_1(\Gamma) = 0$ , 则  $\Gamma$  一定无 Euler 回路.

问题: 如何计算  $h_1(\Gamma)$  与  $h_0(\Gamma)$ ?

命题 1.10. 若  $\Gamma$  连通, 则  $h_0(\Gamma) = 1$ , 并且

$$h_0(\Gamma) - h_1(\Gamma) = v(\Gamma) - e(\Gamma).$$

证明. 定义

$$\begin{aligned} C_1(\Gamma) &\xrightarrow{\partial} C_0(\Gamma) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \\ \sum_{v \in V(\Gamma)} b_v v &\mapsto \sum_{v \in V(\Gamma)} b_v \end{aligned}$$

- $\varphi$  线性.
- $\varphi$  满射. 任取  $w \in V(\Gamma)$ , 有  $\varphi(\lambda w) = \lambda$ .
- $\text{im } \partial \subset \ker \varphi$ . 只需对  $e \in E(\Gamma)$  验证, 显然有  $\varphi \partial(e) = 0$ .
- $\ker \varphi \subset \text{im } \partial$ . 设  $\sum_v b_v v \in \ker \varphi$ , 即  $\sum_v b_v = 0$ . 任意取定  $w \in V(\Gamma)$ , 则有

$$\begin{aligned} b_w &= - \sum_{v \neq w} b_v \\ \sum_v b_v v &= b_w w + \sum_{v \neq w} b_v v = \sum_{v \neq w} b_v (v - w) \end{aligned}$$

因为  $\Gamma$  连通, 所以  $v - w = \partial c_v$ , 其中  $c_v \in C_1(\Gamma)$ . ( $c_v$  不一定简单到是一条边.)

- 结合上述两条有  $\ker \varphi = \text{im } \partial$ , 从而

$$H_0(\Gamma) = C_0(\Gamma) / \text{im } \partial = C_0(\Gamma) / \ker \varphi \simeq \text{im } \varphi = \mathbb{R} \implies h_0(\Gamma) = 1.$$

下证命题中的另一等式

$$\begin{aligned} \dim \ker \partial - \dim \text{coker } \partial &= \text{index } \partial \\ &= (\dim C_1(\Gamma) - \dim \text{im } \partial) - (\dim C_0(\Gamma) - \dim \text{im } \partial) \\ &= \dim C_1(\Gamma) - \dim C_0(\Gamma). \end{aligned}$$

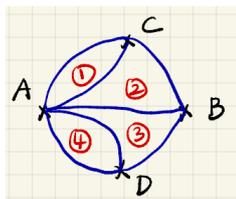
□

注记.

$$\underbrace{\text{index } \partial}_{\text{分析}} = \underbrace{h_1(\Gamma) - h_0(\Gamma)}_{\text{拓扑}} = \underbrace{e(\Gamma) - v(\Gamma)}_{\text{几何}}.$$

注记.  $e(\Gamma) = 7, v(\Gamma) = 4$ . 则  $h_1(\Gamma) = h_0(\Gamma) + e(\Gamma) - v(\Gamma) = 4$ .

直观上,  $h_1(\Gamma)$  给出  $\Gamma$  的“洞个数”.



## 1.2 多面体的 Euler 公式

设  $p$  是一个凸多面体（此处不给出严格定义）. 记

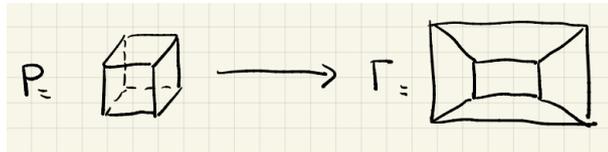
$$\begin{cases} v(p) & \text{顶点数} \\ e(p) & \text{棱数} \\ f(p) & \text{面数} \end{cases}$$

则

$$v(p) - e(p) + f(p) = 2.$$

Cauchy 的证明.

- (1) 任取  $P$  的一个底面，将底面拉得足够大，得到一平面图  $\Gamma$



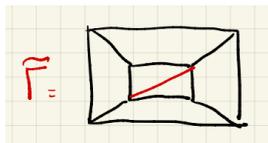
将  $p$  和  $\Gamma$  进行比较,

$$\begin{cases} v(p) = v(\Gamma) \\ e(p) = e(\Gamma) \\ f(p) = \# \{ \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \text{ 的连通分支} \} \end{cases}$$

按习惯，定义  $\Gamma$  的面 = “有界”的面，则  $f(p) = f(\Gamma) + 1$ . 等价于要证明

$$v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma) = 1.$$

- (2) 在  $\Gamma$  的同属于一个面的两个未直接相连的顶点间增加一条连线，得到  $\tilde{\Gamma}$



将  $\tilde{\Gamma}$  和  $\Gamma$  进行比较

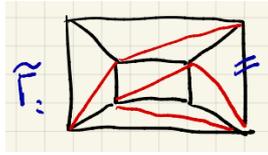
$$\begin{cases} v(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\tilde{\Gamma}) = e(\Gamma) + 1 \\ f(\tilde{\Gamma}) = f(\Gamma) + 1 \end{cases}$$

因此

$$v(\tilde{\Gamma}) - e(\tilde{\Gamma}) + f(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

现设  $\Gamma$  的每个面都已经通过连线剖分成三角形，得到的新图仍记作  $\Gamma$ .

(3) 从最外边去掉一条边，新图记作  $\tilde{\Gamma}$ .



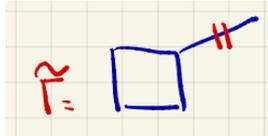
将  $\tilde{\Gamma}$  和  $\Gamma$  进行比较

$$\begin{cases} v(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\tilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\tilde{\Gamma}) = f(\Gamma) - 1 \end{cases}$$

仍有

$$v(\tilde{\Gamma}) - e(\tilde{\Gamma}) + f(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(4) 在消边的时候还可能遇到如下情况



将  $\tilde{\Gamma}$  和  $\Gamma$  进行比较

$$\begin{cases} v(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - 1 \\ e(\tilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\tilde{\Gamma}) = f(\Gamma) \end{cases}$$

仍有

$$v(\tilde{\Gamma}) - e(\tilde{\Gamma}) + f(\tilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(5) 有限步之后，只剩一条线段，

$$v - e + f = 2 - 1 + 0 = 1.$$

□

## 重新叙述

设  $\mathbb{R}^2$  中的闭凸集  $A$  由有限个三角形沿边粘贴得到.

记  $\Gamma(A)$  为对应的平面图,  $V(\Gamma), E(\Gamma), F(\Gamma)$  分别为顶点集、棱集和有界面集.

对每个面逆时针定向, 对每条棱任意定向.

分别记  $C_2(\Gamma), C_1(\Gamma), C_0(\Gamma)$  为由  $F(\Gamma), E(\Gamma), V(\Gamma)$  张成的  $\mathbb{R}$ -线性空间.

