- 第二章　LMS自适应滤波

2.5　LMS算法变形

一 泄放因子（leakage factor）

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

当输入信号消失时，递推式中系数被锁死在那儿，这时最好让其返回到0，以便下一次重新递归，从而有个稳定的行为。这可以通过加一个泄放因子来实现。

$$\mathbf{H}(n+1)=(1-\gamma)\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$ 式中 $0<\gamma<1$

从而当 $\mathbf{X}(n+1)=0$ 时， $\mathbf{H}(n+1)\to 0$

将 $e(n+1)=y(n+1)-\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{H}(n)$ ，代入有

$$\mathbf{H}(n+1)=[(1-\gamma)\mathbf{I}_N-\delta\ \mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\ \mathbf{H}(n)\ +\ \delta\ \ y(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

收敛后，定义均值为：

$$\mathbf{H}_\infty=E[\mathbf{H}_{(\infty)}]=[(1-\gamma)\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{R}]\ E[\mathbf{H}_{(\infty)}]+\delta\ \ \mathbf{r}_{yx}$$

$$\mathbf{H}_{\infty} = E[\mathbf{H}_{(\infty)}] = [(1-\gamma)\mathbf{I}_N - \delta\mathbf{R}]\ E[\mathbf{H}_{(\infty)}] + \delta\ \mathbf{r}_{yx}$$

$$E[\mathbf{H}_{(\infty)}] = [\gamma\mathbf{I}_N + \delta\mathbf{R}]^{-1}\delta\ \mathbf{r}_{yx}$$

$$\therefore\ \mathbf{H}_{\infty} = [\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]^{-1}\ \mathbf{r}_{yx}$$

比较$\mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{r}_{yx}$，可见泄放因子的引入，使滤波器系数即使是均值也不能收敛到 $\mathbf{H}_{opt}$

$$\mathbf{H}_{\infty} = [\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]^{-1}\ \mathbf{R}\ \mathbf{H}_{opt}$$

这时相当于一个白噪声被叠加到输入信号 $x(n)$上产生同样的效果

$$[\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N] = [\mathbf{R}] + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\delta} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\gamma}{\delta} \end{bmatrix}$$

因为白噪声加到$x(n)$后求自相关矩阵时，除对角线元素变化，$\gamma(0)+\frac{\gamma}{\delta}$ 其余由于噪声的独立性而为**0**

为了评定泄放因子的影响，我们重写系数矢量：

$$\mathbf{R}+\frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N=\mathbf{Q}\ diag(\lambda_i)\ \mathbf{Q}^T+\frac{\gamma}{\delta}\mathbf{Q}\ diag(1)\ \mathbf{Q}^T$$

$$=\mathbf{Q}\ diag(\lambda_i+\frac{\gamma}{\delta})\ \mathbf{Q}^T$$

$$[\mathbf{R}+\frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]^{-1}=[\mathbf{Q}^T]^{-1}\ diag(\lambda_i+\frac{\gamma}{\delta})^{-1}\ \mathbf{Q}^{-1}$$

$$=\mathbf{Q}\ diag(\lambda_i+\frac{\gamma}{\delta})^{-1}\ \mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{H}_\infty=[\mathbf{R}+\frac{\gamma}{\delta}\mathbf{I}_N]^{-1}\ \mathbf{R}\ \mathbf{H}_{opt}$$

$$=\mathbf{Q}\ diag(\lambda_i+\frac{\gamma}{\delta})^{-1}\ \mathbf{Q}^T\ \mathbf{Q}\ diag(\lambda_i)\ \mathbf{Q}^T\ \mathbf{H}_{opt}=\mathbf{Q}\ diag(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\frac{\gamma}{\delta}})\ \mathbf{Q}^T\ \mathbf{H}_{opt}$$

$$\mathbf{H}_\infty = \mathbf{Q}\ diag(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \frac{\gamma}{\delta}})\ \mathbf{Q}^T\ \mathbf{H}_{opt}$$

可见偏离取决于 $\lambda_{\min}$和 $\frac{\gamma}{\delta}$ 的相对大小

如果 $\frac{\gamma}{\delta} << \lambda_{\min}$，则 $\mathbf{H}_\infty = E[\mathbf{H}_{(\infty)}] \to \mathbf{H}_{opt}$

由于 $\mathbf{H}_\infty - \mathbf{H}_{opt} = [\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}]^{-1}\ \mathbf{R}\ \mathbf{H}_{opt} - \mathbf{H}_{opt} = \{[\mathbf{R} + \frac{\gamma}{\delta}]^{-1}\ \mathbf{R} - \mathbf{I}_N\}\mathbf{H}_{opt}$

