

光学复习

2023 秋 光学 A 助教 施耀炜¹

1 几何光学

1.1 基本定律与费马原理

折射定律: $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

全反射: $i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$, 从 n_1 射入 n_2 , $n_1 > n_2$

棱镜的折射: $n = \frac{\sin \frac{\delta_m + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, δ_m 为最小偏向角, α 为棱镜顶角; $\alpha \rightarrow 0$ 时, $\delta = (n - 1)\alpha$

费曼原理: $L = \int_A^B n \, ds \implies \delta L = \delta \int_A^B n \, ds$, 即光程取极值

1.2 光学成像

单球面折射: $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$, 物方焦点 $f = \frac{n}{n' - n}r$, 像方焦点 $f' = \frac{n'}{n' - n}r$

高斯公式: $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$

牛顿公式: $xx' = ff'$, $x = s - f$, $x' = s' - f'$

横向放大率: $V = \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{n's}$

薄透镜成像: $\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}$, 空气中 $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$

磨镜者公式: $f' = f = \frac{1}{(n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$

空气中密接透镜: $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

单球面反射: $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}$, 焦距 $f = f' = -\frac{r}{2}$

1.3 光学仪器

眼睛: 明视距离 $S_0 = 25 \text{ cm}$, 眼最小分辨角 $\delta\theta_e = 1' = 60''$

¹ 才疏学浅, 疏漏难免, 如发现错误, 请联系 shiyaweio40126@mail.ustc.edu.cn 最后更新时间: 2023 年 12 月 26 日

放大镜：物在焦点附近，视角放大率 $M = \frac{\text{像所张的角}}{\text{物体在明视距离处所张的角}} = \frac{S_0}{f}$.

望远镜：视角放大率 $M = -\frac{f_0}{f_E}$

显微镜：视角放大率 $M = V_0 M_E = -\frac{S_0 \Delta}{f_0 f_E}$, Δ 为光学筒长

2 光的干涉与衍射

2.1 光的干涉

波动表达： $u(\vec{P}, t) = \tilde{u}e^{-i\omega t}$ $\tilde{u} = A(P)e^{i\varphi(P)}$ $\varphi(P) = \vec{k} \cdot \vec{r} = k_i x_i + \varphi_0$

相干条件：同频、有平行的振动分量，相位差稳定

两束光干涉： $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$, δ 为相位差

衬比度： $\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$ 理想相干点源 $\gamma = \frac{2A_1/A_2}{1 + (A_1/A_2)^2}$

平行光干涉： $I = (A_1^2 + A_2^2) \{1 + \gamma \cos [k(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)x + k(\cos \beta_1 - \cos \beta_2)y + \varphi_{10} - \varphi_{20}]\}$

方向向量 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 、 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

考虑 $x - y$ 平面，空间频率 $f_x = \frac{1}{\Delta x} = \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{\lambda}$, $f_y = \frac{1}{\Delta y} = \frac{\cos \beta_1 - \cos \beta_2}{\lambda}$

杨氏双缝实验：条纹间距 $\Delta x = \frac{L\lambda}{D}$, L 为狭缝到屏的距离， D 为狭缝间隔， λ 为波长

菲涅尔透镜：条纹间距 $\Delta x = \frac{B+C}{2(n-1)\alpha B} \lambda$, α 为棱镜底角， B 为点光源到棱镜距离， C 为棱镜到屏距离

薄膜干涉/等倾干涉：光程差 $\Delta L = 2nh \cos i + \delta$, i 为光线在薄膜内的折射角，

$$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ 当且仅当只有一个半波损}$$

楔形干涉/等厚干涉：条纹间距 $\Delta = \frac{\lambda}{2n'\alpha}$, n' 是楔形间介质折射率

牛顿环：暗纹 $r_k = \sqrt{kR\lambda}$, 亮纹 $r_k = \sqrt{(k - \frac{1}{2})R\lambda}$, 曲率半径 $R = \frac{r_{i+m}^2 - r_i^2}{m\lambda}$

迈克尔逊干涉仪： $\delta \Delta L = 2n\Delta h = N\lambda$, 即 M_1 或 M_2 移动 Δh , 视场中心吞吐 N 个亮环

M_2 在分光棱镜的成像 M_2' 和 M_1 的距离 d 变小则吞亮环, d 变大则吐亮环

光程差 $\Delta L = 2nh \cos \theta$, θ 为倾角, 中心倾角 0

多光束干涉: 透射光强 $I_T = \frac{I_0}{1 + \frac{4R \sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2}}$, 反射光强 $I_R = I_0 - I_T = \frac{I_0}{1 + \frac{4R \sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2}}$