定义算子

$$C_2(\Gamma) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Gamma) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Gamma),$$

其中  $\partial_1$  如前.  $\partial_2 f = f$  的棱的  $\pm 1$  系数组合. 当  $f$  诱导的定向与棱给定的定向一致时取 1, 相反取  $-1$ . 说白了,  $\partial_2 f$  就是把  $f$  的棱按  $f$  诱导的定向加起来.

**引理 1.11.**  $\partial_1 \partial_2 = 0$

证明. 不妨设棱  $f$  诱导的定向与给定定向一致, 若不然, 也不影响  $\partial_2 f$  的实际结果.

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_1(e_1 + e_2 + e_3) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_0 - v_2 = 0. \quad \square$$

**定义 1.12.**

- $H_2(\Gamma) = \ker \partial_2$
- $H_1(\Gamma) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$
- $H_0(\Gamma) = \text{coker } \partial_1 = C_0(\Gamma) / \text{im } \partial_1$

**命题 1.13.**  $H_0(\Gamma) \simeq \mathbb{R}$ .

**定理 1.14.**  $\dim H_0(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_2(\Gamma) = \dim C_0(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_2(\Gamma)$ .

证明.

$$\begin{aligned} & \dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim \ker \partial_2 - \dim \ker \partial_2 + \dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) + \dim \text{im } \partial_2 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) + \dim \text{im } \partial_2 - \dim \ker \partial_1 + \dim \ker \partial_1 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) - \dim \text{im } \partial_1 + \dim C_0(\Gamma) \\ &= \dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_0(\Gamma). \end{aligned}$$

□

**定理 1.15.**  $H_2(\Gamma) = \{0\}$ .

证明. 设  $\sum_f a_f f \in \ker \partial_2$ . 考虑相邻的两个面  $f_1, f_2$ , 他们中间夹着一条棱  $e$ . 经由  $\partial_2$  作用能提供  $e$  的只有  $f_1$  和  $f_2$ . 注意  $f_1$  和  $f_2$  诱导  $e$  的定向是相反的, 因此为了保证经由  $\partial_2$  作用后  $e$  前系数为零, 必须有  $a_{f_1} = a_{f_2}$ . 由连通性知  $a_f \equiv a$ . 但注意

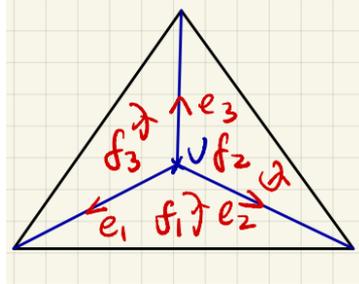
$$\sum_f \partial f = \sum \text{边界棱} \neq 0.$$

因此  $a \sum_f \partial f = 0 \implies a = 0 \implies \ker \partial_2 = \{0\}$ .

□

push to boundary 技巧

假设  $v$  为内点, 记  $f_1, \dots, f_k$  为以  $v$  为顶点的所有面, 记  $e_1, \dots, e_k$  为以  $v$  为端点的所有面. 对每个面逆时针定向, 取  $e_i$  定向为  $f_i$  诱导定向, 如下图所示



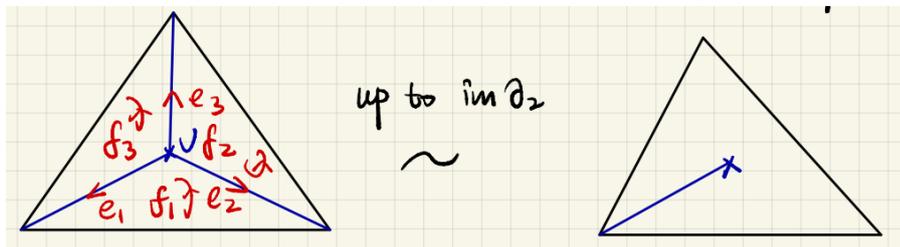
注意到有

$$e_2 = e_3 + \partial f_2 + \text{边界棱}$$

因此, 对于  $\sum b_i e_i$ , 其中的  $e_2$  项总可以被  $e_3$  项在相差边界棱和  $\text{im } \partial_2$  中元素的意义下替换. 同理  $e_3$  可以被  $e_1$  替换. 因此

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = \tilde{b}_1 e_1 + \partial(\text{sth}) + \text{边界棱}$$

即



特别地, 假设我们还有  $\partial_1(\sum b_i e_i) = 0$ , 那么

$$\partial_1(\tilde{b}_1 e_1) + \underbrace{\partial_1 \partial_2(\text{sth})}_{\text{自动为零}} + \underbrace{\partial_1(\text{边界棱})}_{\text{只贡献边界顶点}} = 0 \implies \tilde{b}_1 = 0.$$

即

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = \partial(\text{sth}) + \text{边界棱}.$$

# Chapter 1

## 单纯同调

### 1 单纯复形和单纯同调群

定义 1.1 (单形). 设  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^N$ . 若  $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$  线性无关, 则称

$$\left\{ x_0 + \sum_{i=1}^n t_i(x_i - x_0) \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

为以  $x_0, \dots, x_n$  为顶点的  $n$ -单形.

注记.  $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$  线性无关  $\iff x_0 - x_i, \dots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \dots, x_n - x_i$  线性无关.

证明.  $\sum_{j=0}^n \lambda_j(x_j - x_0) + \sum_{j=0}^n \lambda_j(x_0 - x_i) = 0$

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j$$

□

注记 (重心坐标).

$$x_0 + \sum_{i=1}^n t_i(x_i - x_0) = \left(1 - \sum_{i=1}^n t_i\right)x_0 + \sum_{i=1}^n t_i x_i$$
$$\sum_{i=0}^n s_i x_i$$

$(s_0, \dots, s_n)$  称为重心坐标.

定义 1.2. 称由  $\{x_0, \dots, x_n\}$  的非空子集决定的单形为由  $\{x_0, \dots, x_n\}$  决定的单形的面.

定向  $n$ -单形与  $\partial$  算子

指定了顶点的排列顺序  $[x_0, \dots, x_n]$  的单形称为定向  $n$ -单形. 认为相差偶置换的两个排列决定相同的定向.  $n$ -单形有且只有两种定向.

$$\partial_n[x_0, \dots, x_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

验证良定性

引理 1.3.  $\partial_{n-1}\partial_n = 0$

证明.

$$\begin{aligned} & \partial_{n-1}\partial_n[x_0, \dots, x_n] \\ &= \partial_{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{0 \leq j < i} (-1)^j [x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] \end{aligned}$$

□

### 有限单纯复形

定义 1.4. 设  $K = \{\mathbb{R}^N \text{中的一些单形}\}$ , 若  $K$  满足

- (0)  $\#K < \infty$ .
- (1)  $\sigma \in K \implies \sigma$  的每个面  $\tau \in K$ .
- (2)  $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ , 若  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ , 则它是  $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  的面.

则称  $K$  为  $\mathbb{R}^N$  中的有限单纯复形. 设

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^N,$$

赋予  $|K|$  子空间拓扑. 称  $|K|$  为  $K$  的底空间, 称  $K$  为  $|K|$  的一个三角剖分.