所以残差 $J_{(\infty)} = J_{\min} + [\mathbf{H}_\infty - \mathbf{H}_{opt}]^T\ \mathbf{R}\ [\mathbf{H}_\infty - \mathbf{H}_{opt}]$

泄放因子尤其对于处理非平稳信号有用，适当选择泄放因子可减小输出误差功率。

（语音信号中，试验表明，$\delta=2^{-6}$，$\gamma=2^{-8}$是一种好的选择）

$$0<\delta<\frac{2}{N\sigma_x^2}$$

$$\tau_e \approx \frac{1}{\delta\sigma_x^2}$$

二、符号算法（sign Algorithm）：

LMS算法中，系数自适应遵循

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

导致滤波器中（N＋1）次乘法（相对于FIR，额外）. 而当信号是非平稳时（如 σ_x^2 在变化），尚需估计 σ_x^2 ，用 $\frac{1}{\tau_e\sigma_x^2}$ 代替 δ（如希望时间常数保持稳定: $\frac{1}{\delta\sigma_x^2}=\tau_e$）。

实用中有一种简化算法 —— 符号算法。

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\ \Delta\ sign[e(n+1)]\ sign[\mathbf{X}(n+1)]$$

式中符号函数 $sign(x)=\frac{x}{|x|}$

若近似将 $|x|$ ，看着信号的有效值 σ_x 。这里 $\sigma_x=\sqrt{E[x^2(n)]}$

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\ \Delta\ sign[e(n+1)]\ sign[\mathbf{X}(n+1)]$$

这时上式仍可近似看作是**LMS**算法:

$$\mathbf{H}(n+1)=\mathbf{H}(n)+\ \Delta\frac{1}{\sigma_e\sigma_x}\ e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

但是 $\delta\approx\dfrac{\Delta}{\sigma_x\sigma_e}$

这里σ_x,σ_e是输入信号和输出误差的有效值。

在学习状态（指开始递推，达稳态之前），由于初始值H(0)=0，可假设$\sigma_e\approx\sigma_y$，则符号算法初始时间常数可近似估计为

$$\delta\approx\frac{\Delta}{\sigma_x\sigma_e}$$

$$\tau\approx\frac{1}{\delta\sigma_x^2}\ \Longrightarrow\ \therefore\tau_s\approx\frac{1}{\Delta}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

收敛后，可合理假设 $\sigma_e^2 = J_{\min}$

则可估计符号算法均方收敛误差：

$$J(\infty) \approx J_{\min}(1 + \frac{\delta}{2} N\sigma_x^2)$$
$$\approx J_{\min}(1 + \frac{\Delta N \sigma_x}{2\sqrt{J_{\min}}})$$

$$\sigma_e^2 = J_{\min}$$

$$\delta \approx \frac{\Delta}{\sigma_x \sigma_e} \Rightarrow \delta \approx \frac{\Delta}{\sigma_x \sqrt{J_{\min}}}$$

超量残差：

$$J_{ex}(\infty) = \sqrt{J_{\min}} \frac{\Delta N \sigma_x}{2}$$

根据稳定性条件，$0 < \delta < \frac{2}{N\sigma_x^2}$， 故 Δ取值条件：

$$0 < \Delta < \frac{2}{N} \frac{\sqrt{J_{\min}}}{\sigma_x}$$

同样为了适应处理非平稳的情况，亦可以加入泄放因子在符号算法中。

$$\mathbf{H}(n+1)=(1-\gamma)\mathbf{H}(n)+\Delta\ \ sign[e(n+1)]\ \ sign[\mathbf{X}(n+1)]$$

在这些条件下：

$$\left|\gamma\mathbf{H}(n)\right|=\left|\Delta\ \ sign[e(n+1)]\ \ sign[\mathbf{X}(n+1)+\mathbf{H}(n)-\mathbf{H}(n+1)\right|$$

$$\leq\left|\Delta\right|+\left|\mathbf{H}(n)-\mathbf{H}(n+1)\right| \Rightarrow |\mathbf{H}(n)|\leq\left|\frac{\Delta}{\gamma}\right|+|\varepsilon|$$

即系数被限制在 $|h_i(n)|\leq\dfrac{\Delta}{\gamma} \qquad 0\leq i\leq N-1$

一般讲符号算法比标准的梯度算法（LMS）收敛慢，超量误差大，但是却十分简单（保留了和固定系数滤波器相同的乘法次数），由于step-size具有归一化性质，robust较好。它又能处理非平稳型号，故它亦是一种较广泛使用的自适应算法。

$$\delta\approx\frac{\Delta}{\sigma_x\sigma_e}$$