光程差 $\delta = \frac{4\pi n h \cos i}{\lambda}$, i 为薄膜内干涉角, $R = r^2$ 为光强反射率, n 为介质折射率

F-P 干涉仪: 色分辨本领 $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R}$, 角色散本领 $\frac{\delta i_k}{\delta\lambda_k} = \frac{k}{2nh \sin i_k}$, 精细度 $F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$

单模线宽 $\Delta\lambda_k = \frac{\lambda}{\pi k} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$, $\Delta\nu_k = \frac{c\Delta\lambda_k}{\lambda^2} = \frac{c}{\pi k \lambda} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$, 模式频率 $\nu_k = k \frac{c}{2nh}$

第 k 级亮纹角宽 $\Delta i_k = \frac{\lambda}{2\pi n h \sin i_k} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$, 条纹可见度 $\gamma = \frac{2R}{1+R^2}$

时空相干性: 光源极限宽度 $b = \frac{R\lambda}{d}$, $\Delta\theta = \frac{d}{R}$ 为相干范围的孔径角

时间相干 $L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = c\tau$, $\Delta\lambda$ 为线宽, 反比关系 $\Delta\nu \cdot \tau = 1$, $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$

2.2 光的衍射

惠更斯原理: 波阵面的每个点可各看做是一个产生球面子波的次级波源

圆孔衍射: 半波带法得振幅 $A(P) = A_1(P) - A_2(P) + A_3(P) + \dots + (-1)^{n+1} A_n(P) = \frac{1}{2}(A_1 + (-1)^{n+1} A_n)$

$A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} A_1$, $E(P) \xrightarrow{n=2k+1} \frac{1}{2}(A_1 + A_n)$ 为亮点, $E(P) \xrightarrow{n=2k} \frac{1}{2}(A_1 - A_n)$ 为暗点

圆孔半径满足 $\rho^2 = r_n^2 - (b+h)^2 = R^2 - (R-h)^2$, $h = \frac{nb\lambda}{2(R+b)}$, $\rho_n = \sqrt{\frac{Rb}{R+b} n\lambda}$

主焦距 $f = \frac{\rho_1^2}{\lambda}$, 次焦距 $f' = \frac{f}{2k+1}$

单缝衍射: $A_\theta = A_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, $I_\theta = I_0 (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^2$, $\sin \theta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$

次极强 $\alpha = \tan \alpha$, $\alpha = \pm 1.43 \frac{\lambda}{a}$, $\pm 2.46 \frac{\lambda}{a}$, $\pm 3.47 \frac{\lambda}{a} \dots$

暗纹 $\alpha = k\pi$, $\sin \theta = \frac{k\lambda}{a}$, 亮纹半角宽 $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$

矩孔衍射: $I(\alpha, \beta) = I_0 (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^2 (\frac{\sin \beta}{\beta})^2$, $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}$, $\beta = \frac{\pi b \sin \theta_2}{\lambda}$, a, b 为矩孔的长宽

多缝衍射: $I_\theta = I_0 (\frac{\sin \alpha}{\alpha})^2 (\frac{\sin(N\beta)}{\sin \beta})^2$, $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$, $\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$, a 为缝宽, d 为光栅常数

主级强 $\beta = k\pi$, $\sin \theta = k \frac{\lambda}{d}$; 零点 $N\beta = m\pi$ 且 $\beta \neq k\pi$, $\sin \theta = (k + \frac{m}{N}) \frac{\lambda}{d}$

主级强半角宽 $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$, 缺级 $k = \frac{k'd}{a}$

光栅: $\sin \theta = k \frac{\lambda}{d}$

角色散本领 $D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cos \theta_k}$, 线色散本领 $D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} = f D_\theta$

闪耀光栅：闪耀角 θ_b ，垂直反射面入射 $2d \sin \theta_b = k\lambda$ ，垂直光栅平面入射 $d \sin 2\theta_b = k\lambda$

晶体光栅：布拉格公式 $2d \sin \theta = k\lambda$ ， θ 为掠射角， d 为晶格间隔

圆孔衍射：光强 $I(\theta) = I_0 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2$

Airy 班角半径 $\Delta\theta = 0.61 \frac{\lambda}{a} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ 即最小分辨角，线半径 $r = 0.61 \frac{\lambda f}{a} = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$