### 单纯同调

设  $K$  是一个有限单纯复形.

$$\text{定义 1.5. } C_p(K) := \left\{ \sum_{\substack{\sigma \in K \\ \dim \sigma = p}} a_\sigma [\sigma] \mid a_\sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

称  $C_p(K)$  中的元素为  $p$  链

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n}$$

$$H_p(K) = \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1}$$

$$b_p(K) = \dim H_p(K)$$

## 2 Euler-Poincaré 定理与强 Morse 不等式

定理 2.1 (Euler-Poincaré). 设  $K$  为  $n$  维有限单纯复形, 则

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \dim C_p(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p(K).$$

证明一. 有如下短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{p+1} \longrightarrow \ker \partial_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0 &\implies b_p(K) = \dim \ker \partial_p - \dim \operatorname{im} \partial_{p+1} \\ 0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_p \longrightarrow C_{p-1} \longrightarrow \operatorname{coker} \partial_p \longrightarrow 0 &\implies \dim \operatorname{im} \partial_p = \dim C_{p-1} - \dim \operatorname{coker} \partial_p \end{aligned}$$

□

证明二. 有如下短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{p+1} \longrightarrow \ker \partial_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0 &\implies b_p(K) = \dim \ker \partial_p - \dim \operatorname{im} \partial_{p+1} \\ 0 \longrightarrow \ker \partial_p \longrightarrow C_p \longrightarrow \operatorname{im} \partial_p \longrightarrow 0 &\implies \dim C_p = \dim \ker \partial_p + \dim \operatorname{im} \partial_p \end{aligned}$$

容易看出定理正确, 因为

- 对于每个  $p$ ,  $b_p(K)$  和  $\dim C_p$  中有相同符号的  $\dim \ker \partial_p$ , 而求和中二者前面的符号也相同.
- 考虑  $0 \leq p \leq n-1$ .
  - $b_p(K)$  中, 出现了负的  $\dim \operatorname{im} \partial_{p+1}$
  - $\dim C_{p+1}$  中, 出现了正的  $\dim \operatorname{im} \partial_{p+1}$
  - 而在求和中,  $b_p(K)$  与  $\dim C_{p+1}$  的符号刚好不同, 正好抵消.
- 最后剩下一个  $\dim \operatorname{im} \partial_0$  无人抵消, 但它本身是零.

□

定理 2.2.

证明.  $R(t) = (1+t)^{-1}(c(t) - p(t)) = \sum_{s=0}^{\infty} (-t)^s$

□

以后会证明, 三角剖分算出来的欧拉示形数不依赖于三角剖分.

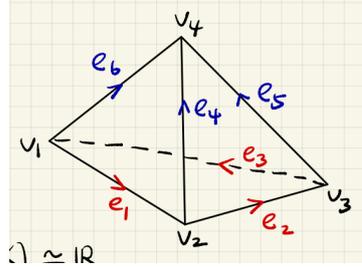
陈: 欧拉示性数

强 Morse 不等式

### 3 例子

球面

取正四面体  $K$



这是一个二维单纯复形. 我们来计算它的各阶实系数单纯同调群.

•  $H_0(K)$ . 由连通性,  $H_0(K) \simeq \mathbb{R}$ .

•  $H_1(K) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ . 设

$$\partial(a_i e_i) = 0 \implies (-a_1 + a_3 - a_6)v_1 + (a_1 - a_2 - a_4)v_2 + (a_2 - a_3 - a_5)v_3 + (a_4 + a_5 + a_6)v_4 = 0$$

其中有 6 个未知数, 6 是棱的条数; 有 4 个方程, 4 是顶点的个数. 但其中只有 3 个独立方程.

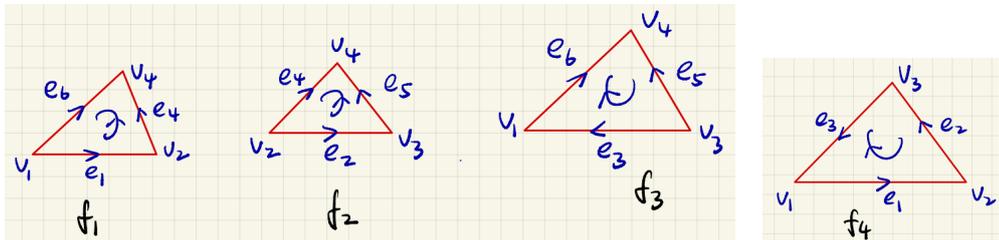
解得

$$\begin{cases} a_4 = a_1 - a_2 \\ a_5 = a_2 - a_3 \\ a_6 = a_3 - a_1 \end{cases} .$$

所以

$$\begin{aligned} & a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 \\ &= a_1(e_1 + e_4 - e_6) + a_2(e_2 - e_4 + e_5) + a_3(e_3 - e_5 + e_6) \\ &= a_1 \partial f_1 + a_2 \partial f_2 + a_3 \partial f_3 \in \text{im } \partial_2 \implies H_1(K) = 0. \end{aligned}$$

其中



注意到面的定向都使得右手大拇指指向外.

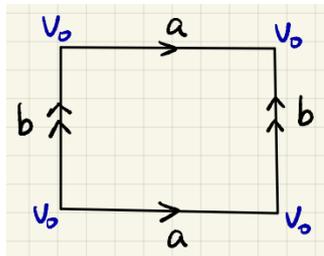
•  $H_2(K) = \ker \partial_2$ .

对任意一条棱, 它属于两个面, 容易验证这两个面在棱的诱导定向相反. 因此

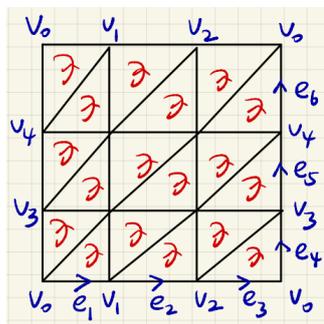
$$\partial(a_i f_i) = 0 \implies a_i \equiv 1 \implies \dim \ker \partial_2 = 1 \implies H_2(K) \simeq \mathbb{R}.$$

环面

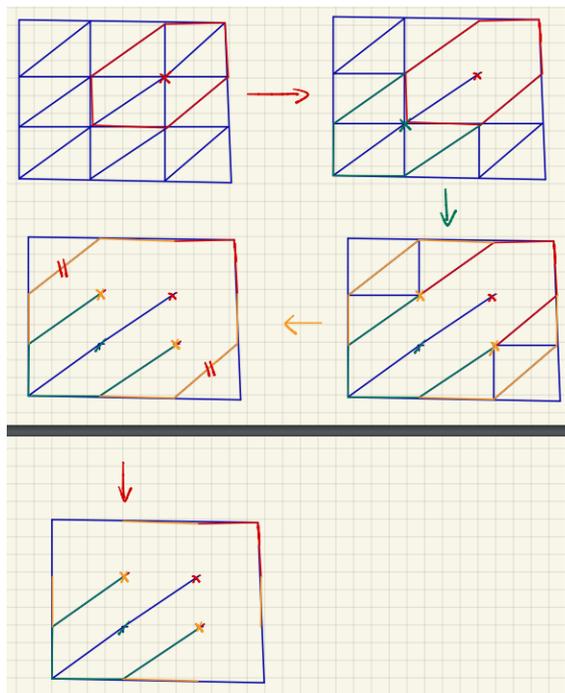
环面的三角剖分不容易直接给出，我们先考虑环面的多边形表示



再在此基础上给出三角剖分



- 由连通性,  $H_0(K) \simeq \mathbb{R}$ .
- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ . 先利用 push to boundary 技巧对上图进行简化,



任取  $\sum c_e e$ , 则可知存在  $f \in C_2(K)$  和  $a_i \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\sum c_e e = \partial_2 f + \sum a_i e_i.$$

若  $\sum c_e e \in \ker \partial_1$ , 则

$$0 = \partial_1 \sum c_e e = \partial_1 \partial_2 f + \partial_1 \sum a_i e_i \implies \sum a_i \partial_1 e_i = 0.$$

即

$$(a_1 - a_2)v_1 + (a_2 - a_3)v_2 + (a_4 - a_5)v_3 + (a_5 - a_6)v_4 + (-a_1 + a_3 - a_4 + a_6)v_0 = 0.$$

解得

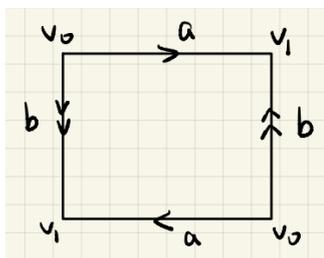
$$a_1 = a_2 = a_3, \quad a_4 = a_5 = a_6.$$

整理一下我们上面得到的结果便是, 对于任意的  $E \in \ker \partial_1$ , 存在  $F \in C_2(K)$  及  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 使得

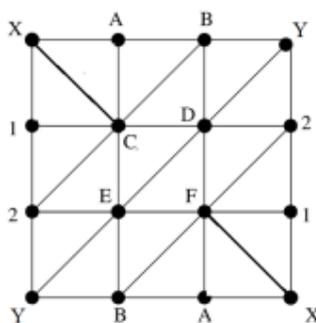
$$E = \partial_2 F + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6).$$

$\mathbb{RP}^2$

考虑  $\mathbb{RP}^2$  的多边形表示



及其三角剖分



- 由连通性,  $H_0(K) \simeq \mathbb{R}$ .
- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ . 由 push to boundary 技巧, 对任意的  $E \in \ker \partial_1$ , 存在  $F \in C_2(K)$  使

$$E = \partial_2 F + \sum a_i e_i.$$

两边用  $\partial_1$  作用得  $a_i \equiv a$ . 所以  $E = \partial_2 F + a \sum e_i$ .

注意到  $\partial_2 \sum f = -2 \sum e_i$ . 所以  $E = \partial_2 \left( F - \frac{a}{2} \sum f \right)$ . 即  $H_1(K) = \{0\}$ .

- $H_2(K) = \ker \partial_2$ . 设  $\sum a_f f \in \ker \partial_2$ , 则  $a_f \equiv a$ . 但  $\partial_2 \sum f = -2 \sum e_i \neq 0$ . 所以  $a = 0$ , 即  $H_2(K) = \{0\}$ .

**Klein 瓶**

## 总结

- 计算  $H^2(K, \mathbb{R})$ 
  - 设  $\sum a_f f \in \ker \partial_2$ , 由连通性的论证知  $a_f \equiv a$ .
  - 转化到  $\partial_2 \sum f$  的计算. 若为零, 则  $H^2(K, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ ; 若不为零, 则  $H^2(K, \mathbb{R}) = \{0\}$ .
  - 为零的例子: 球面, 环面.
  - 不为零的例子:  $\mathbb{R}P^2$ .

• 计算  $H^1(K, \mathbb{R})$ 

- 由 push to boundary 技巧, 对任意的  $E \in C_1(K)$ , 存在  $F \in C_2(K)$  使得

$$E = \partial_2 F + \sum a_i e_i.$$

- 当  $E \in \ker \partial_1$  时, 也有  $\sum a_i e_i \in \ker \partial_1$ , 从而我们得到一些系数  $a_i$  的关系式.

- \* 球面时,  $a_4 = a_1 - a_2, a_5 = a_2 - a_3, a_6 = a_3 - a_1$ .

- \* 环面时,  $a_1 = a_2 = a_3, a_4 = a_5 = a_6$ .

- \*  $\mathbb{R}P^2$  时,  $a_i \equiv a$ .

- 剩下多少个自由的系数, 我们就有多少个闭链的生成元.

- \* 球面时,  $a_i e_i = a_1(e_1 + e_4 - e_6) + a_2(e_2 - e_4 + e_5) + a_3(e_3 - e_5 + e_6)$

- \* 环面时,  $a_i e_i = \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6)$

- \*  $\mathbb{R}P^2$  时,  $a_i e_i = a \sum e_i$

- 在这些生成元中, 有些其实也是边缘链

- \* 球面时,  $\partial f_1 = e_1 + e_4 - e_6, \partial f_2 = e_2 - e_4 + e_5, \partial f_3 = e_3 - e_5 + e_6$

- \*  $\mathbb{R}P^2$  时,  $-\frac{1}{2} \partial \sum f = \sum e_i$ .

在这些情形中,  $H^1(K, \mathbb{R}) = \{0\}$ .

- 刨除掉边缘链, 剩下的便是同调群中的元素. 我们要做的便是看清同调群的代数结构, 构造从 1 维闭链群到代数结构的同态, 最后证明  $\ker$  是边缘链.

- 环面时,  $e_1 + e_2 + e_3$  和  $e_4 + e_5 + e_6$  都不是边缘. 因此猜出  $H^1(K, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

下面我们想定义  $\varphi: \ker \partial_1 \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, E \mapsto (\alpha, \beta)$ .

为此我们需验证对于每个  $E$  只有一组  $(\alpha, \beta)$ .

只需验证  $E = 0$  时  $\alpha = \beta = 0$ .

设  $\partial F + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) = 0$ .

设  $F = \sum a_f f$ . 由连通性知  $a_f \equiv f$ , 则  $\partial F = a \partial \sum f = 0$ .

因此  $\alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) = 0 \implies \alpha = \beta = 0$ .

从而  $\varphi$  良定, 易见  $\varphi$  为满射. 易见  $\ker \varphi = \text{im } \partial_2$ .

所以  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \simeq \ker \partial_1 / \ker \varphi = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = H^1(K, \mathbb{R})$ .