3 光的偏振

3.1 光的偏振态

光的偏振：s 光和 p 光，互相垂直，s 光与入射反射平面垂直，p 光与入射反射平面平行

反射率和透射率： $r_s = \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}$

$$t_s = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2)}$$

$$r_p = \frac{E'_{1p}}{E_{1p}} = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)}$$

$$t_p = \frac{E_{2p}}{E_{1p}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)}$$

$$R_p = \frac{I'_{1p}}{I_{1p}} = |r_p|^2, \quad \mathcal{R}_p = \frac{W'_{1p}}{W_{1p}} = R_p$$

$$T_p = \frac{I_{2p}}{I_{1p}} = \frac{n_2}{n_1} |t_p|^2, \quad \mathcal{T}_p = \frac{W_{2p}}{W_{1p}} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_p$$

$$R_s = \frac{I'_{1s}}{I_{1s}} = |r_s|^2, \quad \mathcal{R}_s = \frac{W'_{1s}}{W_{1s}} = R_s$$

$$T_s = \frac{I_{2s}}{I_{1s}} = \frac{n_2}{n_1} |t_s|^2, \quad \mathcal{T}_s = \frac{W_{2s}}{W_{1s}} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_s$$

由能量守恒， $\mathcal{R}_p + \mathcal{T}_p = \mathcal{R}_s + \mathcal{T}_s = 1$

Stokes 倒逆关系： $r^2 + tt' = 1$ ， $r' + r = 0$ ，对 p、s 分量分别适用

布儒斯特角： $i_B = i_1 = \arctan \frac{n_2}{n_1}$ ，此时 $r_p = 0$

马吕斯定律：线偏光经过与偏振方向夹角为 α 的偏振片后，光强 $I = I_0 \cos^2 \alpha$

正交叠加：对于 $E_x = E_{x0} \cos(\omega t)$ 、 $E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \delta)$

$$\text{有 } \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

$$\text{椭偏光偏振度: } P = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$$

3.2 晶体中的双折射

光轴：光沿该方向传播不发生双折射

主截面：入射界面法线与晶体光轴组成的平面

o 光与 e 光：o 光振动方向与主平面垂直，e 光振动方向在主平面内

一般情况的双折射： $\cot \theta = \frac{n_o^2}{n_e^2} \cot \xi$ ，其中 θ 为 o 光和光轴的夹角， ξ 为 e 光和光轴的夹角

$$\text{e 光的折射率 } n^2(\theta) = \frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}$$

波晶片：相位差 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ ，1/4 波片 $d = (2m + 1)\frac{\lambda}{4|n_o - n_e|}$ ，半波片 $d = (2m + 1)\frac{\lambda}{2|n_o - n_e|}$

应力光学定律： $n_o - n_e = KP$ ， $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}KPd$ ， K 为应力光学常数， P 为作用应力

克尔效应： $n_o - n_e = \lambda_o K_r E^2$ ， K_r 为克尔系数，半波电压 $V_{\lambda/2} = \frac{h}{\sqrt{2dk_r}}$

科顿-穆顿效应： $n_o - n_e = \lambda_0 CH^2$ ， C 为磁光系数

晶体旋光： $\theta = \alpha d = \frac{\pi}{\lambda}(n_L - n_R)d = VBl$ ， θ 为偏振旋转角度， α 为晶体旋光率， V 为韦尔代常数

4 光的其他性质

4.1 光的吸收、色散、散射

光的吸收： $I = I_0 e^{-\alpha t}$

柯西色散公式： $n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$

色散率： $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ 为正常色散， $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ 为反常色散

瑞利散射： $I_s(\lambda) \propto \frac{f(\lambda)}{\lambda^4}$ ，微粒尺度 $a < \lambda$

4.2 光的量子性

普朗克量子： $\epsilon_0 = h\nu$

光电效应: $\frac{1}{2}mv_m^2 = eV_0 = eK(\nu - \nu_0) = h\nu - A$, 截止频率 $\nu_0 = \frac{A}{h}$

康普顿散射: $\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$

光的波粒二象性: $E = h\nu$, $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

斯特藩-玻尔兹曼定律: $R_T = \lambda T^4$

维恩位移定律: $\lambda_M T = b$, $b = 0.288\text{cm}\cdot\text{K}$

普朗克公式: $r_0(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$