$\mathbb{Z}$ -系数同调

考虑

## 4 锥的同调群

9月21日讲义

$K = \mathbb{R}^N$  中单纯复形

$\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}, (x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1, \dots, x_N, 0)$

$v_0 = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{N+1}$

将  $v_0$  与  $K$  中的点连线

上述集合构成  $\mathbb{R}^{N+1}$  中的单纯复形

称为  $K$  上锥复形, 记作  $\hat{K}$

**命题 4.1.**  $H_n(\hat{K}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$

**注记.** 有限生成阿贝尔群, 实系数相当于 *tensor* 上  $\mathbb{R}$  后把挠部分杀掉.

**证明.**  $C_n(\hat{K}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{T} C_{n+1}(\hat{K}, \mathbb{Z})$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \begin{cases} [v_0, x_0, \dots, x_n] & v_0 \neq x_i \\ 0 \end{cases}$$

验证  $\partial T + T\partial = \text{Id}$

如果  $v_0 \neq x_i \forall i$

$$(\partial T + T\partial)[x_0, \dots, x_n] = \partial[v_0, x_0, \dots, x_n] + T \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

$$= [x_0, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} [v_0, x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

$$+ \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$$

$$= [x_0, \dots, x_n]$$

如果  $x_0 = v_0$

$$\partial T[x_0, \dots, x_n] = 0$$

$$T\partial[v_0, x_1, \dots, x_n] = [v_0, x_1, \dots, x_n]$$

上述计算需要  $n > 0$

□

$$S_n = \partial\Delta_{n+1}$$

$\Delta_{n+1}$  看成  $\Delta_n$  上的锥

$$C_p(\partial\Delta_{n+1}) = \begin{cases} C_p(\Delta_{n+1}) & 0 \leq p \leq n \\ 0 & p > n \end{cases}$$

$$0 \leq p \leq n-1, H_p(S^n; \mathbb{Z}) = H^p(\Delta^{n+1}, \mathbb{Z}) = H_p(\hat{\Delta}_n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0 \\ 0, & 0 < p \leq n-1 \end{cases}$$

$$H_n(\partial\Delta_{n+1}) = \ker(\partial_n) =$$

**手术**

$$n = a + b + 1$$

$$M^n$$

挖掉  $D^{a+1} \times \partial D^{b+1} \hookrightarrow M^n$

沿着边界  $\partial D^{a+1} \times \partial D^{b+1} = S^a \times S^b$  站上  $\partial D^{a+1} \times D^{b+1}$

给定单纯复形  $K_1, K_2$

子单纯复形  $L_1, L_2$

设  $L_1, L_2$  分别同构于  $L$

$K_1 \cup_L K_2$

$C_n(K_1 \cup_L K_2) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K_1 \cup_L K_2)$

$\{C_k\}_{0 \leq k \leq n}$  有限维向量空间 (群, 环, 模)  $\partial$

## 5 相对单纯同调群与 Mayer-Vietoris 序列

9月21日讲义第12页

**定义 5.1.** 设  $K$  是单纯复形,  $L \subset K$  是子单纯复形, 称

$$C_n(K, L) := C_n(K)/C_n(L)$$

为单纯复形偶  $(K, L)$  的相对  $n$ -链群.

**引理 5.2.** 设  $f: V_1 \rightarrow V_2$  满足  $f(W_1) \subset W_2$ , 则如下图表交换

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ V_1/W_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & V_2/W_2 \end{array} .$$

**定义 5.3.** 将链复形

$$\cdots \rightarrow C_{n+1}(K, L) \xrightarrow{\partial} C_n(K, L) \xrightarrow{\partial'} C_{n-1}(K, L) \rightarrow \cdots$$

的同调群记作  $H_n(K, L)$ , 称为单纯复形偶  $(K, L)$  的第  $n$ -阶相对同调群.

回到原始问题, 设  $L$  为一单纯复形, 可以嵌入到两个单纯复形  $K_1, K_2$  中作为子单纯复形, 研究  $H_*(K_1 \cup_L K_2)$  的计算问题.

本质上我们使用的是如下命题

**命题 5.4.** 设  $W_1, W_2$  是向量空间,  $V = W_1 \cap W_2$ , 则有短正合列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow V \rightarrow W_1 \oplus W_2 \rightarrow W_1 + W_2 \rightarrow 0 \\ (w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2 \\ w \mapsto (w, -w) \end{aligned}$$

**命题 5.5.**

$$C_n(K_1 \cup_L K_2) = C_n(K_1) + C_n(K_2), \quad C_n(K_1) \cap C_n(K_2) = C_n(L).$$

**向量空间粘接**

设  $W_1, W_2$  为两个向量空间,  $V = W_1 \cap W_2$ , 则  $W_1 + W_2$  满足如下的万有性质

$$\begin{array}{ccc} V & & W_1 \\ & \searrow & \downarrow \\ W_2 & & W_1 + W_2 \end{array}$$

$E$

**拓扑空间粘接**

## 6 单纯映射

在本节中，我们希望定义单纯映射的概念，进而得到单纯复形范畴；我们应该期待，由单纯复形之间的单纯映射可以诱导链复形之间的链映射，得到单纯复形范畴到链复形范畴的函子。

- 单纯映射的定义
- 确实构成单纯复形范畴（复合还是单纯映射）
- 单纯同构. 范畴论中的老生常谈
- 单纯映射诱导的链映射（定义 + 验证它确实为链映射）
- 函子性
- 单纯复形偶范畴

设  $K, L$  是单纯复形， $K^{(0)}, L^{(0)}$  分别是  $K, L$  的 0-维骨架。

**引理 6.1.** 称  $f: K \rightarrow L$  为单纯映射，如果  $f^{(0)}: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  满足对任意  $\{v_0, \dots, v_p\}$  为  $K$  中某个  $p$ -单形的全部顶点，有  $\{f^{(0)}(v_0), \dots, f^{(0)}(v_p)\}$  为  $L$  中某单形的顶点. 此时  $f^{(0)}$  决定了  $K$  中任一单形到  $L$  中某个单形的映射

$$f(s_0 v_0 + \dots + s_p v_p) = s_0 f(v_0) + \dots + s_p f(v_p)$$

称  $f$  为单纯映射。

**引理 6.2.** 设  $f: K \rightarrow L$  及  $g: L \rightarrow M$  为单纯映射，则  $g \circ f: K \rightarrow M$  也为单纯映射。

**定义 6.3.** 若  $f: K \rightarrow L$  及  $g: L \rightarrow K$  为单纯映射满足

$$g \circ f = \text{Id}_K, \quad f \circ g = \text{Id}_L$$

则称  $f$  为从  $K$  到  $L$  的单纯同构。

**定义 6.4.**  $f_{\#}: C_*(K) \rightarrow C_*(L), [v_0, \dots, v_p] \mapsto [f(v_0), \dots, f(v_p)]$ .

**引理 6.5.**  $f_{\#}$  为链映射，即  $f_{\#} \circ \partial^K = \partial^L \circ f_{\#}$ .

## 7 单纯同伦

9月28日改版讲义第22页

一般来说, 一个给定的同调群间的同态能由不同的单纯映射诱导. 这个事实引导我们开始思考如下问题: 在什么条件下两个单纯映射诱导相同的同调群间的同态?

给定单纯映射  $f, g: K \rightarrow L$ , 我们希望找到条件使得对任意  $z \in Z_p(K)$  有  $f_{\#}(z)$  与  $g_{\#}$  是同调的. 换句话说, 我们希望找到在什么条件下存在一个映射  $D$  对每个  $K$  中的  $p$ -维闭链  $z$  指定  $L$  中的一个  $q+1$ -维链  $Dz$  使得

$$\partial Dz = g_{\#}(z) - f_{\#}(z).$$

$\Delta_n \times I$  上的单纯复形结构

同伦不变性

**定义 7.1.** 设  $f_0, f_1: K \rightarrow L$  为两个单纯映射, 若有一单纯映射  $F: K \times I \rightarrow L$  使得

$$F \circ i_0 = f_0, \quad F \circ i_1 = f_1$$

其中  $i_0: K \rightarrow K \times I, i_1: K \rightarrow K \times I$  是自然的包含映射, 将每个  $K$  中单形  $\Delta$  分别映到  $\Delta \times \{0\}$  和  $\Delta \times \{1\}$ . 称  $f_0$  与  $f_1$  单纯同伦, 记作  $f_0 \stackrel{F}{\sim} f_1$ . 类似地, 可以定义单纯同伦等价的概念.

我们已经证明, 存在  $P: C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(K \times I)$  使得对于  $K$  中的任一单形  $\sigma$  有

$$i_{1\#}(\sigma) - i_{0\#}(\sigma) = (\partial P + P\partial)\sigma.$$

将  $F_{\#}$  作用到上式两侧, 得到

$$F_{\#} \circ i_{1\#}(\sigma) - F_{\#} \circ i_{0\#}(\sigma) = (F_{\#}\partial^K P + F_{\#}P\partial^K)\sigma = \partial^L F_{\#}P\sigma + F_{\#}P\partial^K\sigma$$

**定理 7.2.** 设  $f_0, f_1: K \rightarrow L$  是单纯同伦的单纯映射, 则  $(f_0)_{\#}, (f_1)_{\#}$  是链同伦的.

## 8 单纯同调的 Eilenberg-Steenrod 公理

- (a)  $\forall n \geq 0, (K, L) \rightarrow H_n(K, L)$   
 (b)  $f: (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$  单纯映射  
 (c) 任意  $(K, L)$ , 存在  $\partial_*: H_n(K, L) \rightarrow H_{n-1}(L)$

满足公理

- (1)  $i: (K, L) \rightarrow (K, L)$  恒同,

- (2)  $(K_1, L_1) \xrightarrow{f} (K_2, L_2) \xrightarrow{f_2} (K_3, L_3)$

- (3)  $f: (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$

$$H_n(K_1, L_1) \quad H_{n-1}(L_1)$$

$$H_n(K_2, L_2) \quad H_{n-1}(L_2)$$

- (4)  $\longrightarrow H_n(L) \xrightarrow{i_*} H_n(K)$

- (5) 同伦  $f_i: (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$  单纯同伦, 那么  $(f_0)_* = (f_1)_*$

- (6) 切除.  $(K, L)$  是单纯复形偶,  $U \subset |K|, \bar{U} \subset |L|$ , 假定  $|K| - U = |K_1|, |L| - U = |L_1|$

证明. □

- (7) 维数公理.

$$H_n(\Delta_0) = \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. □

- (8) 紧支集公理. 任意  $c \in H_n(K, L)$ , 存在有限复形对

## 9 代数范畴的同调论

10月12日讲义第5页

# Chapter 2

## 奇异同调

### 1 奇异同调群

10月12日第10页

- 奇异  $n$ -单形的定义
- 奇异  $n$ -链群
- $\partial$  算子
- 奇异同调群
- 连续映射诱导奇异链复形之间的链映射，函子性质

## 2 相对奇异同调群

10月12日讲义第14页

- 链复形的短正合列诱导同调群的长正合列

### 3 奇异同调的 Eilenberg-Steenrod 公理

#### 3.1 同伦公理

10月12日讲义第15页

**定理 3.1.** 设  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  是同伦的连续映射, 则  $(f_0)_\#, (f_1)_\#$  是链同伦的.

### 3.2 维数公理

10月12日讲义第17页

## 4 收缩

10月12日讲义第19页

设  $X$  是拓扑空间,  $T: \Delta_n \rightarrow X$  连续映射

$$S_n(X) = \left\{ \sum a_T T \mid \right\}$$

奇异  $n$ -链群

**定义 4.1.**  $A \subset X$  称为  $X$  的收缩,

嵌入映射有左逆,

## 5 重心重分

设  $K$  是单纯复形

重心重分  $\Delta^1 = [b_0, \dots, b_s]$

其中  $b_i$  为  $\sigma_i$  的重心, 其中  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s$  一串面

$$\text{sd}(\sigma) = \text{Sd}(\partial\sigma) * b$$

其中  $b_\sigma$  是  $\sigma$  的重心

\* 的意思是把该点加进去

$$[v_0, v_1] * b := [v_0, v_1, b]$$

如上归纳定义

$$\text{Sd}: C(k) \longrightarrow C(K')$$

希望定义出来的  $\text{Sd}$  是链映射, 即  $\partial \text{Sd} = \text{Sd} \partial$

还希望满足承载条件, 即如果  $L \subset K$  是子单纯复形

如果  $c \in C(L)$ , 那么  $(\text{Sd})(c) \subset C(L')$

我们从  $C_0(K)$  开始考虑, 规定

$$\text{Sd}: C_0(K) \longrightarrow C_0(K') = \text{Id}$$

若  $i < k (k \geq 1)$  时  $\text{Sd}: C_i(K) \longrightarrow C_i(K')$  已经定义好, 且是链映射, 且满足承载条件

那么  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$

$\partial\sigma \in C_{k-1}(\sigma)$

$\text{Sd}(\partial\sigma) \in C_{k-1}((\partial\sigma)')$

$\text{Sd}(\sigma) = (-1)^k \text{Sd} * b_\sigma$

$$\partial \text{Sd}(\sigma) = \text{Sd}(\partial\sigma) + (-1)^k (\partial \text{Sd})(\partial\sigma)$$

$\text{Sd}(\sigma) \in C_k(\sigma')$

希望定义  $\pi$  是单纯映射

$\pi: K' \rightarrow K, b \mapsto$

$b$  必是  $K$  中某个单形  $\sigma$  的重心

$\pi(b)$  为  $\sigma$  的某个顶点

$\pi_\# \text{Sd}: C(K) \rightarrow C(K)$

证明它链同伦于  $\text{Id}$

还有  $\text{Sd} \pi_\#$  链同伦于  $\text{Id}$

$\pi_\# \text{Sd} - \text{Id} = \partial H + H \partial$

$H: C_k(K) \longrightarrow C_{k+1}(K)$

其中  $H: C_k(K) \longrightarrow C_{k+1}(K)$  满足承载条件,  $L \subset K, c \in C(K), H(c) \in C(L)$

睡觉

定义  $\text{Sd}: L_i(Y) \longrightarrow L_i(Y)$

$$H: L_i(Y) \longrightarrow L_i(Y)$$

走神

10月15日讲义第10页

**定理 5.1.** 若  $\{X_i \subset X\}$  满足  $\{\text{Int } X_i\}_i$  构成  $X$  的开覆盖, 那么

$$\sum_i S_p(X_i) \subset S_p(X)$$

诱导出同调同构

## 6 单纯同调与奇异同调同构

10月19日讲义第5页

## 7 切除定理

10月19日讲义第6页

**定理 7.1.** 设  $A \subset X$ . 如果  $U \subset X$  满足  $\bar{U} \subset \text{Int } A$ , 那么包含映射

$$j: (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$$

诱导奇异同调群的同构.

证明. 记  $\mathcal{A} = \{X - U, A\}$ . 由  $\bar{U} \subset \text{Int } A$  知  $\mathcal{A}$  的元素的内部覆盖  $X$ . □

**定理 7.2.**  $X_1, X_2 \subset X$ ,  $\{X_1, X_2\}$  为 Mayer-Vietoris 偶, 当且仅当

$$i: (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$$

诱导相对同调群的同构

$$i_*: H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$$

## 8 局部同调

10月19日讲义第8页

## 9 一般系数的同调群

**定义 9.1.** 设  $R$  是一个交换幺环,  $X$  是一个拓扑空间, 令  $S_n(X, R)$  为所有  $n$  维奇异单形生成的自由  $R$  模, 称为  $X$  的  $n$  维  $R$  系数奇异链群.

## 10 Tor 与 Ext

定义 10.1. 设  $R$  是一个交换幺环,  $A$  是  $R$ -模.  $A$  的一个  $R$ -模分解是一个  $R$ -模长正合序列

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

如果每个  $C_n$  都是自由  $R$ -模, 则称之为  $A$  的一个自由  $R$ -模分解.

例 10.2.  $\mathbb{Z}$  作为  $\mathbb{Z}$ -模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

例 10.3.  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  作为  $\mathbb{Z}$ -模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

命题 10.4.  $A$  的一个  $R$ -模分解对应一个链复形

$$C: \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

它的同调群是

$$H_n(C) = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ A, & n = 0. \end{cases}$$

定理 10.5. 任何  $R$ -模  $A$  的自由  $R$ -模分解一定存在.

证明. 取  $C_0$  为集合  $A$  自由生成的  $R$ -模  $F(A)$ , 取  $\varepsilon$  为集合间的映射  $\text{Id}: A \rightarrow A$  扩充而成的  $R$ -模同态  $\varepsilon: C_0 \rightarrow A$ . 取  $C_1$  为集合  $\ker \varepsilon$  自由生成的  $R$ -模, 以此类推.

□

例 10.6. 设  $R$  是 PID, 则  $R$ -模  $A$  有自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker \varepsilon \xrightarrow{\iota} C_0 = F(A) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

这是因为 PID 上的自由模的子模也是自由的.

例 10.7.  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  作为  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

例 10.8.  $R$  上有自然的  $R[x_1, \dots, x_n]$  模结构

$$f(x_1, \dots, x_n) \cdot r = (a_0 + \sum a_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \cdots x^{i_n}) \cdot r := a_0 r.$$

当  $R$  是 PID 时, 给出  $R$  一个的自由  $R[x_1, \dots, x_n]$ -模分解.

定理 10.9 (自由零调模型). 设  $C = \{C_n, \partial_n\}_{n \geq 0}$  是一个自由的链复形,  $A$  是  $C$  的增广. 设  $C'$  是  $A'$  的一个  $R$ -模分解. 对于任何线性映射  $\varphi_{-1}: A \rightarrow A'$ , 存在链映射  $\varphi = \{\varphi_n: C_n \rightarrow C'_n\}_{n \geq 0}$  使得  $\varepsilon \circ \varphi_0 = \varphi_{-1} \circ \varepsilon$ . 且任何两个这样的链映射  $\varphi, \varphi'$  是链同伦的.

证明.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi_{-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_2 & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C'_0 \xrightarrow{\varepsilon} A' \longrightarrow 0 \end{array}$$

取  $C_0$  的一组基  $\{c_{0i}\}$ , 因为  $\varepsilon: C'_0 \rightarrow A'$  是满射, 所以存在  $c'_{0i}$  使得  $\varepsilon(c'_{0i}) = \varphi_{-1} \circ \varepsilon(c_{0i})$ .

$$\begin{array}{ccc} c_{0i} & \longrightarrow & \varepsilon(c_{0i}) \\ \downarrow \text{---} & & \downarrow \\ c'_{0i} & \longrightarrow & \varphi_{-1} \circ \varepsilon(c_{0i}) \end{array}$$

因为线性映射由它在自由模的基上的取值决定, 这样我们就定义出了  $\varphi_0$ . 以此类推可定义  $\varphi$ .

下面我们设有两个链映射  $\varphi$  和  $\psi$ , 我们来找它们之间的链同伦.

$$\begin{array}{ccc} & C_0 & \\ & \downarrow \varphi & \\ C'_1 & \longrightarrow & C'_0 \longrightarrow A \end{array}$$

因为  $\varepsilon \circ (\varphi - \psi) = \psi_{-1} \circ \varepsilon - \psi_{-1} \circ \varepsilon = 0$ , 所以可在  $C'_1$  中找到  $\varphi - \psi(c_{0i})$  的一个原像, 将之定义为  $H_0(c_{0i})$ . 以此类推定义  $H$ . □

**命题 10.10.**  $R$ -模  $A$  的任何两个自由分解  $C, C'$  都是链同伦等价的.

证明.

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \text{Id} \\ C'_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow \psi & & \downarrow \text{Id} \\ C_0 & \longrightarrow & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{Id} \\ C_0 & \longrightarrow & A \end{array}$$

□

设  $A, B$  是  $R$ -模. 取  $A$  的一个自由  $R$ -模分解  $C$ , 构造链复形  $C \otimes B$ .

**命题 10.11.**  $H_n(C \otimes B)$  只与  $A, B$  有关, 而与  $A$  的自由分解无关.

**定义 10.12.** 称  $H_n(C \otimes B)$  为  $A$  与  $B$  的第  $n$  个挠群, 记作  $\text{Tor}_n^R(A, B)$ .

**例 10.13.** 计算  $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

解. 找  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  的一个自由  $\mathbb{Z}$ -模分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则  $C \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  为

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

所以

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n \geq 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n = 0, 1. \end{cases}$$

□

例 10.14. 计算  $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

解. 找  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  的一个自由  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -模分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则  $C \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  为

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

所以

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n \geq 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 0. \end{cases}$$

□

例 10.15. 计算  $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

解. 找  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  的一个自由  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -模分解

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则  $C \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  为

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

所以

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

# Chapter 3

## 胞腔同调

### 1 胞腔复形

10月19日讲义第12页

例 1.1.

## 2 胞腔分解的例子

10 月 22 日讲义第 4 页

### 3 胞腔同调群计算的例子

10 月 22 日讲义第 8 页

## 4 球面的映射度

网课讲义合集第 8 页

## 5 透镜空间

网课讲义合集第 13 页

## 6 万有系数定理

网课讲义合集第 26 页

## 7 奇异上同调中的卡积与上积

网课讲义合集第 37 页

## 8 乘积空间的奇异同调

网课讲义合集第 43 页

## 9 Kunneth 公式

网课讲义合集第 45 页

## Chapter 4

# Hatcher 习题

### 1 Chapter0

## 2 Section 2.1

11. Show that if  $A$  is a retract of  $X$  then the map  $H_n(A) \rightarrow H_n(X)$  induced by the inclusion  $A \subset X$  is injective.

证明.

□

14. Determine whether there exists a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

More generally, determine which abelian groups  $A$  fit into a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^m} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow 0$$

with  $p$  prime. What about the case of short exact sequences

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

证明.

□

# 附录 A

## 正合列

### 1 链复形与链映射

- 链复形的定义
- 链映射的定义
- 链映射的例子，包含映射，商映射
- 链复形范畴到分次 Abel 群范畴的函子
- 链同伦
- 链同伦的链映射诱导同调群的同构

## 2 可裂的短正合列

**定义 2.1.** 设  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$  为一短正合列. 如果存在子对象  $D \subset B$ , 使得

$$i(A) \oplus D = B$$

则称此序列分裂.

**命题 2.2.** 给定短正合列  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ , 则下列陈述等价

- (1) 短正合列可裂
- (2) 存在同态  $j: B \rightarrow A$  使得  $j \circ i = \text{Id}_A$
- (3) 存在同态  $p: C \rightarrow B$  使得  $\pi \circ p = \text{Id}_C$

更进一步地, 在上述条件下,  $B \simeq A \oplus C$ ,  $D \simeq C$ .

### 3 长正合列引理

定理 3.1. 设

$$0 \longrightarrow (C^1, \partial^1) \xrightarrow{f} (C^2, \partial^2) \xrightarrow{g} (C^3, \partial^3) \longrightarrow 0$$

为链复形的短正合列, 则有同调群的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C^1) \xrightarrow{f_*} H_{n+1}(C^2) \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(C^3) \xrightarrow{\partial_*} H_n(C^1) \xrightarrow{f_*} H_n(C^2) \longrightarrow \cdots$$

证明.

(1) 定义  $\partial_*$

$$\begin{array}{ccccc} & & \beta & \xrightarrow{g} & \alpha \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \gamma & \longleftarrow & \partial\beta & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \partial\gamma & \longleftarrow & 0 & & \end{array}$$

- 对于  $[\alpha] \in H_{n+1}(C^3)$ , 选取代表元  $\alpha \in C_{n+1}^3$
- 因为  $g$  是满射, 所以存在  $\beta \in C_{n+1}^2$  使得  $g_{n+1}\beta = \alpha$
- 因为  $\partial_{n+1}^3\alpha = 0$ , 所以  $g_n\partial_{n+1}^2\beta = 0$ , 即  $\partial_{n+1}^2\beta \in \ker g_n$
- 因为  $\text{im } f_n = \ker g_n$ , 所以存在  $\gamma \in C_n^1$  使得  $f_n\gamma = \partial_{n+1}^2\beta$ . 因为  $f_n$  是单射, 所以  $\gamma$  唯一.
- $\gamma$  是闭的, 因为  $f_{n-1}\partial_n^1\gamma = \partial_n^2f_n\gamma = \partial_n^2\partial_{n+1}^2\beta = 0$ , 所以  $\partial_n^1\gamma \in \ker f_{n-1}$ , 但  $f_{n-1}$  是单射
- 将  $\partial_*[\alpha]$  定义为  $[\gamma]$ .
- 下验证良定性

$$\begin{array}{ccccc} \delta & \longrightarrow & \beta & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \partial\delta & \longleftarrow & \partial\beta & & \end{array}$$

假设有  $\beta'$  使得  $g_{n+1}\beta = g_{n+1}\beta' = \alpha$ , 那么  $\beta - \beta' \in \ker g_{n+1} = \text{im } f_{n+1}$

设  $\beta - \beta' = f_{n+1}\delta$ , 其中  $\delta \in C_{n+1}^1$ . 存在  $\tilde{\gamma}$  使得  $f_n\tilde{\gamma} = \partial_{n+1}^2f_{n+1}\delta$ .

由  $\tilde{\gamma}$  的唯一性知  $\tilde{\gamma} = \partial_{n+1}^1\delta$ . 所以  $\beta$  的选取并不影响最终的  $[\gamma]$ .

$$\begin{array}{ccccc} \xi & \longrightarrow & \eta & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \beta = \partial\xi & \longrightarrow & \alpha = \partial\eta & & \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

取  $\bar{\alpha}$  使得  $\alpha - \bar{\alpha} = \partial_{n+1}^3\eta$ , 其中  $\eta \in C_{n+2}^3$ .

因为  $g_{n+2}$  是满射, 所以存在  $\xi \in C_{n+2}^2$  使得  $g_{n+2}\xi = \eta$ .

$g_{n+1}\partial_{n+2}^2\xi = \alpha - \bar{\alpha}$ , 但  $\partial_{n+1}^2\partial_{n+2}^2\xi = 0$ , 所以并不影响最终的  $[\gamma]$ .

(2)  $H_{n+1}(C^3)$  处的正合性. 即要证明  $\text{im } g_{*,n+1} = \ker \partial_{*,n+1}$ .

- $\text{im } g_{*,n+1} \subset \ker \partial_{*,n+1}$ . 取  $[\beta] \in H_{n+1}(C^2)$ , 要证  $\partial_*[g(\beta)] = 0$ .

$$\begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & \alpha = g(\beta) \\ & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

- $\ker \partial_* \subset \text{im } g_*$ . 即要证  $\beta$  是闭链.

$$\begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & \alpha \\ & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & \partial\beta = 0 \end{array}$$

(3)  $H_n(C^1)$  处的正合性, 既要证明  $\text{im } \partial_* = \ker f_*$

- $\text{im } \partial_* \subset \ker f_*$ . 这是因为  $f_*[\gamma] = [\partial\beta] = 0$ .

$$\begin{array}{ccc} \beta & \xrightarrow{g} & \alpha \\ & & \downarrow \\ \gamma & \longleftarrow & \partial\beta \end{array}$$

- $\ker f_* \subset \text{im } \partial_*$ .

$$\begin{array}{ccc} \beta & \xrightarrow{g} & \alpha \\ & & \downarrow \\ \gamma & \longleftarrow & f_*(\gamma) = \partial\beta \end{array}$$

(4)  $H_{n+1}(C)$  处的正合性, 即  $\text{im } f_* = \ker g_*$ .

- $\text{im } f_* \subset \ker g_*$  是显然的.
- $\ker g_* \subset \text{im } f_*$ . 设  $g_*[\beta] = 0$ , 也就是  $g(\beta)$  是边缘

$$\begin{array}{ccc} \xi & \longrightarrow & \eta \\ & & \downarrow \\ \beta & \longrightarrow & \alpha := g(\beta) \end{array} + \begin{array}{ccc} \xi & \longrightarrow & \eta \\ & & \downarrow \\ \partial\xi & \longrightarrow & g(\beta) \end{array} \implies \gamma \longrightarrow \partial\xi - \beta \longrightarrow 0$$

□

附录 B

范畴论